Développements asymptotiques dans les coques elliptiques : Modèle de Koiter

Erwan FAOU

IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France

Résumé. On étudie le développement asymptotique de la solution du modèle bidimensionnel de Koiter (voir [7]) en élasticité linéarisée, pour une coque elliptique encastrée tout le long de sa face latérale. On montre que pour des données régulières, cette solution admet un développement asymptotique en puissances de $\varepsilon^{1/2}$ où ε représente la (demi-)épaisseur de la coque. Ce développement contient deux types de termes : des termes indépendants de ε et des termes de couches limites exponentiellement décroissants en $r/\sqrt{\varepsilon}$ où r est la distance géodésique au bord de la surface moyenne.

Asymptotic expansions for elliptic shells: the Koiter model

Abstract. *We study the asymptotic expansion of the solution of the two-dimensional Koiter model (see [7]) in linear elasticity, for an elliptic shell clamped along its whole lateral face. We show that for smooth data, this solution admits an asymptotic expansion in powers of $\varepsilon^{1/2}$ where ε represents the (half-)thickness of the shell. This expansion contains terms independent on ε and boundary layer terms exponentially decaying with respect to $r/\sqrt{\varepsilon}$ where r denotes the geodesic distance to the boundary of the mean surface.*

Abridged english version.

In this paper we consider the two-dimensional linear Koiter shell equations in the case where the shell is clamped along its whole lateral face. We suppose that the mean surface S defining the shell is an *elliptic* oriented smooth compact surface (with or without boundary). This means that the Gaussian curvature is positive on S, or equivalently that the principal curvatures are everywhere of the same sign. We suppose that the material constituting the shell is homogeneous and isotropic and we denote by λ and μ the Lamé coefficients. For $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ sufficiently small, a thin shell is a three dimensional object represented by the domain Ω^ε image of the application $(P,h) \mapsto P + hN(P)$ from $S \times (-\varepsilon,\varepsilon)$ to $\mathbb{R}^3$, where $N(P)$ is the normal to S in P. The number ε represents the (half-)thickness. Starting from the three-dimensional elasticity equations on Ω^ε, an old and difficult problem consists of approximating the three-dimensional displacement by a displacement built from a solution of equations posed on the mean surface S (see [7, 8, 3, 9]). In the sixties, Koiter derived a two-dimensional model of the form $\boldsymbol{M}+\varepsilon^2\boldsymbol{F}$ (see [7, 2]) whose solution is used to build a three-dimensional displacement approximating the three-dimensional solution. The operator $\boldsymbol{M}$ is the membrane operator associated with the bilinear

Note présentée par Philippe Ciarlet

form $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta}) \mapsto \int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\gamma_{\sigma\delta}(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}S$, where $M^{\alpha\beta\sigma\delta} = \widetilde{\lambda} a^{\alpha\beta}a^{\sigma\delta} + \mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta}a^{\beta\sigma})$ with $a^{\alpha\beta}$ the metric tensor on S and $\widetilde{\lambda} = 2\lambda\mu(\lambda+2\mu)^{-1}$. The operator $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ is the change of metric tensor associated with the displacement $\boldsymbol{z}$, and writes $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha z_\beta + \mathrm{D}_\beta z_\alpha) - b_{\alpha\beta}z_3$ where $b_{\alpha\beta}$ is the curvature tensor on S and D_σ the covariant derivative on S. Here $\boldsymbol{z}$ is of the form $\boldsymbol{z} = (z_\alpha, z_3)$, where z_α is a 1-form field on S (we write $\Gamma(T_1S)$ the space of 1-form fields on S) and $z_3 \in \mathscr{C}^\infty(S)$ is a function on S. The bending operator $\boldsymbol{F}$ is associated with the bilinear form $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta}) \mapsto \frac{1}{3}\int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\rho_{\sigma\delta}(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}S$ where $\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\beta z_3 - b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta}z_3 + b_\alpha^\sigma \mathrm{D}_\beta z_\sigma + \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\sigma z_\sigma$ is the change of curvature tensor.

