Numéro d'Ordre : 2354

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir

le grade de : DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et applications

PAR

Erwan FAOU

Equipe d'accueil : Equipe d'analyse numérique de l'IRMAR, Rennes
Ecole doctorale : Mathématiques de l'Ouest
Composante universitaire : UFR de mathématiques

TITRE DE LA THÈSE

Développements asymptotiques dans les coques minces linéairement élastiques

RAPPORTEURS DE LA THÈSE

J. PITKÄRANTA	Helsinki University of Technology, Finlande
E. SANCHEZ PALENCIA	Laboratoire de modélisation en mécanique, Paris VI

SOUTENUE LE 21 JUIN 2000 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY

G. CALOZ	Professeur (Université de Rennes 1)
P. G. CIARLET	Professeur (Université de Paris VI)
M. COSTABEL	Professeur (Université de Rennes 1)
M. DAUGE	Directeur de recherche CNRS (Université de Rennes 1)
E. SANCHEZ PALENCIA	Directeur de recherche CNRS (Université de Paris VI)
C. SCHWAB	Professeur (ETH Zürich, Suisse)

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Michel Crouzeix qui le premier a fait le lien entre les travaux sur les plaques effectués à l'IRMAR et les compétences en géométrie différentielle que j'ai pu acquérir lors de mon DEA. C'est grâce à lui si j'ai commencé à travailler avec Monique Dauge sur des problèmes de coques.

Durant ces années de thèse, j'ai eu la chance d'avoir Monique Dauge pour directrice de recherche. Son enthousiasme particulièrement contagieux m'a toujours grandement stimulé. Sa rigueur et son honneteté me serviront toujours d'exemple. J'ai énormément apprécié sa disponibilité, ainsi que la qualité de la formation qu'elle m'a apportée. La vivacité de certains de nos échanges lorsqu'un problème ou un doute dans une démonstration survenait témoigne de la passion qu'elle a su me transmettre. Sa confiance et son ouverture d'esprit ont été aussi des facteurs importants dans la réussite de ce travail.

Je remercie Juhani Pitkäranta et Henri Sanchez Palencia d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Leurs visions parfois différentes des problèmes liés aux coques et leurs regards sur mon travail ont été très enrichissants et constructifs. Je remercie vivement Philippe Ciarlet d'avoir accepté de participer à mon jury, et de m'avoir encouragé et conseillé dans mes travaux sur les coques. Je remercie Christoph Schwab de l'intérêt qu'il porte à mon travail. Sa participation au jury est une marque à laquelle je suis très sensible. Je remercie Martin Costabel qui, outre sa participation au jury, a toujours été d'une grande disponibilité à mon égard. Enfin, je remercie Gabriel Caloz de sa participation au jury et du temps qu'il m'a consacré en tant que tuteur durant ces années de monitorat.

L'équipe d'analyse numérique de l'IRMAR me laissera toujours un souvenir impérissable. L'accueil que j'y ai reçu, la simplicité des relations humaines et la bonne humeur générale ont été un soutien et un réconfort permanent. Je voudrais témoigner ici d'une grande reconnaissance envers toute l'équipe, et je joins Pascal Gentil à ce remerciement.

Durant ma thèse, j'ai travaillé avec Georgiana Andreoiu, Ivica Djurdjevic et Andreas Rössle. Les échanges que j'ai eu à ces occasions ont souvent été intéressants et fructueux. J'ai appris aussi beaucoup en discutant avec Juhani Pitkäranta, Harri Hakula, et les mathématiciens que j'ai eu l'occasion de rencontrer à Berkeley lors du workshop sur les coques en avril 2000. J'ai eu l'occasion de faire l'école buissonière géométrique en allant discuter avec Dominique Cerveau, et ces échanges m'ont toujours plu.

Je tiens à remercier l'ensemble de gens travaillant à la tour de maths: personnel d'entretien, secrétaires, tout le personnel de la bibliothèque, membres permanents, thésards. Chacun est pour quelque chose dans la bonne ambiance générale qu'on trouve à Rennes, et c'est une chose précieuse. Je remercie en particulier François

Castella pour la solidité de son amitié. Merci aussi à Rémi Carles et à mon collègue Grégory Vial.

Un grand merci à ceux qui, au gré du temps, m'ont aidé à me changer les idées (et à garder les pieds sur terre!): ma sœur rennaise, mes parents et mon frère, l'ensemble de ma famille... ainsi que tous les copains: collègues de monitorat, amis de festoù-noz, gens d'horizons divers m'ayant toujours permis de garder un certain équilibre. Merci à Hervé Gourmelon pour le *son an dezenn*.

Enfin, je remercie Dorothée du fond du cœur pour l'appui et la confiance qu'elle m'a toujours portés. Cette thèse et moi lui devons beaucoup.

Son an dezenn

Didostit kozh ha yaouank, ha deuit da glevet kana,
An dezenn-mañ 'zo savet a-nevez 'vit ar bloa.

Un dezenn jedoniezh, n'eo ket un dra dister,
Evit kas anezhi da benn, am eus bet mil mizer.

Ab'lamour da ma enkrez, 'blamour d'am nec'hamant,
Eo bet frailhet ma buhez, freuzet ma santimant.

'Pad tri bloaz on bet o poaniañ, 'pad tri bloaz o c'hwezhiañ,
Bremañ p'eo echu an dezenn ez on krog da ganañ.

Table des matières

Introduction

The topic of this thesis consists of studying asymptotic expansions in linearly elastic shells. The aim of these expansions is a thorough description of the behavior of the displacement with respect to the (half-)thickness ε. This complete description allows in particular to compare the three-dimensional displacement and the solution of different two-dimensional models. In a numerical point of view, asymptotic expansions give hints to replace three-dimensional computations, still longer and less accurate, by two-dimensional computations. The asymptotic error can then be precisely evaluated. Moreover, the knowledge of the special behavior in ε can lead to different ways of approximating the displacement by numerical methods. The presence of boundary layers in the expansion do influence the choice of the finite element space in a Galerkin method (for example by refining the mesh near the boundary). The asymptotic expansion also allows to compare the 3D solution with the solution of various hierarchical models. It is also useful in order to study hp-methods where the role of the thickness compared to the influence of the size of the mesh and of the degree of the polynomial approximation can be evaluated as precisely as possible.

For plates [17, 19, 16] and for shallow shells [3] the existence of complete expansions has been proved. In these two situations, the limit surface is a flat domain of $\mathbb{R}^2$. The general case when the limit surface of the shell is a surface in $\mathbb{R}^3$ is a wide field of investigations. In this thesis, we study the case when the limit surface is elliptic and we show the existence of a complete asymptotic expansion containing a new scale of development in comparison with plates and shallow shells. This new scale consists of exponentially decreasing boundary layer terms with characteristic length $\varepsilon^{1/2}$.

This work contains two parts. In the first one (Partie A), we consider general shells with a regular mean surface on which no assumption on the curvature is done. These shells are made with an elastic, homogeneous and isotropic material, and we consider the equations of linear elasticity with free boundary conditions on the upper and lower faces of the shell. These latter conditions refer to a relevant physical situation. We first study a *formal series* problem generated by the 3D problem. The formal series considered here only involve integer powers of the half-thickness ε. Because the main difficulty in finding complete asymptotic expansions is due to the presence of boundary layer near the lateral boundary, we split the problem by neglecting first the lateral boundary conditions. Thus the formal series problem is constructed from the expansion in ε of the inner elasticity operators and of the traction operators on the upper and lower faces. We then show the reduction of this 3D formal series problem to a reduced formal series problem posed on the mean surface of the shell. This new problem involves a formal series whose coefficients are 2D operators on the mean surface and do have common part with Koiter's model operator or its many variants (see [35, 41, 33, 6, 44]).

In the second part (Partie B), we assume that the mean surface is elliptic, and we impose clamped boundary conditions on the lateral boundary. Note that the case of an elliptic shell without boundary can be treated in a simpler way (see also [52]). When the mean surface is elliptic, the operator of order 0 in the 2D reduced formal series problem is elliptic. This allows the construction of the expansion. We first study the solution of Koiter's model and its variants. For this solution, we show the existence of a complete asymptotic expansion in powers of $\varepsilon^{1/2}$. This development contains terms independent of ε defined on the whole mean surface, and boundary layer terms exponentially decreasing in $\varepsilon^{-1/2}r$, where r denotes the distance to the boundary of the mean surface. Finally, we show the existence of a complete asymptotic expansion for the 3D displacement containing three type of terms: terms independent of ε defined on the whole shell, 2D boundary layer terms exponentially decreasing in $\varepsilon^{-1/2}r$, and 3D boundary layer terms exponentially decreasing in $\varepsilon^{-1}r$. These latter terms are of the same type as the boundary layer terms appearing in plates (see [17, 16, 43]). We can then compare the 3D displacement with the solutions of the membrane and Koiter's models. This improves the convergence results of [12, 40].

1. Framework of the studies and intrinsic computations.

A thin shell is a body represented by an open set of $\mathbb{R}^3$ having a dimension small with respect to the other ones. The open set defining the shell is such that there exists a regular surface S (the mean surface) and a positive real number ε (the thickness) such that the domain is constituted by the points $P+hN(P)$ where $P \in S$, $|h| < \varepsilon$ and where $N(P)$ is the unit normal to S in P. Moreover, the thickness ε is small compared with the dimensions of the mean surface S. Hence, if S is a compact surface with boundary (possibly empty) embedded in $\mathbb{R}^3$, we may define for $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ small enough a family of shells Ω^ε depending on ε as the image of the manifold $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ by the diffeomorphism

$$\Phi^\varepsilon : S \times (-\varepsilon, \varepsilon) \ni (P, h) \mapsto P + hN(P) \in \Omega^\varepsilon.$$

For any fixed h, the map $\Phi^\varepsilon(\,\cdot\,, h)$ is a diffeomorphism between S and a surface S_h of $\mathbb{R}^3$. The lateral boundary of the shell is denoted by Γ_0^ε and is the image of the set $\partial S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ by the diffeomorphism Φ^ε.

We assume that Ω^ε is made with an elastic, homogeneous and isotropic material, and we consider the linearized elasticity equations. Thus we study the Lamé equations with free boundary conditions on the upper and lower faces S_ε and $S_{-\varepsilon}$ isomorphic to the mean surface S. Supposing that the loading forces depend on ε in a regular way, our aim is to study the behavior of the displacement solution of these equations, and if possible to find an asymptotic expansion.

If $\boldsymbol{u}$ is a displacement field, the associated linearized deformation tensor in Cartesian coordinates writes $e_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ where ∂_i stands for the derivative with respect to t^i. The material being fixed, it only depends on the two Lamé coefficients $\lambda > 0$ and $\mu > 0$. To these coefficients we associate the rigidity matrix $\boldsymbol{A}$ whose components in the coordinate system $\{t^i\}$ write $A^{ijk\ell} = \lambda\delta^{ij}\delta^{k\ell} + \mu(\delta^{ik}\delta^{j\ell} + \delta^{i\ell}\delta^{jk})$. The loading forces applied to the shell are described by a vector field written $\boldsymbol{f} = f^i \frac{\partial}{\partial t^i}$ in the Cartesian coordinate system $\{t^i\}$ of $\mathbb{R}^3$. We then consider the equations

$$\left\{\begin{array}{rcll} -A^{ijk\ell}\partial_j e_{kl}(\boldsymbol{u}) & = & f^i & \text{in} \quad \Omega^\varepsilon, \\ B^i(\boldsymbol{u}) & = & 0 & \text{on} \quad S_{\pm\varepsilon}, \end{array}\right.$$

where $B^i(\boldsymbol{u})$ denotes the natural traction operator on the upper and lower faces of the shell. This operator comes from an integration by parts in the associated bilinear form:

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijk\ell} e_{ij}(\boldsymbol{u}) e_{k\ell}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}t^1 \mathrm{d}t^2 \mathrm{d}t^3.$$

If the lateral boundary is not empty, we moreover impose clamped boundary conditions on the lateral boundary Γ_0^ε, and the problem writes

$$\left\{\begin{array}{rcll} -A^{ijk\ell}\partial_j e_{kl}(\boldsymbol{u}) & = & f^i & \text{in} \quad \Omega^\varepsilon, \\ B^i(\boldsymbol{u}) & = & 0 & \text{on} \quad S_{\pm\varepsilon}, \\ \boldsymbol{u} & = & 0 & \text{on} \quad \Gamma_0^\varepsilon. \end{array}\right. \tag{0.1}$$

This is the classical problem of linearized elasticity in Cartesian coordinate posed on an open set of $\mathbb{R}^3$ having the shape of a thin shell, with clamped conditions on the lateral boundary.

