Problèmes mathématiques de la mécanique / *Mathematical Problems in Mechanics*

Elasticité linéarisée tridimensionnelle pour une coque mince : Résolution en série formelle en puissances de l'épaisseur

Erwan FAOU

IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France

Résumé. Les équations tridimensionnelles de l'élasticité linéaire sont posées sur un domaine de $\mathbb{R}^3$ définissant une coque mince d'épaisseur 2ε . On considère les équations à l'intérieur ainsi que les conditions de traction nulle sur les faces supérieure et inférieure de la coque. Après un changement d'échelle en la variable transverse, les coefficients de l'opérateur d'élasticité sont développés en série entière en ε à coefficients intrinsèques par rapport à la surface moyenne de la coque. On définit alors un problème en série formelle en ε associé aux équations tridimensionnelles. Le principal résultat est la réduction de ce problème à des équations en série formelle posées sur la surface moyenne de la coque, et faisant intervenir des opérateurs intrinsèques.

Three-dimensional linearized elasticity on a thin shell: Formal series solution in power of the thickness

Abstract. *The three-dimensional equations of elasticity are posed on a domain of* $\mathbb{R}^3$ *defining a thin shell of thickness* 2ε *. Only the inner equations together with traction conditions on the upper and lower faces of the shell are considered. After a scaling on the transverse variable, the coefficients of the elasticity operator admit power series expansions in* ε *with intrinsic coefficients with respect to the middle surface of the shell. This leads to define a formal series problem in* ε *associated to the three-dimensional equations. The main result is the reduction of this problem to formal series equations posed on the middle surface of the shell, with intrinsic operators.*

Abridged english version. We consider the equations of linear three-dimensional elasticity on a thin elastic shell made with a homogeneous and isotropic material, with zero traction condition on the upper and lower faces. The shell is represented by the closure of the manifold $S\times(-\varepsilon,\varepsilon)$, where S is the middle surface and ε the half-thickness. This representation leads to write the equations in *normal coordinates* $(x_\alpha, x_3^\varepsilon)$ where $\{x_\alpha\}$ denotes a coordinate system on S and $x_3^\varepsilon \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ is the distance from the middle surface.

We then make the classical scaling $x_3^\varepsilon = \varepsilon x_3$, which sets new equations on the manifold $\hat\Omega := S\times(-1,1)$. A first result shows that the three-dimensional operator on $\hat\Omega$ has a power series expansion in ε with *intrinsic* coefficients.

Note présentée par Philippe Ciarlet

This yields to consider a new problem posed in the space of *formal series* in ε with tensorial coefficients on $\hat{\Omega}$. If E and F are two function spaces, and if $a[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k a^k$ and $b[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k b^k$ are two formal series with coefficients $a^k \in \mathcal{L}(E,F)$ and $b^k \in E$, then the product $c[\varepsilon] = a[\varepsilon]b[\varepsilon]$ is the formal series $c[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k c^k$ defined by $c^k = \sum_{\ell=0}^{k} a^\ell b^{k-\ell} \in F$.

The principal result of this note is the reduction of the former three-dimensional problem to a formal series equation posed on the middle surface of the shell. If $\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{z}^k$ is a formal series with coefficients $\boldsymbol{z}^k$ independent of x_3 fulfilling the condition

$$\boldsymbol{A}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \boldsymbol{G}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon], \qquad (*)$$

then we can build a 1-form field formal series $\boldsymbol{w}[\varepsilon] = \boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ solution of the three-dimensionnal equation. Here $\boldsymbol{A}[\varepsilon]$ and $\boldsymbol{G}[\varepsilon]$ are formal series with operator coefficients, taking values in tensor spaces on the manifold S, $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$ and $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ are formal series operators with values in tensor spaces on $\hat{\Omega}$, and $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ is a formal series whose definition is related to the loads in the three-dimensional problem (see Theorem 2.1 below).

The first operator $\boldsymbol{A}^0$ of the formal series $\boldsymbol{A}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{A}^k$ is the classical *membrane* operator (see [1, 6, 7]), the operator $\boldsymbol{A}^1$ vanishes and the expression of the operator $\boldsymbol{A}^2$ is given, together with the expression of the first operators appearing in the formal series $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$, $\boldsymbol{G}[\varepsilon]$ and $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$. The expression of $\boldsymbol{A}^2$ can be linked with the formal computation of John [5] and with the flexural part of the Koiter operator [6, 8].

