Développements asymptotiques dans les coques elliptiques : Equations tridimensionnelles linéarisées

Erwan FAOU

IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France

Résumé. On étudie le développement asymptotique de la solution des équations tridimensionnelles de l'élasticité linéarisée pour un matériau homogène et isotrope dans le cas d'une coque elliptique encastrée tout le long de sa face latérale. On montre que pour des données régulières, cette solution admet un développement asymptotique en puissances de $\varepsilon^{1/2}$ où ε représente la (demi-)épaisseur de la coque. Ce développement contient deux échelles de termes de couches limites : d'une part des termes exponentiellement décroissants en $r/\sqrt{\varepsilon}$ où r est la distance géodésique au bord latéral de la coque, d'autre part des termes exponentiellement décroissants en r/ε comme dans le cas des plaques.

Asymptotic expansions for elliptic shells: Linearized three-dimensionnal equations

Abstract. *We study the asymptotic expansion of the solution of the three-dimensionnal linearized elasticity equations for a homogeneous and isotropic material in the case of an elliptic shell clamped along its whole lateral face. We show that for smooth data, this solution admits an asymptotic expansion in powers of* $\varepsilon^{1/2}$ *where* ε *represents the (half-)thickness of the shell. This expansion contains boundary layer terms with two scales: terms exponentially decaying with respect to* $r/\sqrt{\varepsilon}$ *where* r *denotes the geodesic distance to the lateral boundary of the shell, and terms exponentially decaying with respect to* r/ε *like for plates.*

Abridged english version.

We consider the equations of linear three-dimensional elasticity on a thin elastic shell made with a homogeneous and isotropic material. We suppose that the mean surface S is a smooth compact surface embedded in $\mathbb{R}^3$, with or without boundary. We suppose that the shell is elliptic: this means that S has positive Gaussian curvature, or equivalently that the principal curvatures are everywhere of the same sign. For $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, we define the geometric shell Ω^ε as the image of the application $(P,h) \mapsto P+hN(P)$ from $S\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ to $\mathbb{R}^3$, where $N(P)$ is a normal vector field on S. Thus h is the transverse variable and if x_α are local coordinates on S, (x_α, h) is a local *normal coordinates system* on Ω^ε. The constituting material is characterized

Note présentée par Philippe Ciarlet

by the Lamé coefficients λ and μ. The boundary conditions imposed to the shell are zero traction condition on the upper and lower faces and clamped conditions on the whole lateral face. Let $\boldsymbol{u}$ be the three-dimensional displacement. We denote by u_α its surfacic components and by u_3 its normal component. We make the change of variable $h = \varepsilon x_3$ and we pose $\boldsymbol{u}(\varepsilon)(x_\alpha, x_3) = \boldsymbol{u}(x_\alpha, h)$. Thus $\boldsymbol{u}(\varepsilon) = (u_\alpha(\varepsilon), u_3(\varepsilon))$ is a 1-form field on the manifold $\Omega := S \times (-1, 1)$.

The main result is the following: if the loading forces are smooth and admit an asymptotic expansion in powers of ε on Ω (like the Taylor expansion), then in the case where $\partial S \neq \emptyset$ we have an asymptotic expansion :

$$\boldsymbol{u}(\varepsilon) \simeq \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\big(\boldsymbol{u}^{k/2}(x_\alpha, x_3) + \chi(r)\boldsymbol{V}^{k/2}(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}, s, x_3) + \chi(r)\boldsymbol{\Phi}^{k/2}(\frac{r}{\varepsilon}, s, x_3)\big) \tag{1}$$

where the $\boldsymbol{u}^{k/2}$ are smooth 1-form fields on Ω. The coordinates (r, s) are defined near the boundary of the surface S, and r is the geodesic distance to ∂S while s is the arc length on ∂S. Here, $\boldsymbol{V}^{k/2}(T, s, x_3)$ are terms exponentially decreasing with respect to T and polynomials in x_3. The terms $\boldsymbol{\Phi}^{k/2}(R, s, x_3)$ are exponentially decreasing with respect to R and are similar to the boundary layer terms for plates (see [2]). The function $\chi(r)$ is a cut-off function near the lateral boundary of the shell. If $\partial S = \emptyset$ then the displacement $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ expands in powers of ε. The expansion (1) means that we can estimate the difference in the H^1 norm on Ω between $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ and a partial sum of the expansion by the remaining terms. The first term in the expansion (1) is of the form $\boldsymbol{u}^0(x_\alpha, x_3) = \boldsymbol{\zeta}^0(x_\alpha)$ where $\boldsymbol{\zeta}^0$ is the solution of the membrane problem on S (see [1, 4]). Moreover, we have $V^0_\alpha = 0$ and $V^0_3(T, s, x_3) = Z^0_3(T, s)$ where Z^0_3 is a boundary layer term independent on x_3. As $\boldsymbol{\Phi}^0 = \boldsymbol{\Phi}^{1/2} = 0$, we find that $\|\boldsymbol{u}(\varepsilon) - \boldsymbol{\zeta}^0\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{1/4}$. This inequality is optimal and improves the result in [7].