The problem of describing the behavior of the displacement $\boldsymbol{u}$ with respect to ε for more or less regular loading forces is an old and involved problem. In the case when the mean surface S_0 is a domain in $\mathbb{R}^2$, that is when the shell is a plate, convergence results have been proved (see [8, 21, 10]) and more recently, existence of complete asymptotic expansions including boundary layer terms has been established (see [17, 19, 16, 43]). In the general case of shells, many different two-dimensional models have been proposed for approximating the three-dimensional displacement with the best efficiency (see [34, 35, 41, 44, 33]). However, to estimate the relevance of two-dimensional models, a complete asymptotic analysis proves to be the most precise tool. Along the guidelines of [51], many results are available, showing various convergence results for shells (see [12, 14, 13, 40] and [9] for a complete survey). In particular, we can distinguish between *membrane* and *bending* shells (see [50]). The same kind of distinction can be found in works more concerned with numerical approximation (see for example [45, 46]). Moreover, lateral boundary conditions do influence the type of behavior of the displacement, and give rise to different type of results, even if the geometry of the mean surface is the same (see [50]).

In order to study the displacement $\boldsymbol{u}$ (denoted by $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ in the following) solution of the equations (0.1), we use that the domain Ω^ε is diffeomorphic to the manifold $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. We then call *normal coordinate system* a coordinate system (y^α, h) defined on an open set $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, where U is an open set of a local map coming from an atlas of S_0. Hence, with this type of coordinates, an atlas on S_0 induces an atlas on Ω^ε.

The main object of Chapter I is to perform the change of coordinates from Cartesian coordinates to normal coordinates. The elasticity operator and the traction operator on the upper and lower faces are written in a normal coordinate system using the transverse derivative ∂_h (also denoted by ∂_3^ε) and the covariant derivative D_α on the surface S. Note that, though these computations are made in a local coordinate system, the results are *intrinsic*, i.e. all the operators depend on tensor fields defined on the whole manifold. The derivative ∂_h exists also overall the manifold $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, and hence the operators are written in a complete intrinsic way: the formulas given at the end of Chapter I are the same for any normal coordinate system.

In Chapter II, we use the fact that there exists a natural projection of the shell on the mean surface. This allows to consider all tensor fields on Ω^ε as tensor functions depending on h and taking values in tensor field spaces on the mean surface S_0 (see Lemma 1.3 and Corollary 1.5 of Chapter II). This kind of representation is also present in Naghdi's works (see [41]). Thus for example, if $\boldsymbol{u}$ is a three-dimensional displacement written $\boldsymbol{u} = (u_\alpha, u_3)$ in a normal coordinate system $\{y^\alpha, h\}$, then $\boldsymbol{u}$ defines on one hand the two-dimensional 1-form field

$$u_\alpha \,\mathrm{d}y^\alpha \in \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon, \varepsilon), \Gamma(T_1 S_0)\big)$$

and on the other hand the function

$$u_3 \in \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon, \varepsilon), \mathscr{C}^\infty(S_0)\big).$$

Here, $\Gamma(T_1 S_0)$ denotes the space of 1-form fields on the surface S_0.

In order to simplify computations (see also [41]), we make the change of unknown $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\mu}^{-1}(h)(\boldsymbol{u})$ where the *shifter* operator $\boldsymbol{\mu}(h)$ is defined by the equations

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\mu}(h)(\boldsymbol{w}) \quad\Longleftrightarrow\quad u_\alpha = w_\alpha - h b_\alpha^\beta w_\beta, \quad \text{and} \quad u_3 = w_3,$$

where (b_α^β) denotes the second fundamental form on the surface S_0. For $\varepsilon \le \varepsilon_0$ small enough, it is clear that this operator is invertible. Moreover, it is a diffeomorphism between the space of 1-form fields on the whole shell onto itself. With this change of unknowns, we show that the problem (0.1) writes in normal coordinate system

$$\left\{\begin{array}{rcll} \boldsymbol{L}(x_\alpha, h; \mathrm{D}_\alpha, \partial_3^\varepsilon)(\boldsymbol{w}) & = & -\boldsymbol{f} & \text{in} \quad \Omega^\varepsilon, \\ \boldsymbol{B}(x_\alpha, h; \mathrm{D}_\alpha, \partial_3^\varepsilon)(\boldsymbol{w}) & = & 0 & \text{on} \quad S_{\pm\varepsilon}, \\ \boldsymbol{w} & = & 0 & \text{on} \quad \Gamma_0^\varepsilon, \end{array}\right. \tag{0.2}$$

where D_α is the covariant derivative on the mean surface S_0 and ∂_3^ε the derivative with respect to h on Ω^ε. In the following, we denote by $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ the solution of these equations. We suppose that the loading forces $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^\varepsilon$ are regular and admit asymptotic developments in powers of ε starting in $\mathcal{O}(1)$. The operators

$$\boldsymbol{L} : \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$$

and

$$\boldsymbol{B} : \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \Gamma(T_1 S_{\pm\varepsilon}) \times \mathscr{C}^\infty(S_{\pm\varepsilon}),$$

are intrinsic operators, and are given by equations (2.20) and (2.21) of Chapter II.

In order to study the dependency on ε of the solution of the system (0.2), we scale the normal coordinate $h = \varepsilon x_3$. Hence, the new equations are posed on the manifold $\Omega := S \times I$ where I is the interval $(-1, 1)$. We call normal coordinate system on Ω any coordinate system (x_α, x_3) coming from a normal coordinate system on Ω^ε. We denote by $\Gamma_\pm$ the upper and lower faces of Ω.

For fixed $\varepsilon \le \varepsilon_0$, we call *three-dimensional operator on the manifold* Ω the operator $\big(\boldsymbol{L}(\varepsilon), \boldsymbol{B}(\varepsilon)\big)$ with

$$\boldsymbol{L}(\varepsilon) : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$$

and

$$\boldsymbol{B}(\varepsilon) : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \Gamma(T_1 \Gamma_\pm) \times \mathscr{C}^\infty(\Gamma_\pm)$$

the operators obtained from the operators $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{B}$ by the scaling $h = \varepsilon x_3$. In any normal coordinate system, we thus have

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}(\varepsilon)(x_\alpha, x_3; \mathrm{D}_\alpha, \partial_3) = \boldsymbol{L}(x_\alpha, \varepsilon x_3; \mathrm{D}_\alpha, \varepsilon^{-1}\partial_3) \quad \text{and} \\ \boldsymbol{B}(\varepsilon)(x_\alpha, x_3; \mathrm{D}_\alpha, \partial_3) = \boldsymbol{B}(x_\alpha, \varepsilon x_3; \mathrm{D}_\alpha, \varepsilon^{-1}\partial_3), \end{cases} \tag{0.3}$$

where ∂_3 stands for the derivative with respect to x_3 on Ω.

Theorem 2.9 of Chapter II then states that both operators $\boldsymbol{L}(\varepsilon)$ and $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$ expand in power series of ε, with intrinsic operator coefficients on the manifold $\Omega = S\times(-1,1)$. The main result of Chapter II is the computation of the coefficients of these developments. Finally, we get

$$\boldsymbol{L}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\boldsymbol{L}^k \quad\text{and}\quad \boldsymbol{B}(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\boldsymbol{B}^k, \tag{0.4}$$

where the operators $\boldsymbol{L}^k$ and $\boldsymbol{B}^k$ are given by the formulas in Theorem 4.1 of Chapter II.

The required tools to obtain the expressions of these operators can be found in Naghdi (see [41]). However, the expression given here are exact formulas, and do not depend on some approximation of the inverse of the shifter (see [22, 20] for different models obtained by truncating the inverse power series of the shifter). This kind of approach, using intrinsic computations, can also be found in [29].

The fact that the operators $\boldsymbol{L}(\varepsilon)$ and $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$ do expand in power series of ε induce a *formal series* problem in powers of ε. The main point of Chapter III (and also of Part A) concerns the study of this problem.

2. Part A: Formal series solution.

In order to split the difficulties, we remove the boundary conditions on the lateral boundary and only study the inner equations together with the equations on the lower and upper faces of the shell. Thanks to equations (0.4) we associate with the operators $\boldsymbol{L}(\varepsilon)$ and $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$ the formal series denoted by

$$\boldsymbol{L}[\varepsilon] = \varepsilon^{-2}\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\boldsymbol{L}^k \quad\text{and}\quad \boldsymbol{B}[\varepsilon] = \varepsilon^{-1}\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\boldsymbol{B}^k.$$

These formal series allow to define a formal series problem. Recall that if E and F are function spaces, if $a[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k a^k$ is a formal series in ε with coefficients $a^k \in \mathcal{L}(E,F)$, and if $b[\varepsilon] = \sum_{\ell\geq 0}\varepsilon^\ell b^\ell$ is a formal series with coefficients $b^\ell \in F$, then the formal series $c[\varepsilon] = a[\varepsilon]b[\varepsilon]$ is defined by the equations $c[\varepsilon] = \sum_{n\geq 0}\varepsilon^n c^n$ with, $c^n = \sum_{\ell=0}^n a^\ell b^{n-\ell} \in F$ for all n.

As the loading forces $\boldsymbol{f}^\varepsilon$ admit an asymptotic expansion in powers of ε, we can associate with the right-hand side a formal series $\boldsymbol{f}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\boldsymbol{f}^k$ with coefficients in the space $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$. We call *three-dimensional formal series solution* any formal series $\boldsymbol{w}[\varepsilon] = \sum_k \varepsilon^k\boldsymbol{w}^k$ with coefficients in the space $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ such that the following equations are satisfied:

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}[\varepsilon]\boldsymbol{w}[\varepsilon] &= -\boldsymbol{f}[\varepsilon] \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{B}[\varepsilon]\boldsymbol{w}[\varepsilon] &= 0 \qquad\quad \text{on} \quad \Gamma_\pm, \end{cases} \tag{0.5}$$

where the products are written in the sense of formal series.

The principal result of Chapter III is then the reduction of Problem (0.5) to a two-dimensional formal series problem posed on the mean surface S_0. Theorems 2.1 and 2.5 of Chapter III give the existence of formal series $\boldsymbol{A}[\varepsilon]$ and $\boldsymbol{G}[\varepsilon]$ such that Problem (0.5) reduces to the problem

$$\boldsymbol{A}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \boldsymbol{G}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]. \tag{0.6}$$

Here, the formal series $\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{z}^k$ has its coefficients in the space $\Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$, which we call the space of 2D-*generators*. The coefficients of the formal series $\boldsymbol{A}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{A}^k$ are operators on the mean surface S_0 acting on the 2D-generator space and taking values in the 2D-generator space. In the same way, the coefficients of the formal series $\boldsymbol{G}[\varepsilon]$ are operators $\boldsymbol{G}^k$ acting on the space of 1-form fields on Ω, and taking values in the 2D-generator space. Thus, equation (0.6) is posed on the mean surface of the shell. If $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ satisfies the reduced equation (0.6), we can construct a formal series $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ solution of the formal series problem (0.5), by writing

$$\boldsymbol{w}[\varepsilon] = \boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]. \tag{0.7}$$

Here, $\boldsymbol{V}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{V}^k$ is a formal series with operator coefficients $\boldsymbol{V}^k$ acting on 2D-generators and taking values in the space of 1-form fields on Ω. Moreover, these operators are polynomial in x_3. In the same way, the coefficients of the formal series $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ are operators acting on the space of 1-form fields on Ω and taking values in this same space.

Conversely, any solution $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ of (0.5) restricted to the mean surface yields a solution $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ of (0.6).

It is important to remark that all the operators involved in the previous formal series are *intrinsic* operators. Moreover, these operators depend on the geometry of the mean surface through its two fundamental forms (metric and curvature). Hence, the whole Part A of this thesis applies to general smooth shells.

The aim of the *shell theory* is to determine the best two-dimensional models that can approach the three-dimensional solution. One among the difficulties of this shell theory is that the operators involved in the previous formal series are not unique. This is due to the fact that equations (0.6) and (0.7) are formal series equations, and indeed are collections of equations that can be written in many different but equivalent ways. The roles of the formal series operators $(\boldsymbol{A}[\varepsilon], \boldsymbol{G}[\varepsilon])$ and $(\boldsymbol{V}[\varepsilon], \boldsymbol{Q}[\varepsilon])$ are also distinct : the formal series operator $\boldsymbol{A}[\varepsilon]$ is a *reduced* operator, while $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$ is a *reconstruction* formal series operator. In the same way, the formal series $\boldsymbol{G}[\varepsilon]$ is a reduction operator acting on the right-hand side, while

$\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ is a reconstruction operator, building a particular solution of the problem (0.5) from the right-hand side $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$.