Let $\boldsymbol{L} : \Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S) \to \Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ be an intrinsic operator. Then $\boldsymbol{L}$ is said of multidegree $(2k,2k,2\ell)$ if $L_\alpha(\boldsymbol{z})$ is of degree $2k$ in z_α and $k+\ell$ in z_3, while $L_3(\boldsymbol{z})$ is of degree 2ℓ in z_3 and $k+\ell$ in z_α. The operator is said elliptic of multidegree $(2k,2k,2\ell)$ if it is elliptic in the sense of Agmon, Douglis and Nirenberg (see [1]) for the surfacic indices k and transverse indices ℓ. In our case, for all geometry of the mean surface S the operator $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ is elliptic of multidegree $(2,2,4)$. If we suppose that $\partial S \neq \emptyset$, the Dirichlet boundary conditions associated with $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ are $\boldsymbol{z} \mapsto (z_r, z_s, z_3, \partial_r z_3)\big|_{\partial S}$ where r is the geodesic distance to ∂S and s is the arc-length on ∂S. In the case where S is elliptic, the membrane operator $\boldsymbol{M}$ is elliptic of multidegree $(2,2,0)$ (see [3, 9]) and the natural Dirichlet conditions on the whole boundary, $\boldsymbol{z} \mapsto (z_r, z_s)\big|_{\partial S}$, cover the operator (see [1]). We consider the solution $\boldsymbol{z} \in \Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ of the singularly perturbed problem

$$(\boldsymbol{M} + \varepsilon^2\boldsymbol{F})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{g} \quad \text{in} \quad S \quad \text{and} \quad (z_r, z_s, z_3, \partial_r z_3)\big|_{\partial S} = 0,$$

where $\boldsymbol{g} \in \Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ does not depend on ε. The main result (see [6]) is that $\boldsymbol{z}$ admits an asymptotic expansion of the type

$$\boldsymbol{z} \simeq \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\big(\boldsymbol{\zeta}^{k/2}(x_\alpha) + \chi(r)\boldsymbol{Z}^{k/2}(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}, s)\big), \tag{1}$$

where $\boldsymbol{\zeta}^{k/2} \in \Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ (x_α are local coordinates on S), $\chi(r)$ is a cut-off function near the boundary and $\boldsymbol{Z}^{k/2}(T,s)$ are boundary layer terms exponentially decaying with respect to T, uniformly in s. This means that we can estimate the difference between $\boldsymbol{z}$ and the partial sum of order N of the expansion (1) in any Sobolev norm on S by the remaining term. Moreover, $\boldsymbol{\zeta}^0$ is the solution of the membrane problem $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^0) = \boldsymbol{g}^0$ satisfying the boundary conditions $\zeta_\alpha^0\big|_{\partial S} = 0$, and we have $Z_\alpha^0 = 0$. In general $\zeta_3^0\big|_{\partial S} \neq 0$ and thus the first generic boundary layer term is Z_3^0. We hence compute that $\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\zeta}^0\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{L}^2(S)} \leq C\varepsilon^{1/4}$. Moreover, we can show the same kind of result for other two-dimensional models and compare their asymptotic expansions to Koiter's. If $\partial S = \emptyset$, the equation $(\boldsymbol{M} + \varepsilon^2\boldsymbol{F})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{g}$ has a unique solution $\boldsymbol{z}$ orthogonal to the rigid displacement, and $\boldsymbol{z}$ expands in powers of ε^2.

---

1 Coques elliptiques et modèles bidimensionnels

Soit S une surface compacte orientable dont le bord ∂S peut éventuellement être réduit à $\emptyset$. On suppose que S est $\mathscr{C}^\infty$, et est plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^3$. Dans cette note, on suppose que S est *elliptique* en tout point, c'est-à-dire que sa courbure de Gauss est strictement positive, où encore que ses courbures principales sont de même signe. Sur S, on note $a_{\alpha\beta}$ le tenseur métrique et $b_{\alpha\beta}$ le tenseur de courbure dans un système de coordonnées locales. Le tenseur métrique permet de monter et descendre les indices et on note ainsi $b^\alpha_\beta = a^{\alpha\sigma} b_{\sigma\beta}$ les composantes du tenseur de courbure vu comme champ de tenseurs de type $(1,1)$ sur S. La répétition des indices covariant et contravariant correspond à la contraction des champs de tenseurs. La surface étant elliptique, on a dans tout système de coordonnées locales $b^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \geq c(\xi_1^2+\xi_2^2)$ pour une constante c non nulle et pour tout couple $(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ assez petit, on définit la coque géométrique comme l'image Ω^ε de l'application $(P,h) \mapsto P+hN(P)$ de $S\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ dans $\mathbb{R}^3$ où $N(P)$ est une normale unitaire à S en P. La coque possède donc deux faces $\Gamma^\varepsilon_\pm$ images de $S\times\{\pm\varepsilon\}$ par l'application précédente et une face latérale Γ^ε_0 image de $\partial S\times(-\varepsilon,\varepsilon)$. On suppose que la coque est constituée d'un matériau homogène et isotrope caractérisé par ses coefficients de Lamé λ et μ. On suppose de plus que la coque est encastrée le long de toute sa face latérale et libre sur ses faces supérieure et inférieure. Le problème tridimensionnel consiste alors à résoudre les équations de l'élasticité linéarisée sur Ω^ε. Ce problème est étudié dans [5].