Recall that $\Gamma(T_1S)$ is the space of 1-form fields on S. Using the expansion (1) and the expansion of the solution $\boldsymbol{z} = (z_\alpha, z_3) \in \Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ of the Koiter model given in the part one (see [4]), we can estimate the difference between the displacement $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{z}$ in $\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)$. Moreover, we define the displacement $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})$ by the formula (see also [5]):

$$U_\alpha(\boldsymbol{z}) = z_\sigma - h(\mathrm{D}_\sigma z_3 + 2b^\alpha_\sigma z_\alpha) \quad \text{and} \quad U_3(\boldsymbol{z}) = z_3 - h\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}) + h^2\frac{\lambda}{2(\lambda + 2\mu)}\rho^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}),$$

where D_σ is the covariant derivative on S, $b_{\alpha\beta}$ the curvature tensor, $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ the change of metric tensor associated to $\boldsymbol{z}$ and $\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ the change of curvature tensor (the repeated indices correspond to the contraction of tensor fields). Then we have the estimate :

$$E[\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})] \leq C\varepsilon^{1/2}E[\boldsymbol{u}]$$

where $E[\boldsymbol{v}]$ is the energy of $\boldsymbol{v}$ associated with the three-dimensional problem on the physical shell Ω^ε. Moreover, this estimate remains the same if we replace $\boldsymbol{z}$ by the solution of others classical two-dimensional models of the form $\boldsymbol{M} + \varepsilon^2\boldsymbol{B}$ where $\boldsymbol{M}$ is the membrane operator and $\boldsymbol{B}$ is a bending operator (see [4]) associated with a bilinear form of the type $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}) \mapsto \frac{1}{3}\int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\tau_{\sigma\delta}(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}S$, with $M^{\alpha\beta\sigma\delta} = \widetilde{\lambda}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\delta} + \mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta}a^{\sigma\beta})$ where $a^{\alpha\beta}$ is the inverse of the metric tensor on S and $\widetilde{\lambda} = 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}$. The operator $\tau_{\alpha\beta}$ is of the form $\tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\beta z_3 + \chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ where $\chi_{\alpha\beta}$ is an operator of order 1 in z_α and 1 in 0 in z_3. Hence for clamped elliptic shell, these models approach the three-dimensional model with the same convergence rate in ε.

1 Le problème tridimensionnel

Soit S une surface compacte orientable dont le bord ∂S peut éventuellement être réduit à $\emptyset$. On suppose que S est $\mathscr{C}^\infty$, et est plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^3$. Dans cette note, on suppose que S est *elliptique* en tout point, c'est-à-dire que sa courbure de Gauss est strictement positive, où encore que ses courbures principales sont partout de même signe. Sur S, on note $a_{\alpha\beta}$ le tenseur métrique et $b_{\alpha\beta}$ le tenseur de courbure dans un système de coordonnées locales. Le tenseur métrique permet de monter et descendre les indices. Par exemple $b^\alpha_\beta = a^{\alpha\sigma} b_{\sigma\beta}$ représente les composantes du tenseur de courbure vu comme champ de tenseurs de type $(1,1)$ sur S. La répétition d'indices covariant et contravariant correspond à la contraction des champs de tenseurs. La surface étant elliptique, on a alors dans tout système de coordonnées locales $b^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \geq c(\xi_1^2 + \xi_2^2)$ pour une constante c non nulle et pour tout couple $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$.