In Chapter III, we exhibit formal series $\boldsymbol{A}[\varepsilon]$, $\boldsymbol{G}[\varepsilon]$, $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$ and $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ satisfying functional equations that imply equations (0.6) and (0.7). The final aim of Chapter III is then to give the expressions of the operators $\boldsymbol{A}^0$, $\boldsymbol{A}^1$ and $\boldsymbol{A}^2$, together with the operators $\boldsymbol{G}^0$, $\boldsymbol{G}^1$ and $\boldsymbol{G}^2$ involved in the reduced problem.

We obtain that the operator $\boldsymbol{A}^0$ is the *membrane* operator denoted by $\boldsymbol{M}$. This operator appears in shell theory as the operator governing the lowest-order term in ε (see [35, 33, 41, 51, 9]). This operator is associated with the following symmetric bilinear form:

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}') \mapsto \int_{S_0} M^{\alpha\beta\sigma\delta} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) \gamma_{\sigma\delta}(\boldsymbol{z}') \, \mathrm{d}S_0,$$

where $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{z}'$ are in the space $\Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$ and where

$$M^{\alpha\beta\sigma\delta} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\delta} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta} a^{\beta\sigma}), \tag{0.8}$$

where $a^{\alpha\beta}$ denote the inverse of the metric tensor S_0. Recall that $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ is the linearized membrane strain associated with $\boldsymbol{z}$ (related to change of metric) and is given by the equation

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha z_\beta + \mathrm{D}_\beta z_\alpha) - b_{\alpha\beta} z_3.$$

We compute that the operator $\boldsymbol{A}^1$ is the operator zero. Finally, the operator $\boldsymbol{A}^2$ has a more involved expression given by equations (3.46) and (3.51) of Chapter III. In this expression, we can identify terms involved in the ε^2 part of Koiter's model (see [34, 35]) describing the *bending* shell model (see [51, 14]). Nevertheless, the operator $\boldsymbol{A}^2$ has more terms and can be compared with the computations in [33].

Thus, the first terms of the formal series $\boldsymbol{A}[\varepsilon]$ recall the classical Koiter-like models written in a general way

$$\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F},$$

where $\boldsymbol{F}$ is a bending operator for which different expressions can be found in [35, 41, 33, 6]. Chapter IV studies in a general way the ellipticity properties of these models. Moreover, we prove in Chapter IV that the restriction of the operator $\boldsymbol{A}^2$ to the space of inextensionnal displacement (see [51])

$$V_F = \{\boldsymbol{z} \in \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^2_0(S) \mid \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = 0\}$$

does coincide with the restriction of the flexural part of Koiter's model. This result can be compared with the convergence result of [14].

The operator $\boldsymbol{G}^0$ of the formal series $\boldsymbol{G}[\varepsilon]$ is simply the mean value operator with respect to the transverse direction of the shell

$$\boldsymbol{G}^0 \boldsymbol{f} = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{f}(x_3)\,\mathrm{d}x_3.$$

The operators $\boldsymbol{Q}^1$ and $\boldsymbol{Q}^2$ of the formal series $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ are zero.

The operator $\boldsymbol{V}^0$ is the canonical embedding

$$\mathscr{I} : \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0) \to \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big), \tag{0.9}$$

so that the first term $\boldsymbol{w}^0$ of the formal series (0.7) writes $\boldsymbol{w}^0 = \boldsymbol{z}^0$, where $\boldsymbol{z}^0$ is a 2D-generator, and satisfies the equation

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}^0 = \boldsymbol{G}^0 \boldsymbol{f}^0,$$

where $\boldsymbol{M}$ is the membrane operator. The operator $\boldsymbol{V}^1$ writes

$$\boldsymbol{V}^1(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} V^1_\sigma(\boldsymbol{z}) = -x_3(\mathrm{D}_\sigma z_3 + 2b^\alpha_\sigma z_\alpha), \\ V^1_3(\boldsymbol{z}) = -x_3 \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}), \end{cases} \tag{0.10}$$

where b^α_σ is the second fundamental form on the mean surface S_0 and where $\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}^\alpha z_\alpha - b^\alpha_\alpha z_3$. Finally, the operator $\boldsymbol{V}^2$ is given by the equations (3.16) of Chapter III.

Hence, we have reduced the three-dimensional formal series problem by one dimension. This formal series reduction is a first step towards a complete asymptotic expansion. This reduction is valid for any geometry of the mean surface, and involves only intrinsic operators on S_0.

3. Clamped elliptic shells: Koiter's model.

In Part B, we consider the displacement solution of the elasticity equations with clamped boundary condition. We suppose that the mean surface is elliptic, and we construct a complete asymptotic expansion of this solution. That the mean surface is elliptic means that its Gaussian curvature is strictly positive. If $b_{\alpha\beta}$ denotes the second fundamental form on the surface in local coordinates, this also writes

$$\forall\, \xi^\alpha \in \mathbb{R}^2, \quad b_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \geq c\|\xi^\alpha\|^2.$$

We study the case when the mean surface is elliptic for the following reasons: in this situation, the membrane operator is an elliptic operator in the sense of Agmon, Douglis and Nirenberg and thus has regularity properties (see [28, 50]). Moreover, a convergence result holds: the three-dimensional displacement converges, as ε tends to 0, to the solution of the membrane equations (see [51, 50, 12, 9]). An elliptic shell is a typical *membrane* shell.

For elliptic surfaces without boundary, we can invert the membrane operator provided orthogonality conditions versus rigid displacement are satisfied (see [52]). We thus can construct an asymptotic expansion for the solution of Koiter's model in powers of ε^2. This development only involves terms independent of ε. Concerning the three-dimensional displacement, the results of the previous part and the fact that the membrane operator is invertible allow to find a solution $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ for the reduced problem. Therefore it is possible to construct a three-dimensional asymptotic expansion in powers of ε that contains only terms that do not depend on ε.

When the boundary of the shell is not empty, we impose clamped boundary conditions on the lateral boundary. We make this choice because Dirichlet conditions cover the membrane operator when the surface is elliptic. Note that such is not the case for free boundary conditions which give rise to sensitivity phenomena (see [50]).

First of all, we consider in Chapter V the solution $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ associated with an admissible 2D-model (see Definition 2.2 of Chapter IV). These 2D-models are of the same type as Koiter's model (see [35]). This means that the 2D displacement $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ is solution of the equations

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (\boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F})\boldsymbol{z}(\varepsilon) & = & \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{f}^0 \,\mathrm{d}x_3 & \text{in} \quad S_0, \\ \big(z_r(\varepsilon), z_s(\varepsilon), z_3(\varepsilon), \partial_r z_3(\varepsilon)\big) & = & 0 & \text{on} \quad \partial S_0, \end{array} \right. \tag{0.11}$$

where $\boldsymbol{M}$ is the membrane operator and $\boldsymbol{F}$ a bending operator (see Definition 2.1 of Chapter IV). The field $\boldsymbol{f}^0$ is the term of order 0 in the development with respect to ε of the loading forces. For elliptic shells, the membrane operator $\boldsymbol{M}$ is elliptic of multidegree $(2, 2, 0)$ in the sense of Agmon, Douglis and Nirenberg (see [50, 28]). In the case of an elliptic surface without boundary, this property is sufficient for the construction of an asymptotic development. When the boundary is not empty, the natural Dirichlet boundary conditions write

$$\boldsymbol{z} \mapsto (z_r, z_s)\big|_{\partial S_0}$$

in a coordinate system (r, s) near the boundary, where r denotes the distance to the boundary ∂S_0 and where s denotes the arc-length along ∂S_0. Thus, the operator $\boldsymbol{M}$ cannot fulfill all conditions corresponding to the boundary operator

$$\boldsymbol{z} \mapsto (z_r, z_s, z_3, \partial_r z_3)\big|_{\partial S_0}.$$

Hence, the problem is a singularly perturbed problem in the sense of [54].

Like for scalar equations studied in [54], we are led to introduce a new scale of development. This new scale consists of exponentially decreasing functions. The role of these supplementary terms is to complete the boundary conditions. The tangential and normal derivative orders of the membrane operator write

$$\deg \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

and the fact that M_3 is of order 0 on z_3 implies that $\boldsymbol{M}$ cannot fulfill the boundary conditions $z_3 = \partial_r z_3 = 0$ on ∂S_0. On the other hand, the orders of the operator $\boldsymbol{F}$ write:

$$\deg \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

The operator F_3^2 is of order 4 on z_3. This means that it has a role in the ellipticity of the overall operator. The introduction of a new scale of functions exponentially decreasing in $T = \varepsilon^{-1/2} r$ then brings back this part at the same level as the operator M_3. The precise definition of these exponentially decreasing terms is given by the equations (1.32) and (1.33) of Chapter V and Theorem 1.7 of Chapter V states an existence result for these terms. This existence theorem allows to construct the asymptotic expansion.

The introduction of this new scale induces in a natural way formal series problems in powers of $\varepsilon^{1/2}$. Theorem 3.5 of Chapter V then states that the displacement $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ admits an asymptotic expansion in power of $\varepsilon^{1/2}$:

$$\boldsymbol{z}(\varepsilon) \simeq \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k/2} (\boldsymbol{\zeta}^{k/2} + \chi \boldsymbol{Z}^{k/2})$$

with terms $\boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ independent of ε defined on S_0 and 2D boundary layers terms $\boldsymbol{Z}^k$ exponentially decreasing in $T = \varepsilon^{-1/2} r$. The cut-off function $\chi(r)$ is equal to 1 in a neighborhood of $r = 0$, and 0 away the boundary ∂S_0 at a fixed distance that does not depend on ε. Moreover, the first terms of this expansion write, for any admissible 2D-model,

$$\boldsymbol{z}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \zeta_r^0 \\ \zeta_s^0 \\ \zeta_3^0 + \chi Z_3^0 \end{pmatrix} + \cdots ,$$

where $\boldsymbol{\zeta}^0$ is the solution of the membrane equations

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^0) & = & \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \boldsymbol{f}^0 \, \mathrm{d}x_3 & \text{in} \quad S_0, \\ \zeta_\sigma & = & 0 & \text{on} \quad \partial S_0. \end{array} \right. \tag{0.12}$$

Using this result, we can obtain optimal estimates between the solution of Koiter's model and the solution of the membrane model (see Proposition 3.7 of Chapter V that improves the result of [40]). The structure of these expansions also allows to estimate differences between solutions of systems (0.11) associated with different admissible 2D-models (see Theorem 3.8 of Chapter V).

4. Clamped elliptic shells: 3D asymptotics.

In Chapter VI, we consider the solution $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ of equations (0.2) on a thin shell whose mean surface S_0 is elliptic. Recall that in order to study the behavior in ε of the displacement $\boldsymbol{w}^\varepsilon$, we made the scaling $h = \varepsilon x_3$. This scaling gives new equations set on the manifold Ω, and we denote by $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$ the displacement such that in a normal coordinate system, we have

$$\boldsymbol{w}(\varepsilon)(x_\alpha, x_3) = \boldsymbol{w}^\varepsilon(x_\alpha, h).$$

In the same way, we denote by $\boldsymbol{f}(\varepsilon)$ the scaled loading forces. By assumption, $\boldsymbol{f}(\varepsilon)$ admits an asymptotic expansion in $\mathcal{O}(1)$. This means that we have

$$\boldsymbol{f}(\varepsilon) = \boldsymbol{f}^0 + \varepsilon \boldsymbol{f}^1 + \cdots .$$

In the case of elliptic surfaces without boundary, thanks to the ellipticity property of the membrane operator, we can construct a solution $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ of the reduced problem defined in Chapter III. Thus, by using the reconstruction operators $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$ and $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ from the 2D to the 3D, we can construct an asymptotic expansion of the displacement given as a series in power of ε. The orthogonality conditions versus the 3D rigid displacements give the orthogonality conditions allowing to invert correctly the membrane operator (see [52]).

When the boundary in not empty, using (0.3), the displacement $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$ is solution of the equations

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}(\varepsilon)\boldsymbol{w}(\varepsilon) &= -\boldsymbol{f}(\varepsilon) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{B}(\varepsilon)\boldsymbol{w}(\varepsilon) &= 0 \qquad\quad \text{on} \quad \Gamma_\pm, \\ \boldsymbol{w}(\varepsilon) &= 0 \qquad\quad \text{on} \quad \Gamma_0, \end{cases}$$

where Γ_0 denote the lateral boundary $\partial S \times (-1, 1)$ of the manifold Ω.