L'étude du problème tridimensionnel et son approximation par un modèle bidimensionnel posé sur la surface moyenne est un problème ancien et difficile (voir en particulier [8, 7, 3, 9]). Dans les années soixante, Koiter (voir [7]) a introduit un modèle bidimensionnel dans lequel une petite déformation de la surface moyenne est caractérisée par ses tenseurs de changement de métrique et de changement de courbure. Ce modèle admet une solution (voir [2]), et à partir de cette solution il est possible de construire un déplacement tridimensionnel qui approche la solution du problème tridimensionnel. D'autre modèles du même type ont été introduits (voir [8] pour une revue des différents modèles). Lorsque c'est possible, l'emploi des développements asymptotiques permet de connaître exactement les performances d'un modèle dans l'approximation du problème tridimensionnel, et permet également de comparer les modèles entre eux. Dans cette note, on se place dans le cas où la surface est elliptique, et on montre que la solution du modèle de Koiter admet un développement asymptotique. Ce développement sera comparé dans la note suivante avec le développement de la solution tridimensionnelle.

Dans toute la suite, on note $\Gamma(T_1S)$ l'espace des champs de 1-formes sur S. Un déplacement surfacique est donc un élément $\boldsymbol{z} = (z_\alpha, z_3)$ de l'espace $\Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$. Le modèle de Koiter est défini par l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2\boldsymbol{F}$ agissant sur $\Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$, où $\boldsymbol{M}$ est l'opérateur de membrane, et où $\boldsymbol{F}$ est l'opérateur de flexion sur la coque. L'opérateur de membrane s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} M_\sigma(\boldsymbol{z}) & = & -\widetilde{\lambda}\mathrm{D}_\sigma\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}) - 2\mu\mathrm{D}_\alpha\gamma^\alpha_\sigma(\boldsymbol{z}), \\ M_3(\boldsymbol{z}) & = & -\widetilde{\lambda}b^\alpha_\alpha\gamma^\beta_\beta(\boldsymbol{z}) - 2\mu b^\beta_\alpha\gamma^\alpha_\beta(\boldsymbol{z}), \end{array}\right.$$

où D_σ est la dérivée covariante sur S et où $\widetilde{\lambda} = 2\lambda\mu(\lambda+2\mu)^{-1}$. L'opérateur $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ est l'opérateur de changement de métrique associé au déplacement $\boldsymbol{z}$, et s'écrit $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha z_\beta + \mathrm{D}_\beta z_\alpha) - b_{\alpha\beta}z_3$. Cet opérateur est associé à la forme bilinéaire sur l'espace $\Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ définie par $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta}) \mapsto \int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\gamma_{\sigma\delta}(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}S$ où $M^{\alpha\beta\sigma\delta}$ est le champ de tenseurs défini par $M^{\alpha\beta\sigma\delta} = \widetilde{\lambda}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\delta} + \mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta}a^{\beta\sigma})$ où $a^{\alpha\beta}$ est l'inverse du tenseur métrique sur S. On remarque que l'opérateur de membrane ainsi défini est bien un opérateur *intrinsèque* sur la variété S car il s'exprime dans tout système de coordonnées en fonctions de champs de tenseurs intrinsèques sur S.