Une coque tridimensionnelle est un objet mince dont la surface moyenne est donnée par S. Pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ assez petit, on définit la coque géométrique comme l'image Ω^ε de l'application $(P, h) \mapsto P + hN(P)$ de $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ dans $\mathbb{R}^3$, où $N(P)$ est une normale unitaire à S en P. L'ouvert Ω^ε possède donc deux faces $\Gamma^\varepsilon_\pm$ images par l'application précédente de $S \times \{\pm\varepsilon\}$ et un bord latéral Γ^ε_0 image de $\partial S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Si x_α est un système de coordonnées locales sur S, alors (x_α, h) est un système de coordonnées locales sur Ω^ε issu du difféomorphisme entre Ω^ε et la variété $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Un tel système de coordonnées s'appelle *système de coordonnées normales*.

Le problème tridimensionnel consiste alors à résoudre les équations de l'élasticité sur Ω^ε pour un matériau homogène et isotrope déterminé par ses coefficients de Lamé λ et μ. On suppose de plus que la coque est encastrée tout le long de sa face latérale Γ^ε_0 et libre sur les faces $\Gamma^\varepsilon_\pm$. Le déplacement $\boldsymbol{u}$ est donc solution des équations suivantes, écrites en coordonnées cartésiennes

$$\begin{array}{rcll} -\partial_j A^{ijk\ell} e_{k\ell}(\boldsymbol{u}) & = & f^i & \text{dans} \quad \Omega^\varepsilon, \\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) & = & 0 & \text{sur} \quad \Gamma^\varepsilon_\pm, \\ \boldsymbol{u} & = & 0 & \text{sur} \quad \Gamma^\varepsilon_0, \end{array} \tag{2}$$

où $A^{ijk\ell} = \lambda\delta^{ij}\delta^{k\ell} + \mu(\delta^{ik}\delta^{j\ell} + \delta^{i\ell}\delta^{jk})$ est le tenseur de rigidité et $e_{ij}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$ est le tenseur des déformations en coordonnées cartésiennes (∂_i est la dérivée par rapport à une coordonnée cartésienne de $\mathbb{R}^3$). L'opérateur $\boldsymbol{T}$ est l'opérateur de traction naturel sur les faces $\Gamma^\varepsilon_\pm$ issu de l'intégration par partie de la formulation variationnelle associée. Les forces appliquées à la coques sont représentées par le champs de vecteurs dont les composantes sont notées f^i.

Il s'agit donc du problème classique de l'élasticité linéarisée posé sur un ouvert mince Ω^ε de $\mathbb{R}^3$ pour un matériau homogène et isotrope. Ce problème admet une unique solution $\boldsymbol{u}$ et son étude dans le cas général fait l'objet d'une vaste littérature (voir par exemple [5, 8, 1, 9]). En particulier, une question naturelle est de se demander comment approcher le déplacement $\boldsymbol{u}$ par un déplacement construit à partir de la solution d'un problème bidimensionnel posé sur la surface moyenne. De nombreux modèles ont été proposés (voir [8] pour un survol de différents modèles employés) mais le plus élégant du point de vue de sa formulation et le plus utilisé est le modèle de Koiter (voir [5]). Ce modèle décrit une petite déformation de la surface moyenne à partir des tenseurs de changement de métrique et de changement de courbure associés.

Lorsque cela est possible, l'utilisation de développements asymptotiques permet de déterminer la performance d'un modèle bidimensionnel dans l'approximation du déplacement tridimensionnel, et de comparer les performances des différents modèles entre eux. Dans le cas où la surface S est elliptique, comme dans le cas des plaques (voir [2]) une telle analyse est possible. Dans [4], on a montré l'existence d'un développement asymptotique à deux échelles pour la solution du modèle de Koiter, et on montre maintenant l'existence d'un développement asymptotique à trois échelles du déplacement $\boldsymbol{u}$.

Dans un système de coordonnées normales, on note u_α les composantes surfaciques du déplacement $\boldsymbol{u}$, et u_3 sa composante transverse. Pour étudier le comportement en ε de la solution $\boldsymbol{u}$, on fait le changement de variable $h = \varepsilon x_3$ et on pose $\boldsymbol{u}(\varepsilon)(x_\alpha, x_3) = \boldsymbol{u}(x_\alpha, h)$ où x_α est un système de coordonnées locales sur S. Le champ de 1-formes $\boldsymbol{u}(\varepsilon) = (u_\alpha(\varepsilon), u_3(\varepsilon))$ est donc défini sur la variété $S \times (-1, 1)$. Si $\boldsymbol{f}$ désigne le chargement, on note aussi $\boldsymbol{f}(\varepsilon)$ le champ de vecteur correspondant sur la variété Ω.