The main result of Chapter VI is given in Theorem 4.4 of this chapter. This theorem states the existence of a complete asymptotic expansion of the displacement $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$ in powers of $\varepsilon^{1/2}$. This expansion contains three sorts of terms, and writes:

$$\boldsymbol{w}(\varepsilon) \simeq \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k/2} \Big(\boldsymbol{v}^{k/2}(x_\alpha, x_3) + \chi(r)(\boldsymbol{W}^{k/2}(\tfrac{r}{\sqrt{\varepsilon}}, s, x_3) + \boldsymbol{\Phi}^{k/2}(\tfrac{r}{\varepsilon}, s, x_3)) \Big), \qquad (0.13)$$

where (r, s) is a coordinate system on S in a neighborhood of ∂S such that r denotes the distance to the boundary of S, and where

- $\boldsymbol{v}^{k/2}$ are 1-form fields on Ω,
- $\boldsymbol{W}^{k/2}$ are 2D boundary layer terms exponentially decreasing in $T = \varepsilon^{-1/2}r$ and are polynomial in x_3,
- $\boldsymbol{\Phi}^{k/2}$ are 3D boundary layer terms exponentially decreasing in $R = \varepsilon^{-1}r$.

To obtain this result, we introduce new scales of development corresponding to the boundary layer terms. The different scales can only interact on the boundary. We now survey briefly the structure of this construction.

We see that we cannot impose boundary conditions on the formal series $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ so that the boundary condition on $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ is fulfilled. As for plates (see [17, 16]), we introduce a new scale consisting of terms exponentially decreasing with respect to $R = \varepsilon^{-1}r$, see the first section of Chapter VI. We show that under certain conditions, we can find a formal series

$$\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{\varphi}^k(R, s, x_3)$$

with boundary layer coefficients $\boldsymbol{\varphi}^k(R, s, x_3)$ exponentially decreasing in $R = r/\varepsilon$, satisfying the equation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}[\varepsilon]\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] & = & 0, \\ \mathscr{B}[\varepsilon]\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] & = & 0, \\ \boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]\big|_{R=0} + \big(\boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]\big)\big|_{\Gamma_0} & = & 0, \end{array} \right. \tag{0.14}$$

where the formal series $\mathscr{L}[\varepsilon]$ and $\mathscr{B}[\varepsilon]$ are obtained from the formal series $\boldsymbol{L}[\varepsilon]$ and $\boldsymbol{B}[\varepsilon]$ by the change of coordinates $(r, s, x_3) \mapsto (R, s, x_3)$ (see Definition 1.1 of Chapter VI).

We then show that there exists a formal series $\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]$ with exponentially decreasing coefficients satisfying equations (0.14) if and only if the formal series $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ satisfies a condition written

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon],$$

where $\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon]$ is a formal series whose coefficients are operators taking values in $\mathscr{C}^\infty(\partial S_0)^4$ and such that

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}^0\boldsymbol{z} = (z_r, z_s, z_3, \partial_r z_3)\big|_{\partial S_0}.$$

The coefficients of the formal series $\vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon]$ are operators taking values in the space $\mathscr{C}^\infty(\partial S_0)^4$. Moreover, we have $\vec{\boldsymbol{H}}^0 = 0$. Thus, is $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ satisfy the equations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{A}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] & = & \boldsymbol{G}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon], \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] & = & \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon], \end{array} \right. \tag{0.15}$$

then there exists a formal series $\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]$ of 3D boundary layer terms satisfying (0.14). Moreover, the formal series $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ defined by equation (0.7) satisfies the system (0.5). We call Problem (0.15) the *theoretical reduced problem*, and the previous point constitutes the result stated in Theorem 1.13 of Chapter VI.

We can state anew the result of [17] concerning plates in the present framework: for plates, the reduced problem (0.15) has a solution in formal series algebra with 2D-generators coefficients under the assumption that the formal series $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ starts in ε^2.

Another case when the reduced problem has a solution (also for a formal series $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ starting in ε^2) is the case of *convex arches*. In this case, the "mean manifold" S_0 is a curve embedded in $\mathbb{R}^2$ and we suppose that this mean curve is convex. In this case, and under the above assumption on the load, the reduced problem (0.15) has a solution (see [26]).

Let us come back to clamped elliptic shells. We set $\boldsymbol{g}[\varepsilon] = \boldsymbol{G}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ and $\vec{\boldsymbol{c}}[\varepsilon] = \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]$. With these notations, the theoretical reduced problem writes

$$\forall\, k \geq 0, \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} \boldsymbol{A}^0 \boldsymbol{z}^k & = & -\sum_{\ell=1}^k \boldsymbol{A}^\ell \boldsymbol{z}^{k-\ell} + \boldsymbol{g}^k & \text{in} \quad S_0, \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}^0 \boldsymbol{z}^k & = & -\sum_{\ell=1}^k \vec{\boldsymbol{\delta}}^\ell \boldsymbol{z}^{k-\ell} + \vec{\boldsymbol{c}}^k. & \end{array} \right. \tag{0.16}$$

When the mean surface is elliptic, the operator $\boldsymbol{A}^0$, which is the membrane operator, is elliptic. As for the Koiter's model, we see that the operator $\boldsymbol{A}^0$ cannot fulfill all the boundary conditions imposed by the operator $\vec{\boldsymbol{\delta}}^0$ in equations (0.16). The theoretical reduced problem is thus a singularly perturbed problem in the sense of [54]. As in Chapter V, we introduce a new scale of terms exponentially decreasing with respect to the variable $T = \varepsilon^{-1/2} r$ in order to get a solution. In fact, Problem (0.16) does not have a solution, but we *define* a new problem involving both type of scales in powers of $\varepsilon^{1/2}$.

The goal of Section 2 of Chapter VI is then to describe an *effective reduced problem* coming from the theoretical reduced problem, and such that this new problem has a solution (see Theorem 2.10 of Chapter VI). The effective reduced problem involves an equation acting on formal series terms $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ in powers of $\varepsilon^{1/2}$ with regular coefficients defined on S_0, an equation acting on formal series $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ with exponentially decreasing coefficients with respect to the variable $T = \varepsilon^{-1/2} r$, and an equation mixing both terms and posed on the boundary ∂S_0. Note that the boundary is the only place where the two scales can interact. Theorem 2.10 of Chapter VI then states the existence of a solution for the effective reduced problem: there exist two formal series $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ and $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ with coefficients independent of ε and exponentially decreasing with respect to $T = r/\varepsilon^{1/2}$ respectively, solutions of the problem (see equations (2.28) of Chapter VI).

Hence, with a right-hand side formal series $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ we associate two formal series $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ and $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ satisfying the effective reduced problem. Starting from this result, the rest of Chapter VI consists of the construction of an asymptotic expansion of the three dimensional displacement $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$. This construction is done by defining correctly the action of the operator formal series $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$ on the formal series $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$. Theorem 3.7 of Chapter VI states the existence of three formal series $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$, $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ and $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$ whose coefficients are the terms in the expansion (0.13), fulfilling the boundary condition

$$\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\Gamma_0} + \boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{T=0} + \boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{R=0} = 0,$$

where we recall that T and R are the fast variables corresponding to the 2D and 3D boundary layers terms. Moreover, these three formal series do satisfy suitable inner equations with respect to their scales: we have

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] &= -\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{B}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] &= 0, \end{cases}$$

where the formal series $\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}]$ is induced by the formal series $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$, as well as the equations

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{L}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}] &= 0, \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}] &= 0, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \mathscr{L}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}] &= 0, \\ \mathscr{B}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}] &= 0, \end{cases}$$

where the formal series $\boldsymbol{\mathcal{L}}[\varepsilon^{1/2}]$ and $\boldsymbol{\mathcal{B}}[\varepsilon^{1/2}]$ are obtained from the expansion of the operators $\boldsymbol{L}(\varepsilon)$ and $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$ in the coordinate system (T, s, x_3), and where in the same way, the formal series $\mathscr{L}[\varepsilon^{1/2}]$ and $\mathscr{B}[\varepsilon^{1/2}]$ come from the expansion of the operators $\boldsymbol{L}(\varepsilon)$ and $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$ in the coordinate system (R, s, x_3).

Starting from Theorem 3.7 of Chapter VI, we then construct the asymptotic expansion (0.13). This expansion is validated using a classical method: we first estimate roughly the difference between the displacement and partial sums of the expansion using Korn inequality, then we estimate this difference more precisely by analysing higher order terms in partial sums. The final error estimates (see Theorem 4.4 of Chapter VI) are then optimal in the sense that the first neglected term is of the same order of magnitude in ε as the error.

Finally, Theorem 4.6 of Chapter VI states that if $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ denote the scaled *unshifted* three-dimensional displacement, then $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ admits an asymptotic expansion similar to the expansion obtained for the shifted displacement $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$ (see equation (0.13)). Moreover, this theorem describes the first terms of the asymptotic expansion: the 3D boundary layer terms only appear at the order 1 in ε, and the terms in ε^0 and $\varepsilon^{1/2}$ write

$$\boldsymbol{u}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \zeta_r^0 \\ \zeta_s^0 \\ \zeta_3^0 + \chi Z_3^0 \end{pmatrix} + \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} \zeta_r^{1/2} + \chi(Z_T^{1/2} - x_3 \partial_T Z_3^0) \\ \zeta_s^{1/2} + \chi Z_s^{1/2} \\ \zeta_3^{1/2} + \chi Z_3^{1/2} \end{pmatrix} + \cdots, \tag{0.17}$$

where $\boldsymbol{\zeta}^0$, $\boldsymbol{\zeta}^{1/2}$, $\boldsymbol{Z}^0$ and $\boldsymbol{Z}^{1/2}$ come from the formal series solutions of the effective reduced problem $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ and $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$. In particular, $\boldsymbol{\zeta}^0$ is the solution of the membrane equations (0.12). The first 2D boundary layer term then writes $\boldsymbol{W}^0 = \boldsymbol{Z}^0 = (0, 0, Z_3^0)$, and does not depend on x_3. The second 2D boundary layer term $\boldsymbol{W}^{1/2} = (Z_T^{1/2} - x_3 \partial_T Z_3^0, Z_s^{1/2}, Z_3^{1/2})$ does depend on x_3 via a Kirchhoff-Love type term only.

If $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ is the solution of an admissible 2D-model, Theorem 4.4 of Chapter VI states that the first terms in the expansion of this solution write for any admissible 2D-model

$$\boldsymbol{z}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \zeta_r^0 \\ \zeta_s^0 \\ \zeta_3^0 + \chi Z_3^0 \end{pmatrix} + \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} \zeta_r^{1/2} + \chi Z_T^{1/2} \\ \zeta_s^{1/2} + \chi Z_s^{1/2} \\ \zeta_3^{1/2} + \chi {Z'}_3^{1/2} \end{pmatrix} + \cdots,$$

where the terms $\boldsymbol{\zeta}^0$, $\boldsymbol{\zeta}^{1/2}$, $Z_T^{1/2}$ and $Z_s^{1/2}$ are identical to those appearing in equation (0.17). However, the term ${Z'}_3^{1/2}$ is not equal to the term $Z_3^{1/2}$.

From the expansion (0.17) we get that in general, we have $\|\boldsymbol{u}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/4})$. In order to obtain a convergence result, we replace the H^1 norm by a weaker norm on the third component because of the presence of the boundary layer term Z_3^0. In the $\mathrm{H}^1(\Omega)^2 \times \mathrm{L}^2(\Omega)$ norm, which is the membrane norm on the shell, we get the estimate:

$$\|\boldsymbol{u}(\varepsilon) - \mathscr{I}\boldsymbol{\zeta}^0\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^2 \times \mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{1/4}, \tag{0.18}$$

where $\boldsymbol{\zeta}^0$ is the solution of the membrane equation (0.12), and where $\mathscr{I}$ is the canonical embedding (0.9). This type of estimate is obtained by computing the order of magnitude in ε of the different terms in the expansion. In particular, we have

$$\|\chi Z_3^0\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{1/4} \quad \text{and} \quad \|\chi Z_3^0\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{-1/4},$$

and estimate (0.18) is optimal. These estimates allow to find anew the convergence results of [12] and improve the estimates in [40] obtained with the help of correctors.

To obtain convergence in the space $\mathrm{H}^1(\Omega)^3$, we use the solution of a Koiter-like model instead of the solution of the membrane equation. By using error estimates at higher orders, and using the results of Chapter V on the asymptotic expansion for the solution of an admissible 2D-model, we show the following estimate between the displacement $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ and the solution $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ of a Koiter-like model (see Proposition 4.7 of Chapter VI):

$$\|\boldsymbol{u}(\varepsilon) - \mathscr{I}\boldsymbol{z}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \leq C\varepsilon^{1/4}. \tag{0.19}$$

Indeed, the asymptotic convergence rate is not improved if evaluated in the membrane norm $\mathrm{H}^1(\Omega)^2 \times \mathrm{L}^2(\Omega)$. Moreover equations (3.16) of Chapter V estimate the deviations between the solutions of different Koiter-like models. As these deviations are of higher order in ε as the orders in (0.19), we deduce that two solutions $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ and $\boldsymbol{z}'(\varepsilon)$ of systems (0.11) associated with two different admissible 2D-models approach the three dimensional solution $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ with the same error rate in ε.