L'opérateur de flexion $\boldsymbol{F}$ s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} F_\sigma(\boldsymbol{z}) & = & -\frac{1}{3}\widetilde{\lambda} b^\alpha_\sigma \mathrm{D}_\alpha \rho^\nu_\nu(\boldsymbol{z}) - \frac{1}{3}\widetilde{\lambda}\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\sigma \rho^\nu_\nu(\boldsymbol{z}) - \frac{2}{3}\mu b^\alpha_\sigma \mathrm{D}_\nu \rho^\nu_\alpha(\boldsymbol{z}) - \frac{2}{3}\mu \mathrm{D}_\nu b^\alpha_\sigma \rho^\nu_\alpha(\boldsymbol{z}) \\ F_3(\boldsymbol{z}) & = & \frac{1}{3}\widetilde{\lambda}\mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \rho^\nu_\nu(\boldsymbol{z}) + \frac{2}{3}\mu \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\nu \rho^\nu_\alpha(\boldsymbol{z}) - \frac{1}{3}\widetilde{\lambda} b^\beta_\alpha b^\alpha_\beta \rho^\nu_\nu(\boldsymbol{z}) - \frac{2}{3}\mu b^\nu_\alpha b^\beta_\nu \rho^\alpha_\beta(\boldsymbol{z}). \end{array}\right.$$

Cet opérateur est associé à la forme bilinéaire $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta}) \mapsto \frac{1}{3}\int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\rho_{\sigma\delta}(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}S$ où $\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\beta z_3 - b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta} z_3 + b^\sigma_\alpha \mathrm{D}_\beta z_\sigma + \mathrm{D}_\alpha b^\sigma_\beta z_\sigma$ est le tenseur de changement de courbure.

Soit $\boldsymbol{L}$ un opérateur intrinsèque de $\Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ dans lui même. On dit qu'il est de multidegré $(2k,2k,2\ell)$ si L_σ est un opérateur d'ordre $2k$ en z_α et $k+\ell$ en z_3, et si L_3 est un opérateur de d'ordre $k+\ell$ en z_α et 2ℓ en z_3. L'opérateur $\boldsymbol{L}$ est dit *elliptique* s'il est elliptique au sens d'Agmon, Douglis et Nirenberg (voir [1]) pour les indices d'inconnues et d'équations surfaciques k et pour les indices d'inconnues et d'équations transverses ℓ. Avec ces notations, il est facile de voir que $\boldsymbol{M}$ est opérateur de multidegré $(2,2,0)$ tandis que $\boldsymbol{F}$ est de multidegré $(2,2,4)$. Ainsi l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ est de multidegré $(2,2,4)$.

Quelles que soient les hypothèses géométriques faites sur S, on montre que l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ est elliptique de multidegré $(2,2,4)$ (voir par exemple [6]). Lorsque $\partial S \neq \emptyset$, les conditions de Dirichlet associées à cet opérateur s'écrivent $\boldsymbol{z} \mapsto (z_r, z_s, z_3, \partial_r z_3)\big|_{\partial S}$ où r est la distance géodésique au bord sur S, et où s est l'abscisse curviligne le long de ∂S. Dans le cas où S est elliptique, l'opérateur de membrane $\boldsymbol{M}$ est elliptique de multidegré $(2,2,0)$ (voir [3, 9]) et les conditions de Dirichlet associées sur tout le bord de la surface moyenne, $\boldsymbol{z} \mapsto (z_r, z_s)\big|_{\partial S}$, recouvrent l'opérateur (voir [1]). Ainsi, si $\boldsymbol{g} \in \Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$, il existe un unique $\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ tel que $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{g}$ dans S et satisfaisant $\zeta_\alpha\big|_{\partial S} = 0$.

2 Développement asymptotique

Soit $\boldsymbol{g} \in \Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ indépendant de ε. On suppose que le bord de la surface S n'est pas réduit à $\emptyset$, et on considère la solution $\boldsymbol{z}$ des équations :

$$\left\{\begin{array}{ll} (\boldsymbol{M}+\varepsilon^2\boldsymbol{F})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{g} & \text{dans} \quad S, \\ (z_r, z_s, z_3, \partial_r z_3)\big|_{\partial S} = 0 & \text{sur} \quad \partial S. \end{array}\right. \tag{2}$$

Ce problème est un problème de perturbation singulière au sens de Vishik et Lyusternik (voir [11]). On est dans le cas où l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ est elliptique et où l'opérateur réduit quand $\varepsilon = 0$ est encore elliptique mais de degré moins élevé. Le résultat principal de cette note est le suivant (voir [6]) :