2 Développement asymptotique

On a le résultat suivant (voir [3])

THÉORÈME 1. – *Supposons que la surface S est elliptique, et soit $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ la solution du problème (2) après le changement de variable $h = \varepsilon x_3$. On suppose que le champ de vecteur $\boldsymbol{f}(\varepsilon)$ admet un développement asymptotique en puissances de ε : $\boldsymbol{f}(\varepsilon) \simeq \boldsymbol{f}^0 + \varepsilon \boldsymbol{f}^1 + \sum_{k\geq 2} \varepsilon^k \boldsymbol{f}^k$ où les $\boldsymbol{f}^k$ sont des champs de vecteurs $\mathscr{C}^\infty$ sur $\Omega = S \times (-1, 1)$ indépendants de ε. On note (r, s) un système de coordonnées dans un voisinage du bord ∂S où r est la distance géodésique au bord et s l'abscisse curviligne le long de ∂S. Alors $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ admet un développement asymptotique en puissances de $\varepsilon^{1/2}$:*

$$\boldsymbol{u}(\varepsilon) \simeq \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \big(\boldsymbol{u}^{k/2}(x_\alpha, x_3) + \chi(r) \boldsymbol{V}^{k/2}(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}, s, x_3) + \chi(r) \boldsymbol{\Phi}^{k/2}(\frac{r}{\varepsilon}, s, x_3) \big) \qquad (3)$$

où les $\boldsymbol{u}^{k/2}$ sont des champs de 1-formes $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω, où $\chi(r)$ est une fonction de troncature près de bord, et où les éléments $\boldsymbol{V}^{k/2}(T, s, x_3)$ sont uniformément exponentiellement décroissants en T, polynomiaux de degré k en x_3 et sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. Enfin les termes $\boldsymbol{\Phi}^{k/2}(R, s, x_3)$ sont uniformément exponentiellement décroissants en R. Le développement (3) *est intrinsèque et ne dépend pas du système de coordonnées choisi.*

L'équation (3) signifie que si N est un entier et si $\boldsymbol{S}_N$ désigne la somme partielle d'ordre N de la série (3) alors on a

$$\|\boldsymbol{u}(\varepsilon) - \boldsymbol{S}_N\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \leq C \varepsilon^{(N+1)/2} \big(\|\boldsymbol{u}^{(N+1)/2}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} + \|\chi \boldsymbol{V}^{(N+1)/2}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} + \|\chi \boldsymbol{\Phi}^{(N+1)/2}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \big).$$

En utilisant alors les décroissances exponentielles des termes $\boldsymbol{V}^{k/2}$ et $\boldsymbol{\Phi}^{k/2}$ on montre qu'on a pour tout k, $\|\boldsymbol{u}^{k/2}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \leq C$, $\|\chi \boldsymbol{V}^{k/2}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \leq C\varepsilon^{-1/4}$ et $\|\chi \boldsymbol{\Phi}^{k/2}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \leq C\varepsilon^{-1/2}$. Les estimations ainsi obtenues sont optimales au sens où la borne d'erreur est du même ordre de grandeur en ε que la norme du premier terme négligé. Les termes de couches limites $\boldsymbol{\Phi}^{k/2}$ sont du même type que ceux présents dans le cas des plaques (voir [2]). Enfin le même résultat est valable pour toute autre norme sur Ω qui ait un sens (en particulier, on peut obtenir des estimations dans les variables physiques sur Ω^ε).

Lorsque $\partial S = \emptyset$, on montre que le déplacement tridimensionnel orthogonal aux déplacements rigides admet un développement asymptotique en puissances de ε ne comportant pas de termes de couches limites (voir aussi [10]).