Thus, in the case of elliptic shells, the different Koiter-like models have the same asymptotic accuracy in the approximation of the 3D solution. In particular, Koiter's model has the same performance as the 2D model associated with the following symmetric bilinear form:

$$a^\varepsilon(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}') = \int_{S_0} M^{\alpha\beta\sigma\delta}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\gamma_{\sigma\delta}(\boldsymbol{z}')\,\mathrm{d}S_0 + \frac{\varepsilon^2}{3}\int_{S_0} M^{\alpha\beta\sigma\delta}\tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\tau_{\sigma\delta}(\boldsymbol{z}')\,\mathrm{d}S_0, \tag{0.20}$$

where $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{z}'$ are in the space $\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)$ and where the tensor field $\tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ is defined by the equation

$$\tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\beta z_3. \tag{0.21}$$

Recall that Koiter's model is associated with a bilinear form similar to (0.20), where the operator $\tau_{\alpha\beta}$ is replaced with the linearized bending strain tensor (related to change of curvature, see [35, 41, 50]):

$$\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\beta z_3 - c_{\alpha\beta}z_3 + b_\alpha^\sigma\mathrm{D}_\beta z_\sigma + \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\sigma z_\sigma.$$

Nevertheless, this result is related to the fact that an elliptic shell is a *membrane* shell (see [51, 9]). In the case of *bending* shells, this result is not true in general. For example, for convex arches (see [26]) the 2D models do not all have the same performances as Koiter's model. In particular, the model given by the bilinear form (0.20) does not describe correctly the first terms in the expansion, while Koiter's model gives the correct limit.

5. Unscaled error estimates (in physical variables).

Going back to physical variables, we see that the displacement $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ solution of the three dimensional equations of elasticity on the shell admits an asymptotic expansion of the type

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon \simeq \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\Big(\tilde{\boldsymbol{v}}^{k/2}(x_\alpha,\tfrac{h}{\varepsilon}) + \chi(r)(\tilde{\boldsymbol{W}}^{k/2}(\tfrac{r}{\sqrt{\varepsilon}},s,\tfrac{h}{\varepsilon}) + \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{k/2}(\tfrac{r}{\varepsilon},s,\tfrac{h}{\varepsilon}))\Big),$$

where h is the transverse variable in the physical shell Ω^ε. But we compute that in the $\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)$ norm we have the following orders of magnitude:

$$\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)^3} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \quad \text{and} \quad \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)^3} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$$

for $\boldsymbol{\zeta}(x_\alpha)$ a 2D displacement and $\boldsymbol{v}(x_\alpha, \frac{h}{\varepsilon})$ a displacement of Ω^ε depending on $x_3 = \varepsilon^{-1}h$. In the same way, we have for the 2D boundary layer terms

$$\|\chi\boldsymbol{Z}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)^3} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/4}) \quad \text{and} \quad \|\chi\boldsymbol{W}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)^3} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/4})$$

if $\boldsymbol{Z}(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}, s)$ is independent of the transverse variable, and if $\boldsymbol{W}(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}, s, \frac{h}{\varepsilon})$ is a 2D boundary layer term depending on $x_3 = \varepsilon^{-1}h$. Finally, we have

$$\|\chi\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)^3} = \mathcal{O}(1)$$

for $\boldsymbol{\Phi}(\frac{r}{\varepsilon}, s, \frac{h}{\varepsilon})$ any 3D boundary layer term. From equation (0.17) we deduce that if the first term $\boldsymbol{\zeta}^0 \neq 0$, we have

$$\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)^3} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/4}), \tag{0.22}$$

and that the main contribution to this norm is due to the 2D boundary layer terms $\boldsymbol{Z}^0$ and $\boldsymbol{W}^{1/2}$. Moreover, the term $\boldsymbol{W}^{1/2}$ is not present in the asymptotic expansion of the solution of Koiter's model. In order to obtain a convergence result in the relative norm, we introduce the following displacement: Let $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ be an admissible 2D-model, and let $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ be the solution of the associated system (0.11). We call *Kirchhoff-Love displacement associated with* $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ the 1-form field defined by the equation

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{KL}}\big(\boldsymbol{z}(\varepsilon)\big) := \begin{cases} z_\sigma(\varepsilon) - h\big(\mathrm{D}_\sigma z_3(\varepsilon) + 2b^\alpha_\sigma z_\alpha(\varepsilon)\big), \\ z_3(\varepsilon), \end{cases} \tag{0.23}$$

where b^α_σ denotes the second fundamental form on the surface S_0. Then if the first term $\boldsymbol{\zeta}^0 \neq 0$, we get the estimate :

$$\frac{\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{U}^{\mathrm{KL}}\big(\boldsymbol{z}(\varepsilon)\big)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)^3}}{\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)^3}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/4}).$$

This estimate is valid for any Koiter-like model. In fact, it would be enough to consider the difference between $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ and the displacement $\boldsymbol{U}^{\mathrm{KL}}\big(\chi\boldsymbol{Z}^0\big)$ constructed from the first boundary layer terms $\boldsymbol{Z}^0$. Indeed, this displacement takes the component $-x_3\partial_T Z^0_3$ of the term $\boldsymbol{W}^{1/2}$ into account.

In order to improve the convergence, it is necessary to construct a displacement taking more terms of the asymptotic into account. Let $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ denotes a solution of the system (0.11) associated to a Koiter-like model. We pose

$$\tilde{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{KL}}\big(\boldsymbol{z}(\varepsilon)\big) := \begin{cases} z_\sigma(\varepsilon) - h\big(\mathrm{D}_\sigma z_3(\varepsilon) + 2b_\sigma^\alpha z_\alpha(\varepsilon)\big), \\ z_3(\varepsilon) - hp\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}(\varepsilon)), \end{cases}$$

where $p = \lambda(\lambda+2\mu)^{-1}$. Note that the supplementary term in comparison with Equation (0.23) corresponds to the third component of the operator $\boldsymbol{V}^1$ defined in (0.10). In the $\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)^3$ norm on the physical shell, we have if the first term $\boldsymbol{\zeta}^0 \neq 0$:

$$\frac{\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \tilde{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{KL}}(\boldsymbol{z}(\varepsilon))\|_{\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)^3}}{\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)^3}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}). \tag{0.24}$$

On the shell Ω^ε, we can also consider the natural energy norm associated to the problem:

$$\|\boldsymbol{u}\|_E := \Big(\int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijk\ell} e_{ij}(\boldsymbol{u}) e_{k\ell}(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2},$$

where $\{t^i\}$ is a Cartesian coordinate system in $\mathbb{R}^3$, where $A^{ijk\ell}$ is the rigidity tensor, and where $e_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ with ∂_i the derivative with respect to the variable t^i. In this case, and in comparison with (0.22), the special structure of the asymptotic of $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ and the particular linear combinations of derivatives appearing in the strain tensors yields that $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_E = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$ if $\boldsymbol{\zeta}^0 \neq 0$ (see Proposition 4.15 of Chapter VI). In order to obtain a similar estimate as (0.24) we must introduce supplementary terms in the reconstructed displacement.

Following [35], we introduce the *modified Kirchhoff-Love displacement* associated to the solution $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ of the system (0.11) :

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}(\varepsilon)) = \begin{cases} z_\sigma(\varepsilon) - h(\mathrm{D}_\sigma z_3(\varepsilon) + 2b_\sigma^\alpha z_\alpha(\varepsilon)), \\ z_3(\varepsilon) - hp\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}(\varepsilon)) + \frac{h^2}{2}p\rho_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}(\varepsilon)). \end{cases} \tag{0.25}$$

We prove in Theorem 4.17 of Chapter VI that if the first term of the asymptotic $\boldsymbol{\zeta}^0 \neq 0$, then we have

$$\frac{\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}(\varepsilon))\|_E}{\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_E} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}).$$

It is important to note that in this case, the strongest contribution in ε in the term $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}(\varepsilon))\|_E$ comes from the presence of a 3D boundary layer term. Thus the formula (0.25) gives the best way of approximating the 3D displacement by a 2D expression without taking into account more effects due to 3D boundary layers.

6. Conclusions and perspectives.

The case of clamped elliptic shells is the first situation where the limit surface is not flat, and where the existence of a complete asymptotic expansion in ε for the displacement was proved. The results of Part A concerning the reduction of the formal series problem constitute a first step necessary to the construction of the asymptotic expansion, and this for any geometry of the mean surface.

In order to obtain results for other geometries, the case of revolution surfaces obtained by rotating a curve around an axis can be considered. Such surfaces may be of any type (elliptic, hyperbolic, parabolic in different points), but the boundary of the surface is never an asymptotic line of the surface. This means that the curvature on the boundary never vanishes. The considered method consists of using Fourier transform in the angular variable. Simplified computations using Koiter's model suggest that the three-dimensional asymptotic expansion is of the same type as for elliptic shells (see for example [45, 47]). The asymptotic expansion of the three dimensional solution would then contain boundary layer terms of orders $\varepsilon^{1/2}$ and ε. Nevertheless, a change in the boundary conditions on the lateral boundary can deeply alter the results (see [48]): for free boundary conditions the limit problem becomes sensitive, and the solution for a given frequency k does not behave correctly with respect to ε and k.

According to the paper [47], which is based on certain mechanical assumptions and uses a 2D shell model, boundary layer terms appearing in the expansion of the displacement for clamped shells could only be of order ε and $\varepsilon^{1/2}$ in the general case, and $\varepsilon^{1/3}$ or $\varepsilon^{1/4}$ in the case of hyperbolic or parabolic shells clamped along asymptotic lines of curvature. It is tempting to find a three-dimensional situation where this kind of boundary layer appears and to show in this case the existence of a complete asymptotic expansion. In this connection, the case of an infinite straight half-cylindrical mean surface (with its boundary formed by two generator lines) may yield a situation where it could be possible to exhibit an asymptotic expansion containing boundary layer terms of order $\varepsilon^{1/4}$. The case of convex arches corresponds to the zero frequency by Fourier transform in the direction of the cylinder generator line. For other frequencies, boundary layer terms of order $\varepsilon^{1/4}$ appear in a natural way in the expansion.

According to the results in [50], the situation of an elliptic shell with free lateral boundary conditions gives rise to sensitivity phenomena (see [37]). In this case, the limit membrane operator $\boldsymbol{M}$ appearing in the formal series solution is not covered by the natural Neumann boundary conditions. The consideration of this type of phenomenon constitutes a very wide research field. The systematic use of formal series in these various cases aiming to investigate asymptotic expansions could lead to a better understanding of this type of behavior.

Finally, in order to deal with situations where the mean surface has a more involved geometry, possibly non-smooth, a first step would consist in studying the problem in dimension 2, that is in studying the case of arches whose mean surface is not convex. To this aim, we could consider a junction between two curves, for example between a portion of circle and a line. We also could consider junctions at higher (or lower) order of regularity. The aim would be to obtain a classification of the different types of boundary layers that could appear in the expansions. This would lead to treat the case of a general curve. This kind of problem also has a direct link with three-dimensional problems by considering surfaces of revolution or more generally surfaces generated by the displacement of a fixed curve.

Partie A

Etude générale

Chapitre I

Elasticité linéaire sur une coque mince et géométrie différentielle

Le but de ce chapitre est de poser le problème de l'élasticité linéaire sur un ouvert de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$ qui a la particularité d'avoir une de ses dimensions beaucoup plus petite que les autres. D'une façon intuitive, une coque mince est en fait une surface de l'espace qui est "épaissie". Physiquement, le problème posé est celui de trouver le déplacement d'une coque remplie d'un matériau élastique soumise à des forces volumiques et des conditions aux limites sur son bord. Une fois défini le modèle que l'on prend comme point de départ, qui est ici celui de l'élasticité tridimensionnelle linéaire pour un matériau homogène et isotrope, on profite alors de la structure de la coque pour se placer dans un système de coordonnées "normales" plus adapté pour étudier la structure asymptotique du déplacement quand l'épaisseur de la coque tend vers 0. Le passage dans ce système de coordonnées nécessite l'emploi d'objets définis sur des variétés riemanniennes, objets dont les définitions et les règles d'emploi sont rappelées ci-dessous.