This reduction is valid for all geometries. This is the first step in the direction of finding the asymptotic expansion of the displacement. The existence of solution to the reduced problem $(*)$ is not studied in this note. Results in this direction exist for plates (see [2]) and for clamped elliptic shells and convex arches (see [3]).

1 Les équations de l'élasticité sur une coque

Soit S une surface compacte orientable dont le bord ∂S peut éventuellement être réduit à $\emptyset$. On suppose S plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^3$. Pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ assez petit, on définit la coque géométrique comme l'adhérence de l'ouvert $\mathcal{C}^\varepsilon$ image de l'application $\Phi^\varepsilon : S \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ qui à (P, x_3^ε) fait correspondre le point $P + x_3^\varepsilon N(P)$ où $N(P)$ est une normale unitaire à la coque. Si un système de coordonnées $\{x_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ est choisi sur la surface, le système de coordonnées $(x_\alpha, x_3^\varepsilon)$ induit par Φ^ε sur un ouvert de $\mathcal{C}^\varepsilon$ est appelé *système de coordonnées normales.* Enfin, on note $S_{x_3^\varepsilon}$ l'image de S par l'application $\Phi^\varepsilon(\,\cdot\,, x_3^\varepsilon)$ pour x_3^ε fixé.

On suppose que $\overline{\mathcal{C}}^\varepsilon$ est rempli d'un matériau élastique *homogène et isotrope* formant ainsi une coque soumise à des forces volumiques décrites par un champ de vecteurs noté $\boldsymbol{f} = f^i \frac{\partial}{\partial t^i}$ dans un système de coordonnées cartésiennes $\{t^i\}$ de $\mathbb{R}^3$. Si $\boldsymbol{u}$ est un champ de déplacement, le tenseur linéarisé des déformations associé s'écrit en coordonnées cartésiennes $e_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ où ∂_i désigne la dérivation par rapport à t^i. Enfin, la donnée du matériau équivaut à la donnée des coefficients de Lamé $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, auxquels est associé le tenseur de rigidité $\boldsymbol{A}$ dont les composantes contravariantes dans le système $\{t^i\}$ s'écrivent $A^{ijk\ell} = \lambda\delta^{ij}\delta^{k\ell} + \mu(\delta^{ik}\delta^{j\ell} + \delta^{i\ell}\delta^{jk})$, où δ^{ij} désigne le symbole de

Kronecker valant 1 si $i=j$ et 0 sinon. La contraction des champs de tenseurs correspond à la sommation des indices répétés. On considère alors les équations

$$-A^{ijk\ell}\partial_j e_{kl}(\boldsymbol{u}) = f^i \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}^\varepsilon \qquad \text{et} \qquad B^i(\boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{sur} \quad S_{\pm\varepsilon}, \tag{1}$$

où $B^i(\boldsymbol{u})$ désigne l'opérateur de traction naturel sur les faces supérieures et inférieures de la coque, provenant d'une intégration par partie dans la forme bilinéaire associée : $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \mapsto \int_{\mathcal{C}^\varepsilon} A^{ijk\ell} e_{ij}(\boldsymbol{u}) e_{k\ell}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t^1\mathrm{d}t^2\mathrm{d}t^3$. C'est le problème classique de l'élasticité linéarisée posée en coordonnées cartésiennes sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$ qui a la forme d'une coque (mais ici sans conditions aux limites sur le bord latéral). On effectue alors un changement de coordonnées pour passer en coordonnées normales $(x_\alpha, x_3^\varepsilon)$. Le déplacement $\boldsymbol{u}$ se représente par les trois composantes (u_α, u_3). On note T_1S_0 le fibré cotangent sur S_0, et $\Gamma(T_1S_0)$ l'espace des champs de 1-formes sur la surface moyenne S_0. L'espace $\Gamma(T_1S_0)\times \mathscr{C}^\infty(S_0)$, que nous noterons $\Sigma(S_0)$ dans la suite, est donc l'espace des dépacements indépendant de x_3, et si $\boldsymbol{u}$ est un champ de 1-formes $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathcal{C}^\varepsilon$, alors $(u_\alpha, u_3) \in \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Sigma(S_0)\big)$. De tels types de représentations existent pour tous les champs de tenseurs existant sur la coque (voir [3]). Dans la suite, les indices grecs sont toujours considérés comme des indices de tenseurs surfaciques. Pour des raisons de simplicité dans les calculs (voir [7, 3]), on effectue le changement d'inconnue $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\mu}^{-1}(x_3^\varepsilon)(\boldsymbol{u})$ où l'opérateur $\boldsymbol{\mu}(x_3^\varepsilon)$ provient du *shifter* et est défini par l'équation