De plus, on peut calculer les premiers termes du développement (3) (voir [3]). Rappelons que $\Gamma(T_1 S)$ désigne l'espace des champs de 1-formes sur S. Un déplacement surfacique $\boldsymbol{z} = (z_\alpha, z_3)$ est donc un élément de l'espace $\Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$. On montre alors qu'on a $\boldsymbol{u}^0(x_\alpha, x_3) = \boldsymbol{\zeta}^0(x_\alpha) \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ où $\boldsymbol{\zeta}^0$ est la solution du problème de membrane $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{f}^0(x_3)\,\mathrm{d}x_3$ avec les conditions aux limites $\zeta_r^0 = \zeta_s^0 = 0$ sur le bord ∂S tout entier. L'opérateur de membrane est l'opérateur associé à la forme bilinéaire $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}) \mapsto \int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\gamma_{\sigma\delta}(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}S$ sur sur $\Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$, où $M^{\alpha\beta\sigma\delta} = \widetilde{\lambda} a^{\alpha\beta}a^{\sigma\delta} + \mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta}a^{\beta\sigma})$ avec $\widetilde{\lambda} = 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}$. Le tenseur $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha z_\beta + \mathrm{D}_\beta z_\alpha) - b_{\alpha\beta}z_3$ est le tenseur de changement de courbure associé à $\boldsymbol{z}$ (on note D_α la dérivée covariante sur la surface S). Dans le cas où S est elliptique, cet opérateur est elliptique de multidegré $(2, 2, 0)$ et les conditions de Dirichlet sur tout le bord le recouvrent (voir [4]).

De même, le terme $\boldsymbol{u}^{1/2}(x_\alpha, x_3) = \boldsymbol{\zeta}^{1/2}(x_\alpha)$ où $\boldsymbol{\zeta}^{1/2}$ est la solution d'un problème de membrane avec des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes. Le premier terme de couche limite en r/ε non nul est le terme $\boldsymbol{\Phi}^1$ (soit donc $\boldsymbol{\Phi}^0 = \boldsymbol{\Phi}^{1/2} = 0$). Enfin le premier terme $\boldsymbol{V}^0$ de couche limite en $r/\sqrt{\varepsilon}$ vérifie $V_r^0 = V_s^0 = 0$ et $V_3^0(T, s, x_3) = Z_3^0(T, s)$ est indépendant de x_3. Le terme $\boldsymbol{V}^{1/2}$ s'écrit alors $V_r^0(T, s, x_3) = Z_r^{1/2}(T, s) - x_3\partial_T Z_3^0(T, s)$, $V_s^{1/2}(T, s, x_3) = Z_s^{1/2}(T, s)$, et $V_3^{1/2}(T, s, x_3) = Z_3^{1/2}(T, s)$ où $\boldsymbol{Z}^{1/2}$ est indépendant de x_3. Ainsi on peut écrire dans un voisinage du bord

$$\boldsymbol{u}(\varepsilon) \simeq \begin{pmatrix} \zeta_r^0 \\ \zeta_s^0 \\ \zeta_3^0 + Z_3^0 \end{pmatrix} + \varepsilon^{1/2} \begin{pmatrix} \zeta_r^{1/2} + Z_r^{1/2} - x_3\partial_T Z_3^0 \\ \zeta_s^{1/2} + Z_s^{1/2} \\ \zeta_3^{1/2} + Z_3^{1/2} \end{pmatrix} + \cdots . \tag{4}$$

On déduit des équations précédentes qu'on a l'estimation $\|\boldsymbol{u}(\varepsilon) - \boldsymbol{\zeta}^0\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^2 \times \mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{1/4}$. Ce résultat améliore celui figurant dans [7]. On retrouve de plus la convergence de $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ vers $\boldsymbol{\zeta}^0$ dans la norme associée au problème membranaire (voir [1]).

3 Comparaisons avec des modèles bidimensionnels

On peut comparer les termes du développement asymptotique (3), avec les termes du développement asymptotique de la solution du modèle de Koiter correspondant au second membre $\boldsymbol{g}^0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{f}^0(x_3)\,\mathrm{d}x_3$. Soit $\boldsymbol{z} \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ la solution des équations

$$(\boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{g}^0 \quad \text{dans} \quad S \quad \text{et} \quad (z_r, z_s, z_3, \partial_r z_3)\big|_{\partial S} = 0, \tag{5}$$