1 Position du problème

1.1 Définition d'une coque mince

Une coque, ou plus précisément l'ouvert définissant la coque, est définie à partir d'une surface abstraite S, compacte et orientable, de classe $\mathscr{C}^\infty$, à bord (éventuellement réduit à $\emptyset$) qui est plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^3$ (pour toutes ces notions voir par exemple [23], [24], [4], [27] et la section 2 de ce chapitre). Cette dernière hypothèse est la plus naturelle pour représenter des phénomènes physiques et impose, comme on le verra plus loin, la donnée de la métrique sur S. Toutefois, on identifiera le plus souvent un point de S avec son image par le plongement. Sur cette surface est définie une normale unitaire N, qui existe globalement grâce à l'hypothèse d'orientabilité. Dans toute la suite, le paramètre ε désignera la demi-épaisseur physique de la coque, et à ce titre sera strictement positif et appelé à tendre vers 0. On définit alors l'ouvert de référence Ω^ε de la coque comme l'image de l'application $\Phi^\varepsilon : S \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ qui à (P, h) fait correspondre le point $P + hN(P)$ de l'espace. De manière plus intrinsèque, sans faire référence à la structure algébrique de $\mathbb{R}^3$, le point $\Phi^\varepsilon(P, h)$ est la translation de longueur h le long de la géodésique de l'espace ambiant (ici $\mathbb{R}^3$) partant de P, un point de la sous-variété plongée, dans la direction N. A ce titre, il devrait être écrit $\exp_P(hN(P))$. Ce type de situation entraîne des propriétés particulières sur la métrique de Ω^ε écrite dans un système de coordonnées normales.

La surface S étant compacte, il est évident qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, l'application Φ^ε soit un difféomorphisme entre la variété produit $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ et son image. Dans toute la suite, on se place dans cette situation. Pour ε fixé, l'ensemble Ω^ε n'est en fait qu'un ouvert de $\mathbb{R}^3$ qui admet deux paramétrisations naturelles : d'une part celle issue de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$, d'autre part celle issue du difféomorphisme Φ^ε. Dans la suite, on notera S_h la surface de $\mathbb{R}^3$ définie comme l'image de S par l'application $\Phi^\varepsilon(\,\cdot\,, h)$ à h fixé. La surface S_0 de $\mathbb{R}^3$ s'identifie donc à la surface S via le plongement initial.

1.2 Equations de l'élasticité

On suppose désormais que la surface S à un bord ∂S non réduit à $\emptyset$. La coque géométrique présente ainsi un bord latéral Γ_0^ε image par Φ^ε de $\partial S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, et deux faces S_ε et $S_{-\varepsilon}$.

Supposons que l'ouvert Ω^ε soit rempli d'un matériau élastique *homogène et isotrope* (voir [7]) formant ainsi une coque soumise à des forces volumiques décrites par un champ de vecteurs noté

$$\boldsymbol{f} = f^i \frac{\partial}{\partial t^i}$$

dans un système de coordonnées cartésiennes $\{t^i\}$ de $\mathbb{R}^3$. La notation en dérivée partielle fait référence à la structure de variété de $\mathbb{R}^3$ et sera d'un usage constant par la suite. Dans le cas présent, les vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial t^i}$ sont simplement égaux aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Dans toute la suite, on fera usage de la convention de sommation des indices répétés. Notons que dans $\mathbb{R}^3$, il n'y a pas lieu de distinguer les composantes d'un vecteur avec les composantes de la 1-forme associée dans le cadre Riemannien (voir la sous-section 2.2). Néanmoins, lorsque l'on passera en coordonnées normales, cette distinction aura de l'importance.

D'autre part, la coque est soumise à des conditions aux limites et dans la suite nous nous limiterons au cas où Ω^ε est encastrée le long de son bord latéral Γ_0^ε.

De même, on se place dans une théorie de l'élasticité linéaire. La validité physique de ce modèle est assez restreinte (voir [7]), mais il sera dans le cas présent "la réalité" en ce sens que les approximations que l'on pourra faire par la suite seront d'autant meilleures qu'elles seront proches de la solution de ce modèle. On note $\boldsymbol{u}$ le déplacement. Il s'agit d'une 1-forme définie sur Ω^ε. De même on note $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})$ le tenseur linéarisé des déformations lié au déplacement $\boldsymbol{u}$. En coordonnées cartésiennes, les composantes du tenseur des déformations associé à la 1-forme $\boldsymbol{u} = u_i \mathrm{d}t^i$ sont

$$\begin{aligned} e_{ij}(\boldsymbol{u}) &= \tfrac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \\ &= \tfrac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad \text{en coordonnées} \quad \{t^i\}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où ∂_i désigne la dérivée dans la direction t^i. Enfin, la donnée du matériau équivaut, sous les hypothèses faites, à la donnée des coefficients de Lamé $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, auxquels est associé le tenseur de rigidité $\boldsymbol{A}$ dont les composantes contravariantes dans le système $\{t^i\}$ s'écrivent

$$A^{ijk\ell} = \lambda\delta^{ij}\delta^{k\ell} + \mu(\delta^{ik}\delta^{j\ell} + \delta^{i\ell}\delta^{jk}), \tag{1.2}$$

où δ^{ij} désigne le symbole de Kronecker classique, valant 1 si $i = j$ et 0 sinon. On vérifie alors que le tenseur $\boldsymbol{A}$ est défini positif sur l'espace des tenseurs symétriques deux fois covariants.

Lié aux conditions d'encastrement, on définit l'espace des déplacements admissibles comme

$$V(\Omega^\varepsilon) = \{\boldsymbol{u} = u_i \mathrm{d}t^i \mid u_i \in \mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)\ ,\ \boldsymbol{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\} \tag{1.3}$$

dont la définition ne dépend pas du système de coordonnées choisi. Le problème de l'élasticité linéaire pour une coque encastrée le long de son bord latéral est alors celui de trouver $\boldsymbol{u} \in V(\Omega^\varepsilon)$ tel que

$$\forall \boldsymbol{v} \in V(\Omega^\varepsilon) \quad \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijk\ell} e_{ij}(\boldsymbol{u}) e_{k\ell}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}t^1 \mathrm{d}t^2 \mathrm{d}t^3 = \int_{\Omega^\varepsilon} f^i v_i \, \mathrm{d}t^1 \mathrm{d}t^2 \mathrm{d}t^3. \tag{1.4}$$

C'est le problème classique de l'élasticité linéaire posée en coordonnées cartésiennes sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$ qui a la forme d'une coque. Ce système de coordonnées existe sur tout l'ouvert Ω^ε et dans cet ouvert les expressions (1.2) et (1.1) sont valides. Sous cette forme, on ne peut pas exploiter les équations pour en étudier la dépendance en ε. Néanmoins, le tenseur $\boldsymbol{A}$ a une existence globale sur la variété et on remarque que toutes les fonctions intégrées sur Ω^ε ont des interprétations intrinsèques. Pour le membre de gauche, il s'agit de la contraction naturelle "1-1,2-2,3-3,4-4" (voir la sous-section 2.2) du tenseur $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})$ dont les composantes en coordonnées cartésiennes sont

$$T^{ijk\ell}{}_{pqrs} = A^{ijk\ell} e_{pq}(\boldsymbol{u}) e_{rs}(\boldsymbol{v}).$$

Pour le membre de droite de (1.4), il s'agit du produit naturel entre le vecteur $\boldsymbol{f}$ et la 1-forme $\boldsymbol{v}$ issu de la contraction du tenseur $\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{v}$ dont les composantes en coordonnées cartésiennes sont $f^i v_j$ si $\boldsymbol{v} = v_j \mathrm{d}t^j$.

Grâce à la positivité du tenseur $\boldsymbol{A}$ et à l'inégalité de Korn (voir Duvaut & Lions [25]), on peut montrer que le problème (1.4) possède une unique solution si $\boldsymbol{f}$ appartient au dual de $V(\Omega^\varepsilon)$. La suite de ce travail est l'étude de la dépendance en ε de cette solution lorsque $\boldsymbol{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et dépend de ε de manière suffisamment régulière.

Du fait de la structure de la coque il est naturel de se placer dans le système de coordonnées ayant servi à définir Ω^ε où h, dont l'ensemble de définition dépend de ε, joue pour une coque "générique" le rôle de la composante transverse pour une plaque. Mais pour cela, on a besoin d'effectuer un changement de paramétrisation qui amènera à poser les équations sur les surfaces S_h en termes de dérivées covariantes relatives à ces surfaces.

2 Géométrie riemannienne

Le but de cette section est de fournir le matériel technique pour travailler dans le système de coordonnées normales faisant intervenir explicitement h. Pour cela on étudie les propriétés de variétés différentiables plus générales que celles apparaissant dans la situation des coques. Après des rappels généraux sur les champs de vecteurs sur une variété, on définit les connexions linéaires, les champs de tenseurs, et enfin la structure riemannienne. On étudie ensuite les plongements isométriques qui généralisent le cas d'une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$.

2.1 Définitions

On désigne par M une variété orientable compacte, de classe $\mathscr{C}^\infty$, éventuellement à bord et de dimension n quelconque.

Cette variété est donc par définition munie d'un atlas constitué de cartes locales $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ où les U_i sont des ouverts de M tels que $\bigcup_{i\in I} U_i = M$ et les ϕ_i des applications injectives de U_i dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $\forall\, i, j \in I$ tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\phi_i(U_i \cap U_j)$ sur $\phi_j(U_i \cap U_j)$.

La donnée d'une carte locale (U, ϕ) définit sur l'ouvert U un système de coordonnées locales. Si on note ξ^i l'application i-ème coordonnée de $\mathbb{R}^n$, on définit sur $U \subset M$ la fonction

$$y^i(P) = (\xi^i \circ \phi)(P). \tag{2.1}$$

On note alors $\{y^i\}$ le système de coordonnées sur U induit par ϕ.

Définition 2.1 Soit $P \in M$, et (U, ϕ) une carte locale telle que $P \in U$. On considère l'ensemble des courbes α de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui passent par P du type :

$$\mathbb{R} \supset\,]-a, a[\, \ni t \overset{\alpha}{\longmapsto} \alpha(t) \in M, \quad \alpha(0) = P.$$

On définit sur ces courbes la relation d'équivalence

$$\alpha \sim \widetilde{\alpha} \quad \text{si} \quad d(\phi \circ \alpha)_{t=0} = d(\phi \circ \widetilde{\alpha})_{t=0}.$$

Cette notion ne dépend pas de la carte choisie. Une classe d'équivalence pour cette relation est un vecteur tangent à M en P. L'ensemble des classes d'équivalence est l'espace tangent à M en P et est noté $T_P M$. ■

Un vecteur tangent en un point P peut aussi être vu comme un opérateur de dérivation. Si on note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ définies au voisinage de P, on dira que $f \in \mathcal{F}$ est plate en P si pour une carte locale (U, ϕ) en P, $d(f \circ \phi^{-1})_{\phi(P)} = 0$. Cette notion ne dépend pas de la carte, et on a la

Proposition 2.2 *Un vecteur tangent en P est une application linéaire de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur les fonctions plates et réciproquement.*

Notons simplement comment faire le lien avec les courbes : si $\alpha(t)$ est comme dans la définition 2.1, on peut définir une application $X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ en posant

$$X(f) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\alpha(t))\right)_{t=0}.$$

Remarquons alors que la proposition 2.2 entraîne que si $X \in T_P M$ et $f, g \in \mathcal{F}$, on a

$$X(fg) = f(P)X(g) + g(P)X(f),$$

d'où le nom d'opérateur de dérivation. Elle permet aussi de munir $T_P M$ d'une structure d'espace vectoriel. Si (U, ϕ) est une carte locale en P et si $\{y^i\}$ est le système de coordonnées associé, on pose alors pour $f \in \mathcal{F}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_P (f) = \left(\frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial \xi^i}\right)_{\phi(P)},$$

où comme précédemment, les $\{\xi^i\}$ sont les coordonnées sur $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$. On note aussi l'expression précédente $\partial_i f$. Ceci définit bien un vecteur tangent en P, et avec (2.1), on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_P y^j = \delta_i^j. \tag{2.2}$$

Ces n vecteurs tangents sont donc indépendants et on montre qu'ils engendrent $T_P M$, c'est-à-dire que si $Y \in T_P M$, il existe une unique décomposition

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_P .$$

Définition 2.3 Le *fibré tangent* est l'ensemble

$$T^1 M = \bigcup_{P \in M} T_P M, \tag{2.3}$$

muni de la structure de variété de classe $\mathscr{C}^\infty$ naturellement issue de celle de M.
■

Un élément du fibré tangent est donc repéré par un couple (P, X) où P est un point de M et $X \in T_P M$. L'exposant ^{1} dans (2.3) provient d'une notation plus générale pour les tenseurs (voir la sous-section 2.2).

Dans le but de généraliser certaines propriétés du fibré tangent à d'autres types d'espaces, on pose

Définition 2.4 Une variété E de classe $\mathscr{C}^\infty$ est un *espace fibré* (vectoriel) s'il existe une variété M de classe $\mathscr{C}^\infty$ (appelée la base) et une application $\pi : E \to M$, $\mathscr{C}^\infty$ telle que

- $\forall\, P \in M \quad \pi^{-1}(P) = E_P$ est isomorphe à un espace vectoriel F,
- $\forall\, P \in M \quad \exists\, U$ voisinage de P tel que $\pi^{-1}(U)$ soit difféomorphe à $U \times F$, le difféomorphisme étant linéaire sur les E_P.