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\mu}(x_3^\varepsilon)(\boldsymbol{w}) \quad \Leftrightarrow \quad u_\alpha = w_\alpha - x_3^\varepsilon b_\alpha^\beta w_\beta, \quad \text{et} \quad u_3 = w_3,$$

où (b_α^β) est la seconde forme fondamentale sur la surface S_0. Il est clair que pour $\varepsilon \le \varepsilon_0$ assez petit, cet opérateur est inversible. De plus, il envoie l'espace des champs de 1-formes sur la coque dans lui-même. Avec ce changement d'inconnue, on montre que le problème (1) s'écrit en coordonnées normales

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}(x_\alpha, x_3^\varepsilon; \mathrm{D}_\alpha, \partial_3^\varepsilon)(\boldsymbol{w}) = -\boldsymbol{f} \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}^\varepsilon, \\ \boldsymbol{B}(x_\alpha, x_3^\varepsilon; \mathrm{D}_\alpha, \partial_3^\varepsilon)(\boldsymbol{w}) = 0 \quad \text{sur} \quad S_{\pm\varepsilon}, \end{cases}$$

où D_α est la dérivée covariante sur la surface moyenne S_0 et ∂_3^ε la dérivée par rapport à x_3^ε sur $\mathcal{C}^\varepsilon$. Les opérateurs

$$\boldsymbol{L} : \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Sigma(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Sigma(S_0)\big) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B} : \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Sigma(S_0)\big) \to \Sigma(S_{\pm\varepsilon}),$$

sont des opérateurs intrinsèques. On fait alors le changement de variable $x_3^\varepsilon = \varepsilon x_3$. Les nouvelles équations sont donc posées sur la variété $\hat{\Omega} := S \times I$ où I est l'intervalle $(-1,1)$. On appelle système de coordonnées normales sur $\hat{\Omega}$ tout système (x_α, x_3) provenant d'un système de coordonnées normales sur $\mathcal{C}^\varepsilon$. On note $\Gamma_\pm$ les faces supérieure et inférieure de $\hat{\Omega}$.

Pour tout $\varepsilon \le \varepsilon_0$ fixé, on appelle alors *opérateur d'élasticité tridimensionnel sur la variété* $\hat{\Omega}$ l'opérateur $\big(\boldsymbol{L}[\varepsilon], \boldsymbol{B}[\varepsilon]\big)$ avec

$$\boldsymbol{L}[\varepsilon] : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Sigma(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big(I, \Sigma(S_0)\big) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B}[\varepsilon] : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Sigma(S_0)\big) \to \Sigma(\Gamma_\pm)$$

les opérateurs obtenus à partir des opérateurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{B}$ en effectuant le changement d'échelle $x_3^\varepsilon = \varepsilon x_3$. On a donc dans tout système de coordonnées normales

$$\big(\boldsymbol{L}[\varepsilon], \boldsymbol{B}[\varepsilon]\big)(x_\alpha, x_3; \mathrm{D}_\alpha, \partial_3) = (\boldsymbol{L}, \boldsymbol{B})(x_\alpha, \varepsilon x_3; \mathrm{D}_\alpha, \varepsilon^{-1}\partial_3), \tag{2}$$

où ∂_3 est la dérivée par rapport à x_3 sur $\hat{\Omega}$. Avec cette définition, on montre le théorème suivant :

Théorème 1.1. – *Les opérateurs* $\boldsymbol{L}[\varepsilon]$ *et* $\boldsymbol{B}[\varepsilon]$ *ont des coefficients développables en séries entières en* ε *pour* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ *, et s'écrivent*

$$\boldsymbol{L}[\varepsilon] = \varepsilon^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \boldsymbol{L}^k \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{B}[\varepsilon] = \varepsilon^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \boldsymbol{B}^k. \tag{3}$$