où $\boldsymbol{M}$ est l'opérateur de membrane et $\boldsymbol{F}$ l'opérateur de flexion du modèle de Koiter (voir [5]). Alors d'après le résultat de [4] le déplacement $\boldsymbol{z}$ admet un développement asymptotique en puissance de $\varepsilon^{1/2}$ comportant des termes indépendant de ε notés $\boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ dans [4] et des termes de couches limites exponentiellement décroissant en $r/\sqrt{\varepsilon}$ notés $\boldsymbol{Z}^{k/2}$ dans [4]. On peut alors comparer le développement de $\boldsymbol{z}$ avec celui de $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$. Il apparaît que dans l'équation (4) les termes $\boldsymbol{\zeta}^0$, $\boldsymbol{\zeta}^{1/2}$, $\boldsymbol{Z}^0$, $Z_r^{1/2}$ et $Z_s^{1/2}$ sont communs ceux figurant dans le développement de $\boldsymbol{z}$. En revanche les termes $Z_3^{1/2}$ diffèrent. On peut ainsi obtenir des estimations en toute norme en $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ et $\boldsymbol{z}$ où un déplacement construit à partir de $\boldsymbol{z}$. On a par exemple $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{z}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \leq C\varepsilon^{1/4}$.

Enfin, on définit le déplacement $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})$ par l'équation (voir aussi [5])

$$U_\alpha(\boldsymbol{z}) = z_\sigma - h(\mathrm{D}_\sigma z_3 + 2b_\sigma^\alpha z_\alpha) \quad \text{et} \quad U_3(\boldsymbol{z}) = z_3 - h\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) + h^2\frac{\lambda}{2(\lambda+2\mu)}\rho_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}),$$

où $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ est le tenseur de changement de métrique sur S et où $\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\beta z_3 - b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} z_3 + \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\sigma z_\sigma + b_\alpha^\sigma \mathrm{D}_\beta z_\sigma$ est le tenseur de changement de courbure. Alors on a

$$E[\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})] \leq C\varepsilon^{1/2} E[\boldsymbol{u}]$$

où $E[\boldsymbol{v}]$ est l'énergie associée au problème tridimensionnel en variables physiques: $E[\boldsymbol{v}] = \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijk\ell} e_{ij}(\boldsymbol{v}) e_{k\ell}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V$ (voir l'équation (2)). Remarquons que $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})$ est un déplacement *intrinsèque* sur Ω^ε et ne dépend pas du système de coordonnées choisi. Cette estimation se compare à celle figurant dans [5] et améliore le résultat de [6] pour les coques elliptiques.

De plus, en utilisant les résultat donnés dans [4], on montre que les estimations précédentes sont encore valables si on remplace $\boldsymbol{z}$ par la solution d'un autre modèle bidimensionnel du type de celui de Koiter, de la forme $\boldsymbol{M} + \varepsilon^2\boldsymbol{B}$ où l'opérateur $\boldsymbol{B}$ est associé une la forme bilinéaire sur $\Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ du type $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta}) \mapsto \int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\tau_{\sigma\delta}(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}V$ où $\tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\beta z_3 + \chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ avec $\chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ un opérateur de degré 1 en z_α et 0 en z_3. Pour une coque elliptique encastrée, tous ces modèles bidimensionnels approchent la solution tridimensionnelle avec les mêmes taux de convergences en ε et ont ainsi des performances équivalentes.

Références

[1] P. G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. III, Theory of shells.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam (2000).

[2] M. Dauge, I. Gruais. Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate. I: Optimal error estimates. *Asymptot. Anal.* **13** (1996) 167–197.

[3] E. Faou. Développements asymptotiques dans les coques minces linéairement élastiques. Thèse. *Université de Rennes 1* (2000).

[4] E. Faou. Développements asymptotiques dans les coques elliptiques : Modèle de Koiter. *A paraître dans C.R. Acad. Sci. Paris, Sér.I* (2001).

[5] W. T. Koiter. On the foundations of the linear theory of thin elastic shells: I. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Ser. B,* **73** (1970) 169–182.

[6] V. Lods, C. Mardare. Asymptotic justification of the Kirchhoff-Love assumptions for a linearly elastic clamped shell. *J. Elasticity,* **58** (2000) 105–154.

[7] C. Mardare. Asymptotic analysis of linearly elastic shells: error estimates in the membrane case. *Asymptot. Anal.* **17** (1998) 31–51.

[8] P. M. Naghdi. Foundations of elastic shell theory. *Progress in Solid Mechanics,* **4**, North-Holland, Amsterdam (1963) 1–90.

[9] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia. *Coques élastiques minces. Propriétés asymptotiques.* Masson, Recherches en mathématiques appliquées, Paris, (1997).

[10] S. L. Slicaru. Quelques résultats dans la théorie des coques linéairement élastiques à surface moyenne uniformément elliptique ou compacte sans bord. Thèse de doctorat. *Université Pierre et Marie Curie, Paris* (1998).