Les E_P sont appelés les fibres et F est la fibre type. Une *section* de E est une application $\mathscr{C}^\infty$ $\xi : M \to E$ telle que $\xi \circ \pi = Id$. L'ensemble des sections est noté $\Gamma(E)$. ■

La variété $T^1 M$ est un espace fibré de base M et de fibre type $\mathbb{R}^n$. Un *champ de vecteurs* sur M est une section de $T^1 M$ (c'est-à-dire un élément de $\Gamma(T^1 M)$). Malgré son caractère global, c'est en fait une notion locale sur la variété (on peut remplacer M par un de ses ouverts). Si (U,ϕ) est une carte locale définissant une système de coordonnées $\{y^i\}$, un champ de vecteurs Z aura une décomposition

$$Z = Z^i(y)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_P$$

avec la convention de sommation des indices répétés, et où y désigne les coordonnées du point P dans la carte. Cette fois les Z^i sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur U.

De même qu'un vecteur tangent en P agit sur des fonctions définies au voisinage de P, un champ de vecteurs Z agit sur des fonctions f qui sont $\mathscr{C}^\infty$ sur toute la variété (ou seulement sur un ouvert), le résultat $Z(f)$ étant lui-même une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur le domaine de f. La valeur d'un champ de vecteurs Z en un point P est connue dès que l'on connaît $Z(f)$ pour toutes les fonctions f qui sont $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de P.

Définition 2.5 Le *crochet* de deux champs de vecteurs Y et Z, noté $[Y,Z]$, est le champ de vecteurs défini par

$$[Y,Z]_P(f) = Y\big(Z(f)\big)_P - Z\big(Y(f)\big)_P,$$

si f est $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage d'un point $P \in M$. ∎

Dans un système de coordonnées $\{y^i\}$, si avec les notations précédentes

$$Y = Y^i\frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{et} \quad Z = Z^i\frac{\partial}{\partial y^i}$$

alors on a

$$[Y,Z] = (Y^i\partial_i Z^j - Z^i\partial_i Y^j)\frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{2.4}$$

A un champ de vecteurs Y est associé un groupe local à un paramètre de difféomorphisme locaux $H_t : M \to M$ tel que H_0 soit l'identité et que

$$\forall\, P \in M \quad \text{et} \quad \forall\, f \in \mathscr{C}^\infty(M), \quad Y(f)_P = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(H_t(P)\big)\right)_{t=0}.$$

La terminologie provient du fait que pour t et s assez petits et P dans un ouvert U de M assez petit, on a

$$H_t \circ H_s(P) = H_{t+s}(P)$$

et H_t est un difféomorphisme de U sur son image.

Avec la formule précédente (2.4), on voit que les champs de vecteurs coordonnées ont des crochets nuls deux à deux. Mais dire que deux champs de vecteurs Y et Z indépendants en tout point commutent ($[Y, Z] = 0$), c'est dire que leurs groupes locaux à un paramètre respectifs H_t et G_s commutent au sens où

$$H_t \circ G_s = G_s \circ H_t.$$

Si on prend alors n champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_n$ tels que sur un ouvert U de la variété, ils soient indépendants en tout point, alors ils commutent deux à deux si et seulement si ils définissent des champs de vecteurs de coordonnées sur U (voir [42]).

Enfin, notons que si (U, ϕ) est une carte locale, et si f est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ définie sur U, alors on peut définir la différentielle $\mathrm{d}f$ de f simplement comme $d(f \circ \phi^{-1}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Si $P \in U$, alors $\mathrm{d}f$ agit sur les vecteurs de $T_P M$ grâce à la formule

$$\forall\, Y \in T_P M \quad \mathrm{d}f(Y) = Y(f). \tag{2.5}$$

Dans un système de coordonnées $\{y^i\}$ au voisinage de $P \in M$, l'espace tangent en $P \in M$ possède la base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\}.$$

Grâce aux formules (2.2) et (2.5), la base de $T_P^* M$ duale de la précédente s'identifie alors à

$$\left\{ \mathrm{d}y^1, \ldots, \mathrm{d}y^n \right\}.$$

Un élément α de $T_P^* M$ est appelé une 1-forme. Sa décomposition dans la base précédente est notée

$$\alpha = \alpha_i \mathrm{d}y^i.$$

Comme pour $T^1 M$ on définit

$$T_1 M = \bigcup_{P \in M} T_P^* M$$

appelé *fibré cotangent.*

On verra dans le chapitre II comment la notion de différentielle peut être étendue aux difféomorphismes entre variétés (et en fait plus généralement aux applications différentiables d'une variété dans une autre).

2.2 Connexions linéaires et champs de tenseurs

Dans cette section, on définit un outil qui est employé constamment dans la manipulation des équations de l'élasticité sur une coque. Cet outil généralise la notion de dérivation et permet d'écrire les équations de manière très condensée, et surtout intrinsèque, c'est-à-dire sous une forme ne dépendant pas de la carte.

Définition 2.6 Une *connexion linéaire* est la donnée d'une application ∇ appelée *dérivée covariante*

$$\nabla : T^1M \times \Gamma(T^1M) \to T^1M$$

notée $(Z,Y) \to \nabla_Z Y$ (pour $Z \in T^1M$ et $Y \in \Gamma(T^1M)$) telle que

- Si $Z \in T_PM$, $\nabla_Z Y \in T_PM$.
- La restriction de ∇ à $T_PM \times \Gamma(T^1M)$ est bilinéaire pour tout P (si $\Gamma(T^1M)$ est vu comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel).
- Si f est $\mathscr{C}^\infty$, $\nabla_Z(fY) = Z(f)Y + f\,\nabla_Z Y$.
- Si $Z \in \Gamma(T^1M)$ alors $\nabla_Z Y \in \Gamma(T^1M)$.

■

Si dans le système de coordonnées locales $\{y^i\}$ on note les composantes de Z et Y respectivement Z^i et Y^i , alors on a

$$\nabla_Z Y = \sum_{i=1}^{n} Z^i \sum_{j=1}^{n} \left((\partial_i Y^j) \frac{\partial}{\partial y^j} + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} \right). \tag{2.6}$$

Définition 2.7 On appelle *symboles de Christoffel* associés à la connexion ∇ et au système de coordonnée $\{y^i\}$ les n^3 fonctions Γ_{ij}^k telles que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k}. \tag{2.7}$$

■

D'après (2.6), la connaissance d'une connexion dans une carte locale se réduit à celle de ses symboles de Christoffel.

Si $c(t)$ est une courbe tracée sur la variété, le vecteur $c'(t)$ appartient à $T_{c(t)}M$. Les équations (2.6) montrent que $\nabla_{c'(t)}Y$ ne dépend en fait que de la valeur de Y le long de $c(t)$. Ainsi l'expression $\nabla_{c'(t)}Y$ prend un sens dès que Y est un champ de vecteurs défini le long de $c(t)$. On donne alors la définition suivante (voir [24]) :

Définition 2.8 Soit I un intervalle et $c : I \to M$ une courbe $\mathscr{C}^\infty$ sur la variété M . Un *champ de vecteur parallèle* le long de c est un champ de vecteurs Y défini le long de la courbe c tel que $\nabla_{c'(t)}Y = 0$. Si $t_0 \in I$, et si $Y_0 \in T_{c(t_0)}M$, il existe un unique champ de vecteurs Y parallèle le long de c tel que $Y_{c(t_0)} = Y_0$. Si $t \in I$, l'application $P_{c,t_0,t} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t)}M$ définie par l'équation

$$P_{c,t_0,t} Y_0 := Y_{c(t)} \tag{2.8}$$

est appelée *transport parallèle* le long de c de t_0 à t du vecteur Y_0 . ■

Une *géodésique* de M associée à ∇ est alors une courbe $c(t)$ de M telle que le champ de vecteurs tangent $c'(t)$ soit un champ de vecteur parallèle sur $c(t)$, ce qui signifie que $\nabla_{c'(t)}c'(t) = 0$. L'application exponentielle $\exp_P(tX)$ où $P \in M$ et $X \in T_PM$ est définie comme le point obtenu en parcourant la géodésique issue de P dans la direction X sur une longueur t. L'application $\exp_P$ est bien définie pour t assez petit, et même, en normalisant X, sur un ouvert de $M \times \mathbb{R}$ assez petit.

Une des propriétés de la dérivée covariante est qu'elle peut s'étendre aux tenseurs définis sur la variété. Avant de développer plus avant cette notion, on va définir les espaces fibrés tensoriels et les champs de tenseurs sur M.

Définition 2.9 Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Le *produit tensoriel*, $\otimes$, est une application bilinéaire associative définie sur $E \times F$, d'image notée $E \otimes F$, telle que si $\{x_i\}$ et $\{y_j\}$ sont des bases de E et F respectivement, alors $\{x_i \otimes y_j\}$ est une base de $E \otimes F$. Un (p,q)-*tenseur* sur E est un scalaire si $p = q = 0$ et un élément de

$$F_1 \otimes F_2 \otimes \cdots \otimes F_{p+q},$$

où p des F_i sont égaux à E^* et q des F_i sont égaux à E sinon. On dit que le tenseur est p-fois *covariant* et q-fois *contravariant.* Le *type* d'un tenseur est le couple d'entier (p,q), le *sous-type* est le sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, p+q\}$ constitué des i pour lesquels $F_i = E^*$. ■

Une base $\{e_i\}$ de E induit naturellement une base pour l'ensemble $\bigotimes_{i=1}^{p+q} F_i$ avec un type et sous-type donné en prenant pour base de E^* la base $\{f^j\}$ duale de $\{e_i\}$ et en effectuant les produits tensoriels successifs de tels éléments. Lorsqu'on écrit les composantes d'un tenseur dans une telle base, les indices contravariants sont placés en haut, les covariants sont placés en bas, en laissant des blancs ou des points car l'ordre de l'indice par rapport aux autres a de l'importance (voir [49]).

Définition 2.10 Un tenseur purement covariant ou purement contravariant est *symétrique* si ses composantes dans une base sont invariantes par permutation des indices. ■

Un tenseur T de type $(p,0)$, c'est-à-dire purement covariant, s'écrira dans une base

$$T = \sum_{1 \leq \lambda_i \leq n} T_{\lambda_1 \cdots \lambda_p} f^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes f^{\lambda_p}.$$

Dans ce cas, il n'y a pas lieu de distinguer de sous-type. Si maintenant on considère le cas où $F_1 = E$, $F_2, \ldots, F_{p+1} = E^*$ et $F_{p+2}, \ldots, F_{p+q} = E$, alors une base de

$F_1 \otimes \cdots \otimes F_{p+q}$ est formée des éléments

$$e_{\lambda_1} \otimes f^{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes f^{\lambda_{p+1}} \otimes e_{\lambda_{p+2}} \otimes \cdots \otimes e_{\lambda_{p+q}}, \tag{2.9}$$

les λ_i prenant les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Cette fois, un sous-type est donné qui distingue cet espace de tenseurs des autres espaces de tenseurs de type (p, q). L'espace considéré est différent de celui où par exemple $F_1 = \cdots = F_p = E^*$ et $F_{p+2} = \cdots = F_{p+q} = E$. Un (p, q)-tenseur S de sous type lié à (2.9) s'écrit

$$S = \sum_{1 \leq \lambda_i \leq n} S^{\lambda_1}{}_{\lambda_2 \cdots \lambda_{p+1}}{}^{\lambda_{p+2} \cdots \lambda_{p+q}} e_{\lambda_1} \otimes f^{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes f^{\lambda_{p+1}} \otimes e_{\lambda_{p+2}} \otimes \cdots \otimes e_{\lambda_{p+q}}. \tag{2.10}$$

On laisse au lecteur le soin de généraliser à d'autres configurations de la suite F_i. La donnée d'un tenseur équivaut à celle de ses composantes dans une base.