Théorème 1. – *Supposons que la surface S soit elliptique, et soit $\boldsymbol{z}$ la solution du problème* (2). *On suppose que $\boldsymbol{g} \in \Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ est indépendant de ε. On note (r,s) un système de coordonnées dans un voisinage du bord ∂S tel que r soit la distance géodésique au bord et s l'abscisse curviligne le long de ∂S. Alors $\boldsymbol{z}$ admet un développement asymptotique en puissances de $\varepsilon^{1/2}$:*

$$\boldsymbol{z} \simeq \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\big(\boldsymbol{\zeta}^{k/2}(x_\alpha) + \chi(r)\boldsymbol{Z}^{k/2}(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}, s)\big), \tag{3}$$

où les $\boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ sont des éléments de $\Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ indépendants de ε (x_α est un système de coordonnées locales sur S), où $\chi(r)$ est une fonction de troncature près de bord, *et où les éléments $\boldsymbol{Z}^{k/2}(T,s)$ sont exponentiellement décroissants en T, uniformément en s et sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\partial S$. De plus, pour tout s fixé, les fonctions $T\mapsto e^{\eta T}\boldsymbol{Z}^{k/2}(T,s)$ sont bornées en T pour tout $\eta<\eta_1$ où*

$$\eta_1=\left(\frac{3\mu(\widetilde{\lambda}+\mu)}{(\widetilde{\lambda}+2\mu)^2}\right)^{1/4}\sqrt{b_{ss}(0,s)},$$

où $b_{ss}(r,s)$, $b_{rs}(r,s)$ et $b_{rr}(r,s)$ sont les composantes du tenseur de courbure dans le système de coordonnées (r,s). Enfin le développement précédent est intrinsèque au sens où il ne dépend pas du système de coordonnées locales choisi.

L'équation (3) signifie que pour toute norme de Sobolev $\|\cdot\|$ sur S contenant $\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)$ et pour tout entier N, si $\boldsymbol{S}_N$ désigne la somme partielle d'ordre N de la série de l'équation (3), on a

$$\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{S}_N\|\leq C\varepsilon^{(N+1)/2}(\|\boldsymbol{\zeta}^{(N+1)/2}\|+\|\chi\boldsymbol{Z}^{(N+1)/2}\|).$$

Les estimations ainsi obtenues sont donc optimales au sens où la borne d'erreur est de l'ordre de grandeur du premier terme négligé. En utilisant la décroissance exponentielle des termes de couches limites, on calcule que pour tout k entier et $\ell=0,1,2$, on a $\|\zeta_i^{k/2}\|_{\mathrm{H}^\ell(S)}\leq C$ et $\|\chi Z_i^{k/2}\|_{\mathrm{H}^\ell(S)}\leq C\varepsilon^{(1-2\ell)/4}$ ce qui permet d'obtenir des estimations d'erreurs dans les normes voulues.

Le premier terme du développement $\boldsymbol{\zeta}^0\in\Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ est la solution du problème de membrane $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^0)=\boldsymbol{g}$ et $\zeta_\alpha\big|_{\partial S}=0$. Dans le premier terme de couche limite $\boldsymbol{Z}^0$, on a alors $Z_\alpha^0=0$ ce qui correspond aux conditions aux limites imposées à $\boldsymbol{\zeta}^0$. Mais en général on a $\zeta_3^0\big|_{\partial S}\neq 0$ et donc le terme Z_3^0 est génériquement non nul. Ainsi, on a l'estimation $\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\zeta}^0\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{L}^2(S)}\leq C\varepsilon^{1/4}$, où la borne d'erreur est de l'ordre de grandeur en epsilon des termes de couches limites Z_3^0 en norme $\mathrm{L}^2(S)$ et $\varepsilon^{1/2}Z_\alpha^{1/2}$ en norme $\mathrm{H}^1(S)$. On retrouve ainsi le fait que la solution du modèle de Koiter converge vers la solution des équations de membrane (voir [3, 4]).