Les expressions des opérateurs sont données dans [3], la plupart des calculs nécessaires se trouvant aussi dans [7]. De plus, on a $\boldsymbol{L}^0 = \boldsymbol{\ell} \circ \partial_{33}$ et $\boldsymbol{B}^0 = \boldsymbol{\ell} \circ \partial_3$ où $\boldsymbol{\ell}$ est défini par $\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{w}) = \big(\mu w_\alpha, (\lambda + 2\mu) w_3\big)$. Les équations (3) permettent alors d'associer aux opérateurs $\boldsymbol{L}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{B}[\varepsilon]$ un problème en série formelle. Auparavant, rappelons que si E et F sont deux espaces de fonctions, si $a[\varepsilon] = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k a^k$ est une série formelle en ε à coefficients $a^k \in \mathcal{L}(E, F)$, et si $b[\varepsilon] = \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^\ell b^\ell$ est une série formelle à coefficients $b^k \in F$, alors la série formelle $c[\varepsilon] = a[\varepsilon] b[\varepsilon]$ est définie par l'équation $c[\varepsilon] = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n c^n$ avec pour tout n , $c^n = \sum_{\ell=0}^{n} a^\ell b^{n-\ell} \in F$.

Soit $\boldsymbol{f}[\varepsilon] = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{f}^k$ une série formelle en ε à coefficients dans $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Sigma(S_0)\big)$. On appelle *solution tridimensionnelle en série formelle* toute série formelle $\boldsymbol{w}[\varepsilon] = \sum_k \varepsilon^k \boldsymbol{w}^k$ à coefficients dans $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Sigma(S_0)\big)$ telle que les équations suivantes soient satisfaites :

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}[\varepsilon]\boldsymbol{w}[\varepsilon] = -\boldsymbol{f}[\varepsilon], \\ \boldsymbol{B}[\varepsilon]\boldsymbol{w}[\varepsilon] = 0, \end{cases} \tag{4}$$

où les produits sont écrits au sens des séries formelles. Dans la pratique, la série formelle $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ est issue du problème initial. Si le champ de force $\boldsymbol{f}$ admet un développement asymptotique en ε , $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ admet alors une définition naturelle (voir [3]).

2 Solution en séries formelles

Nous appelons *générateur surfacique* tout élément $\boldsymbol{z} = (z_\alpha, z_3)$ de l'espace $\Sigma(S_0)$. Nous définissons les *opérateurs surfaciques* comme les opérateurs intrinsèques sur S_0 agissant sur les générateurs surfaciques, et ne faisant intervenir que la première et la seconde forme fondamentale sur S_0 . Un opérateur surfacique est donc indépendant de x_3 et agit aussi naturellement sur l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Sigma(S_0)\big)$. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 2.1. – *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *, il existe :*

a) *un opérateur* $\boldsymbol{V}^k : \Sigma(S_0) \to \mathscr{C}^\infty\big(I, \Sigma(S_0)\big)$ *polynomial en* x_3 *à coefficients opérateurs surfacique, et s'annulant sur* S_0 *pour* $k \geq 1$ *.*

b) *un opérateur surfacique* $\boldsymbol{A}^k : \Sigma(S_0) \to \Sigma(S_0)$ *,*

c) *un opérateur* $\boldsymbol{Q}^k : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Sigma(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big(I, \Sigma(S_0)\big)$ *composition d'opérateurs surfacique et d'intégrations en* x_3 *, et s'annulant sur* S_0 *,*

d) *un opérateur* $\boldsymbol{G}^k : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Sigma(S_0)\big) \to \Sigma(S_0)$ *composition d'opérateurs surfacique et d'intégrations en* x_3 *sur l'intervalle* I *,*

tels que le quadruplet de séries formelles $\big(\boldsymbol{V}[\varepsilon], \boldsymbol{Q}[\varepsilon], \boldsymbol{A}[\varepsilon], \boldsymbol{G}[\varepsilon]\big)$ *possède les propriétés suivantes :*

(i) *Si* $\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{z}^k$ *est une série formelle à coefficients générateurs surfaciques satisfaisant l'équation*

$$\boldsymbol{A}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \boldsymbol{G}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon], \tag{5}$$

alors la série formelle $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ *définie par*

$$\boldsymbol{w}[\varepsilon] = \boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon], \tag{6}$$

est une solution tridimensionnelle en série formelle du problème (4)*.*

(ii) *Réciproquement, si* $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ *est une solution tridimensionnelle en série formelle du problème* (4)*, alors la série formelle* $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ *à coefficients générateurs surfaciques définie par l'équation*

$$\boldsymbol{z}[\varepsilon] := \boldsymbol{w}[\varepsilon]\big|_{x_3=0}\,, \tag{7}$$

satisfait les équations (5) *et* (6)*.*

Ce théorème est vrai quelle que soit la géométrie de la surface moyenne S_0. Dans l'optique de considérer les équations de l'élasticité linéaire avec conditions aux limites sur le bord latéral, c'est un premier pas dans l'étude du développement asymptotique complet du déplacement : voir [2] pour le cas des plaques, où l'adjonction d'une échelle de couches limites est nécessaire, et voir [3] pour le développement complet dans le cas des coques elliptiques encastrées et des arches convexes.

Voici les expressions des premiers termes des séries formelles ci-dessus. Le tenseur métrique $a_{\alpha\beta}$ sur S_0 permet de monter et descendre les indices. On pose $\theta_\sigma(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\sigma z_3 + b^\alpha_\sigma z_\alpha$, $\kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha\theta_\beta + \mathrm{D}_\beta\theta_\alpha)(\boldsymbol{z})$ et $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha z_\beta + \mathrm{D}_\beta z_\alpha) - b_{\alpha\beta} z_3$. La série formelle $\boldsymbol{A}[\varepsilon]$ a pour premiers termes $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{0}$, où $\boldsymbol{M}$ est l'opérateur surfacique de *membrane* (voir [1, 6, 7, 8]) à valeurs dans l'espace des générateurs surfaciques, et défini par l'équation

$$\begin{cases} M_\sigma(\boldsymbol{z}) := -\widetilde{\lambda}\mathrm{D}_\sigma\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}) - 2\mu\mathrm{D}_\alpha\gamma^\alpha_\sigma(\boldsymbol{z}), \\ M_3(\boldsymbol{z}) := -\widetilde{\lambda} b^\alpha_\alpha\gamma^\beta_\beta(\boldsymbol{z}) - 2\mu b^\alpha_\beta\gamma^\beta_\alpha(\boldsymbol{z}). \end{cases} \tag{8}$$

avec $\widetilde{\lambda} = 2\lambda\mu(\lambda+2\mu)^{-1}$. La série formelle $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$ a pour premiers termes

$$\boldsymbol{V}^0 = \mathscr{I}, \qquad V^1_\sigma(\boldsymbol{z}) = -x_3\theta_\sigma(\boldsymbol{z}) \quad \text{et} \quad V^1_3(\boldsymbol{z}) = -x_3 p\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}),$$

où $p = \lambda(\lambda+2\mu)^{-1}$, et où $\mathscr{I}$ est le plongement canonique $\mathscr{I} : \Sigma(S_0) \to \mathscr{C}^\infty\big(I, \Sigma(S_0)\big)$. De plus, on a

$$V^2_\sigma(\boldsymbol{z}) = \frac{x_3^2}{2} p\mathrm{D}_\sigma\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}) \quad \text{et} \quad V^2_3(\boldsymbol{z}) = \frac{x_3^2}{2}\big(p\kappa^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}) + \frac{p}{2\mu}M_3(\boldsymbol{z})\big).$$

La série formelle $\boldsymbol{G}[\varepsilon]$ a pour premier terme $\boldsymbol{G}^0(\boldsymbol{f}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \boldsymbol{f}(x_3)\,\mathrm{d}x_3$. Dans la suite, on pose $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{\ell}^{-1}\big(\mathscr{I}\boldsymbol{G}^0(\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{f}\big)$ où $\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{u}) = (\mu u_\sigma, (\lambda+2\mu)u_3)$. La série formelle $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ a pour premiers termes les opérateurs $\boldsymbol{Q}^0$ et $\boldsymbol{Q}^1$ égaux aux opérateurs nuls, et l'opérateur $\boldsymbol{Q}^2$ donné par la formule $\boldsymbol{Q}^2(\boldsymbol{f}) = \int_0^{x_3}\big(\int_{-1}^u \boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})(t)\,\mathrm{d}t\big)\mathrm{d}u$. L'opérateur $\boldsymbol{G}^1$ s'écrit alors $G^1_\sigma(\boldsymbol{f}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1\big(\int_{-1}^{x_3}(\lambda\mathrm{D}_\sigma m_3 - \mu b^\alpha_\sigma m_\sigma)(\boldsymbol{f})du\big)\,\mathrm{d}x_3$ et $G^1_3(\boldsymbol{f}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1\big(\int_{-1}^{x_3}(\mu\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{m}) - \mu b^\alpha_\alpha m_3)(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\big)\,\mathrm{d}x_3$. Enfin, l'opérateur $\boldsymbol{A}^2$ est donné par les équations