3 Commentaires

Le démonstration du théorème 1 se fait en adaptant au cas des systèmes les techniques mises en œuvre par Vishik et Lyusternik dans le cas des équations scalaires (voir [11]). L'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ est elliptique de multidegré $(2,2,4)$ et l'opérateur $\boldsymbol{M}$ est elliptique de multidegré $(2,2,0)$. Bien qu'elliptique, l'opérateur limite ne peut résoudre un problème en imposant toutes les conditions aux limites de l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$. C'est la raison pour laquelle il apparaît des termes de couches limites. Ces termes de couches limites sont donnés par un opérateur sur la variété $\mathbb{R}\times\partial S$ dans laquelle les coordonnées sont T et s. Cet opérateur est en fait un opérateur en T paramétré par s. L'étude de cet opérateur et les propriétés de décroissance à l'infini des solution se fait d'après [1] en étudiant un système d'équations différentielles sur $\mathbb{R}$ (voir [6]).

D'autre part, le théorème précédent est encore valable si $\boldsymbol{g}$ dépend de ε d'une manière compatible avec le développement (3), c'est-à-dire si $\boldsymbol{g}$ admet un développement asymptotique en puissances de $\varepsilon^{1/2}$ comportant des termes indépendants de ε et des termes de couches limites exponentiellement décroissant en $r/\sqrt{\varepsilon}$ avec un exposant de décroissance plus grand que η_1.

Dans le cas où $\partial S = \emptyset$, la solution $\boldsymbol{z}$ du problème $\boldsymbol{K}(\varepsilon)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{g}$ orthogonale aux déplacements rigides admet un développement asymptotique en puissances de ε^2 (voir aussi [10]).

Enfin, le même type de résultat est valable pour d'autres choix d'opérateurs de flexion. En particulier on peut considérer un modèle du type $\boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{B}$ où $\boldsymbol{B}$ est un opérateur associé à la forme bilinéaire $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}) \mapsto \frac{1}{3}\int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\tau_{\sigma\delta}(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}S$ sur $\Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ où $\tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ est un opérateur s'écrivant $\tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\beta z_3 + \chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ avec $\chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ un opérateur de degré 1 en z_α et 0 en z_3. Alors la solution associée à ce modèle admet un développement asymptotique similaire à (3) (voir [6]). On peut alors comparer les développements asymptotiques des solutions associées à deux modèles du type précédent. En particulier, si $\boldsymbol{z}$ est la solution du modèle de Koiter et $\boldsymbol{z}'$ la solution d'un modèle $\boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{B}$ du type précédent avec les même seconds membres et mêmes conditions de Dirichlet au bord, alors on peut calculer que $\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'\|_{\mathrm{H}^1(S)^3} \leq C\varepsilon^{3/4}$ et $\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'\|_{\mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{L}^2(S)} \leq C\varepsilon^{5/4}$.

Références

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, *Comm. Pure Appl. Math.* **17** (1964) 35–92.

[2] M. Bernadou, P. G. Ciarlet. Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W. T. Koiter, *Computing methods in applied sciences and engineering (Second Internat. Sympos., Versailles, 1975), Part 1*, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, Vol. 134, pages 89–136. Springer, Berlin 1976.

[3] P. G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. III, Theory of shells.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam (2000).

[4] P. G. Ciarlet, V. Lods. Asymptotic analysis of linearly elastic shells. III. Justification of Koiter's shell equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **136** (1996) 191–200.

[5] E. Faou. Développements asymptotiques dans les coques elliptiques : Equations tridimensionnelles linéarisées. *A paraître dans C.R. Acad. Sci. Paris, Sér.I* (2001).

[6] E. Faou. Développements asymptotiques dans les coques minces linéairement élastiques. Thèse. *Université de Rennes 1* (2000).

[7] W. T. Koiter. On the foundations of the linear theory of thin elastic shells: I. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Ser. B,* **73** (1970) 169–182.

[8] P. M. Naghdi. Foundations of elastic shell theory. *Progress in Solid Mechanics,* **4**, North-Holland, Amsterdam (1963) 1–90.

[9] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia. *Coques élastiques minces. Propriétés asymptotiques.* Masson, Recherches en mathématiques appliquées, Paris, (1997).

[10] S. L. Slicaru. Quelques résultats dans la théorie des coques linéairement élastiques à surface moyenne uniformément elliptique ou compacte sans bord. Thèse de doctorat. *Université Pierre et Marie Curie, Paris* (1998).

[11] M. I. Vishik, L. A. Lyusternik. Regular degeneration and boundary layers for linear differential equations with small parameter , *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* **20** (1962) 239–364.