$$\begin{aligned} A^2_3 = {} & \tfrac{2}{3}\mu p\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha\kappa^\nu_\nu + \tfrac{2}{3}\mu\mathrm{D}^\sigma\mathrm{D}_\alpha\kappa^\alpha_\sigma + \mu p c^\alpha_\alpha\kappa^\nu_\nu + \tfrac{4}{3}\mu c^\alpha_\beta\kappa^\beta_\alpha + \tfrac{1}{3}\mu p(p-2q)b^\alpha_\alpha b^\beta_\beta\kappa^\nu_\nu \\ & + \tfrac{2}{3}\mu(p-q)b^\alpha_\alpha b^\nu_\beta\kappa^\beta_\nu - \tfrac{1}{3}\mu p^2 b^\beta_\beta\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma^\nu_\nu - \tfrac{2}{3}\mu p\mathrm{D}^\sigma\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\sigma\gamma^\nu_\nu - \tfrac{1}{3}\mu p b^\alpha_\beta\mathrm{D}^\beta\mathrm{D}_\alpha\gamma^\nu_\nu \\ & - \tfrac{2}{3}\mu\mathrm{D}^\sigma\gamma^\alpha_\nu\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma - \tfrac{2}{3}\mu\mathrm{D}^\sigma b^\alpha_\nu\mathrm{D}_\alpha\gamma^\nu_\sigma + \tfrac{2}{3}\mu\mathrm{D}^\sigma\mathrm{D}_\alpha\,\mathrm{Sb}(\omega)^\alpha_\sigma + \tfrac{2}{3}\mu p(2q-p)b^\nu_\nu c^\alpha_\alpha\gamma^\beta_\beta \\ & - 2\mu p d^\alpha_\alpha\gamma^\nu_\nu + \tfrac{2}{3}\mu(2q-p)b^\alpha_\alpha c^\nu_\beta\gamma^\beta_\nu - 2\mu d^\alpha_\beta\gamma^\beta_\alpha + \tfrac{1}{3}p\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha M_3 \\ & + \tfrac{1}{3}\mu p^2(\tfrac{1}{2\mu} - \tfrac{2}{\lambda})b^\nu_\nu b^\alpha_\alpha M_3 + \tfrac{1}{2}p c^\alpha_\alpha M_3, \end{aligned} \tag{9}$$

et

$$
\begin{aligned}
A^2_\sigma = & -\tfrac{2}{3}\mu b^\nu_\nu \mathrm{D}_\alpha \kappa^\alpha_\sigma - \tfrac{2}{3}\mu p b^\beta_\beta \mathrm{D}_\sigma \kappa^\nu_\nu + \tfrac{1}{2}\lambda pq \mathrm{D}_\sigma (b^\alpha_\alpha \kappa^\nu_\nu) + \tfrac{2}{3}\lambda q \mathrm{D}_\sigma b^\alpha_\beta \kappa^\beta_\alpha \\
& + \tfrac{1}{3}\mu p \mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\sigma \kappa^\nu_\nu + \tfrac{2}{3}\mu b^\alpha_\beta \mathrm{D}_\alpha \kappa^\beta_\sigma + \tfrac{2}{3}\mu \kappa^\alpha_\beta \mathrm{D}_\alpha b^\beta_\sigma - \tfrac{1}{3}\mu \mathrm{D}_\alpha b^\beta_\sigma \mathrm{D}^\alpha \theta_\beta \\
& + \tfrac{1}{3}\mu \mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\beta \mathrm{D}^\beta \theta_\sigma - \tfrac{1}{6}\lambda pq \mathrm{D}_\sigma \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma^\nu_\nu - \tfrac{1}{3}\mu p \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\sigma \gamma^\nu_\nu - \lambda pq \mathrm{D}_\sigma (c^\alpha_\alpha \gamma^\nu_\nu) \\
& - \lambda q \mathrm{D}_\sigma (c^\alpha_\beta \gamma^\beta_\alpha) + \tfrac{2}{3}\mu p b^\beta_\beta \mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\sigma \gamma^\nu_\nu - \tfrac{2}{3}\mu p b^\alpha_\beta \mathrm{D}_\alpha b^\beta_\sigma \gamma^\nu_\nu - \tfrac{2}{3}\mu b^\alpha_\beta \mathrm{D}_\alpha b^\beta_\delta \gamma^\delta_\sigma \\
& - \tfrac{2}{3}\mu p b^\alpha_\beta \gamma^\nu_\nu \mathrm{D}_\alpha b^\beta_\sigma - \tfrac{4}{3}\mu b^\delta_\nu \gamma^\alpha_\delta \mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma + \tfrac{2}{3}\mu b^\alpha_\nu \gamma^\delta_\sigma \mathrm{D}_\alpha b^\nu_\delta + \tfrac{2}{3}\mu b^\beta_\beta \gamma^\alpha_\nu \mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma \\
& + \tfrac{2}{3}\mu b^\nu_\nu b^\alpha_\beta \mathrm{D}_\alpha \gamma^\beta_\sigma + \tfrac{2}{3}\mu b^\beta_\beta \mathrm{D}_\alpha \Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma} - \tfrac{4}{3}\mu \mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\nu \Lambda^{\nu\cdot}_{\cdot\sigma} - \tfrac{2}{3}\mu \Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\nu} \mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma \\
& + \tfrac{2}{3}\mu \Lambda^{\beta\cdot}_{\cdot\sigma} \mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\beta + \tfrac{1}{2}p^2 \mathrm{D}_\sigma (b^\alpha_\alpha M_3) - \tfrac{1}{3}p b^\nu_\nu \mathrm{D}_\sigma M_3 + \tfrac{1}{6}p \mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\sigma M_3,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

avec $q = 2\mu(\lambda+2\mu)^{-1}$, $\mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(b^\sigma_\alpha \omega_{\beta\sigma} + b^\sigma_\beta \omega_{\alpha\sigma})$ où $\omega_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha u_\beta - \mathrm{D}_\beta u_\alpha)$, et $\Lambda_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(b^\sigma_\alpha \mathrm{D}_\sigma u_\beta - b^\alpha_\beta \mathrm{D}_\alpha u_\sigma)$. La notation $\Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = a^{\alpha\sigma}\Lambda_{\sigma\beta}$ est employée car le tenseur $\Lambda_{\alpha\beta}$ n'est pas symétrique. Les égalités précédentes sont des égalités d'opérateurs surfaciques. Ces expressions se comparent à celles figurant dans John [5] où un modèle non linéaire plus complexe est étudié. En particulier, la partie dépendant du tenseur $\kappa_{\alpha\beta}$ dans l'opérateur $\boldsymbol{A}^2$ se retrouve dans les équations de John.

Si on note $\boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F}$ l'opérateur associé au modèle de Koiter (voir [6]), où $\boldsymbol{M}$ est l'opérateur de membrane et $\boldsymbol{F}$ l'opérateur de flexion, rappelons que $\boldsymbol{F}$ décrit le comportement de la limite du déplacement tridimensionnel dans le cas des coques "en flexion" (voir [1, 8]). Les termes d'ordres 3 et 4 en z_3 de l'opérateur A^2_3 sont les mêmes que ceux de F_3. De plus, dans certains cas comme celui des arches (voir [3, 4]), la restriction de $\boldsymbol{A}^2$ à l'espace des déplacements inextensionnels coincide avec la restriction de $\boldsymbol{F}$ à ce même espace.

Références

[1] P. G. Ciarlet. *Introduction to Linear Shell Theory.* Gauthier-Villars, Paris & North-Holland, Amsterdam, (1998).

[2] M. Dauge, I. Djurdjevic, E. Faou, A. Rössle. Eigenmodes asymptotic in thin elastic plates. *J. Maths. Pures Appl.* **78** (1999) 925–964.

[3] E. Faou. Thèse. *Université de Rennes 1* (2000).

[4] E. Faou. Développements asymptotiques complets pour une arche convexe mince linéairement élastique. *En préparation.*

[5] F. John. Refined interior equations for thin elastic shells. *Comm. Pure Appl. Math.* **24** (1971) 583–615.

[6] W. T. Koiter. On the foundations of the linear theory of thin elastic shells: I. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Ser. B* **73** (1970) 169–182.

[7] P. M. Naghdi. Foundations of elastic shell theory. *Progress in Solid Mechanics* **4**, North-Holland, Amsterdam (1963) 1–90.

[8] E. Sanchez-Palencia. Passages à la limite de l'élasticité tri-dimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces. *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér.II*, **311**, (1990) 909–916.