On montre que si $\mathrm{End}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E, on a un isomorphisme *canonique*

$$E^* \otimes E \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(E), \tag{2.11}$$

tel que si

$$A = A_{i\cdot}^{\cdot j} f^i \otimes e_i \in E^* \otimes E,$$

et si $x = x^k e_k \in E$, on ait

$$A(x) = A_{i\cdot}^{\cdot j} x^i e_j .$$

La correspondance (2.11) est fournie par l'outil suivant :

Définition 2.11 La *contraction* d'un indice covariant avec un indice contravariant d'un (p, q)-tenseur T est un $(p-1, q-1)$-tenseur dont les composantes dans une base sont obtenues à partir de celles de T par sommation sur les indices désignés.
■

Bien que définie à l'aide des composantes d'un tenseur dans une base, la contraction (qui est une trace) ne dépend pas de la base choisie. Avec le tenseur S de la formule (2.10), la contraction des deux premiers indices de S fournit un $(p-1, q-1)$-tenseur dont les composantes sont

$$\sum_{i=1}^{n} S^i{}_{i\lambda_3 \cdots \lambda_{p+1}}{}^{\lambda_{p+2} \cdots \lambda_{p+q}}.$$

Si on a un tenseur purement covariant T de composantes $T_{\lambda_1 \cdots \lambda_p}$ dans une base donnée, il définit une forme multilinéaire sur E grâce à la contraction. En effet, si $X_1, \ldots, X_p$ sont des vecteurs de E, et si X_j^i désigne la i-ème composante de X_j, alors les contractions successives λ_i - μ_i du tenseur

$$T \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_p,$$

dont les composantes sont données par

$$T_{\lambda_1 \cdots \lambda_p} X_1^{\mu_1} \cdots X_p^{\mu_p}, \tag{2.12}$$

donne le scalaire

$$T(X_1, \ldots, X_p) = \sum_{1 \leq \lambda_i \leq n} T_{\lambda_1 \cdots \lambda_p} X_1^{\lambda_1} \cdots X_p^{\lambda_p}. \tag{2.13}$$

L'application ainsi définie est multilinéaire sur E, symétrique si le tenseur est symétrique au sens de la définition 2.10.

Plus généralement, en effectuant des produits tensoriels et des contractions, on peut voir un tenseur de type (p,q) et de sous-type $\boldsymbol{F} \subset \{1, \ldots, , p+q\}$ comme une application multilinéaire sur l'espace produit $G_1 \times \cdots \times G_{p+q}$ où $G_i = E$ si $i \in \boldsymbol{F}$ et $G_i = E^*$ sinon. Au lieu d'agir sur des vecteurs comme dans les formules (2.12) et (2.13), le tenseur agit sur des vecteurs et des 1-formes (éléments de E^*) écrites dans la base duale de celle choisie pour E. Par exemple le tenseur S dont les composantes dans une base sont $S^i{}_{jk}$ (ou encore $S^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$) définit une application multilinéaire sur $E^* \times E \times E$. Si $X, Y \in E$, de composantes X^i et Y^i dans la base donnée et si $\alpha \in E^*$, de composantes α_i dans la base duale, alors

$$S(\alpha, X, Y) = S^i{}_{jk}\, \alpha_i X^j Y^k.$$

Réciproquement, la donnée d'une application multilinéaire sur un espace Π produit cartésien d'espaces égaux à E ou E^* définit un unique tenseur de type et de sous-type déterminé par Π, dont les composantes dans une base donnée sont les images des éléments de la base de l'espace produit Π formée à partir de la base initiale de E.

Sur une variété M, on peut définir des espaces de tenseurs à partir de l'espace tangent en un point P. De la même manière que l'on forme le fibré tangent à partir de $T_P M$, le fibré cotangent à partir de $T_P^* M$, on peut former des espaces fibrés tensoriels du type

$$\bigcup_{P \in M} F_P^1 \otimes \cdots \otimes F_P^{p+q}, \tag{2.14}$$

où les F_P^i sont égaux soit à $T_P M$, soit à $T_P^* M$. On peut munir ces ensembles fibrés de structures de variétés $\mathscr{C}^\infty$. Les notions de type, sous-type et la contraction d'indices sont encore valables sur ces espaces de tenseurs, pourvu que l'on raisonne en un point P fixé.

Définition 2.12 Une section d'un espace fibré du type (2.14) où p des F_P^i sont égaux à $T_P^* M$ et les autres à $T_P M$ est appelé un *champ de tenseurs* de type (p,q).

■

Notation 2.13 Lorsque tous les indices d'un tenseurs sont de même nature, on note les fibrés tensoriels correspondants

$$T^pM = \bigcup_{P\in M} \overset{p}{\otimes} T_PM \quad \text{et} \quad T_pM = \bigcup_{P\in M} \overset{p}{\otimes} T_P^*M.$$

Les espaces des champs de tenseurs correspondants sont notés $\Gamma(T^pM)$ et $\Gamma(T_pM)$.

■

Ainsi, les champs de tenseurs de type $(0,1)$ sont les champs de vecteurs, et les champs de tenseurs de type $(1,0)$ sont les champs de 1-formes.

Un champ de tenseurs se caractérise par le comportement de ses composantes lorsqu'on change de base pour l'espace vectoriel T_PM, ce qui correspond à un changement de carte locale. Soit $\{y^i\}$ un système de coordonnées autour d'un point $P \in M$. Pour fixer les idées, plaçons nous dans le cas où le sous-type des tenseurs considérés est celui de l'équation (2.10). Selon la définition 2.9, on notera aussi ce sous-type $\{2, \dots, p+1\}$. La base de T_PM considérée est donc maintenant $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$, et la base duale correspondante $\{\mathrm{d}y^i\}$. Un tenseur S de sous-type $\{2, \dots, p+1\}$ est donc donné par

$$S = \sum_{1\leq \lambda_i \leq n} S(y)^{\lambda_1}{}_{\lambda_2\cdots\lambda_{p+1}}{}^{\lambda_{p+2}\cdots\lambda_{p+q}} \frac{\partial}{\partial y^{\lambda_1}} \otimes \mathrm{d}y^{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}y^{\lambda_{p+1}} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\lambda_{p+2}}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\lambda_{p+q}}}. \tag{2.15}$$

Dans cette équation, les composantes $S(y)^{\lambda_1}{}_{\lambda_2\cdots\lambda_{p+1}}{}^{\lambda_{p+2}\cdots\lambda_{p+q}}$ dépendent de $P \in M$, via ses coordonnées y.

Si $\{x^k\}$ est un nouveau système de coordonnées autour de P, alors on a les relations

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{\alpha=1}^{n} A_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}y^j = \sum_{\beta=1}^{n} B_\beta^j \mathrm{d}x^\beta,$$

où A_i^α et B_β^j sont des matrices inverses l'une de l'autre (ici les indices grecs prennent les valeurs $1, \dots, n$ comme les indices latins). Ces matrices sont les matrices jacobiennes des changements de cartes associés et dépendent de $P \in M$ de manière $\mathscr{C}^\infty$. La bilinéarité du produit tensoriel montre que les composantes du tenseurs S dans le nouveau système de coordonnée $\{x^k\}$ par rapport à ses composantes dans le système initial sont

$$S(x)^{\mu_1}{}_{\mu_2\cdots\mu_{p+1}}{}^{\mu_{p+2}\cdots\mu_{p+q}} = \sum_{1\leq\lambda_i\leq n} S(y)^{\lambda_1}{}_{\lambda_2\cdots\lambda_{p+1}}{}^{\lambda_{p+2}\cdots\lambda_{p+q}} A_{\lambda_1}^{\mu_1} B_{\mu_2}^{\lambda_2} \cdots B_{\mu_{p+1}}^{\lambda_{p+1}} A_{\lambda_{p+2}}^{\mu_{p+2}} \cdots A_{\lambda_{p+q}}^{\mu_{p+q}}. \tag{2.16}$$

Ceci fournit un critère de tensorialité pour savoir si la donnée de fonctions

$$S(y)^{\lambda_1}{}_{\lambda_2\cdots\lambda_{p+1}}{}^{\lambda_{p+2}\cdots\lambda_{p+q}}$$

sur un espace vectoriel dans un système de coordonnées fixé définit bien un champ de tenseurs sur la variété M. Si elles se transforment d'après la loi (2.16) dans un changement de coordonnées quelconque, alors elles définissent bien un champ de tenseurs qui est donné par (2.15) dans un système de coordonnées.

Remarque 2.14 On peut montrer alors que les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k d'une connexion linéaire ne définissent pas un tenseur de type $(2,1)$. En effet, si on désigne les symboles de Christoffel par Γ_{ij}^k dans un système de coordonnées et par $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ dans un autre système, on a

$$\Gamma_{ij}^k = A_i^p A_j^q B_r^k \widetilde{\Gamma}_{pq}^r + B_p^k \frac{\partial A_j^p}{\partial x^i},$$

où A_i^p et B_p^k sont les matrices de changement de base, c'est à dire les matrices jacobiennes des changements de cartes associés. Le dernier terme est le terme "parasite" qui empêche les symboles de Christoffel d'être les composantes d'un champ de tenseurs dans une carte. ∎

De la même manière qu'un tenseur sur un espace vectoriel E définit une application multilinéaire sur E ou sur un produit d'espaces E ou E^*, un champ de tenseurs définit naturellement une application multilinéaire sur un produit d'espaces $\Gamma(T^1M)$ des champs de vecteurs ou $\Gamma(T_1M)$ des champs de 1-formes. La linéarité est ici à comprendre "fibre par fibre", c'est-à-dire sur les modules $\Gamma(T^1M)$ et $\Gamma(T_1M)$ avec comme anneau des scalaires $\mathscr{C}^\infty(M)$. Comme pour les tenseurs, la réciproque est vraie, et une application multilinéaire sur un $\mathscr{C}^\infty(M)$-module produit Π d'espaces égaux à $\Gamma(T^1M)$ ou $\Gamma(T_1M)$ définit un unique champ de tenseurs de type et de sous-type déterminé dont les composantes dans une base locale sont les images des éléments formant la base locale de Π associée.

Remarque 2.15 Dire qu'une application A est linéaire sur un module du type précédent, dont l'anneau est un ensemble de fonctions sur M, c'est dire que ces fonctions agissent vis-à-vis de A comme les scalaires vis-à-vis d'une application linéaire sur un espace vectoriel. Par exemple, si A est une application linéaire sur le $\mathscr{C}^\infty(M)$-module $\Gamma(T^1M)$, et si $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, alors on a pour tout $P \in M$ et $Y \in \Gamma(T^1M)$,

$$A(fY)_P = f(P)A(Y)_P.$$

Si on note Y^i les coordonnées de Y dans une base locale, alors grâce à la propriété précédente, on a

$$A(Y)_P = Y^i(P)A\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_P,$$

qui traduit le fait que $A(Y)$ ne dépend en fait que des valeurs de Y au point P. Par la suite, on se servira de cette caractérisation d'un champ de tenseurs : une application $\mathbb{R}$-linéaire définie sur un $\mathscr{C}^\infty(M)$-module produit Π d'espaces égaux à $\Gamma(T^1M)$ ou $\Gamma(T_1M)$ s'identifie à un champ de tenseurs si sa valeur sur un élément T de Π en un point P donné ne dépend que la valeur de T au point P. ∎

La notion de dérivée covariante par rapport à un vecteur tangent, qui pour l'instant n'est définie que sur les champs de vecteurs (qui sont des tenseurs une fois contravariants), s'étend aux champs de tenseurs plus généraux grâce au résultat suivant (voir par exemple [4]) :

Proposition 2.16 *Supposons que l'on ait une connexion linéaire ∇ sur M. Soit $Z \in T^1M$. L'application ∇_Z de $\Gamma(T^1M)$ dans T^1M admet une unique extension aux espaces des champs de tenseurs, satisfaisant :*

- *Pour des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur M (qui sont de $(0,0)$-champs de tenseurs), $\nabla_Z(f) = Z(f)$.*
- *∇_Z préserve le type (et le sous-type) du tenseur, c'est-à-dire envoie un espace de tenseurs d'un type donné en un point P dans lui-même.*
- *∇_Z commute avec la contraction.*
- *$\nabla_Z(S \otimes T) = (\nabla_Z S) \otimes T + S \otimes (\nabla_Z T)$, pour S et T des champs de tenseurs.*

Notons T_p^qM un fibré vectoriel de type (p,q) avec un sous-type fixé qu'on ne précise pas dans la notation. Si $Z \in \Gamma(T^1M)$ est donné et si $T \in \Gamma(T_p^qM)$, alors d'après la proposition précédente, $\nabla_Z T \in \Gamma(T_p^qM)$. Maintenant, si $T \in \Gamma(T_p^qM)$ est fixé, l'application $Z \to \nabla_Z T$ est linéaire de $\Gamma(T^1M)$ dans $\Gamma(T_p^qM)$ vus comme modules sur $\mathscr{C}^\infty(M)$. D'après la dualité champs de tenseurs - applications multilinéaires sur un module produit de $\Gamma(T^1M)$ ou $\Gamma(T_1M)$, on en déduit que ∇T définit un élément de $\Gamma(T_{p+1}^qM)$ dont le sous-type est défini à partir de celui de T de manière unique, telle que si T est de sous-type $\boldsymbol{F} \subset \{1,\ldots,p+q\}$ alors le sous-type de ∇T est

$$\{1\} \cup (\boldsymbol{F}+1) \subset \{1,\ldots,p+q+1\} \tag{2.17}$$

où $\boldsymbol{F}+1$ est l'ensemble formé des éléments de $\boldsymbol{F}$ auxquels on a chacun ajouté 1.

Les composantes du champ de tenseurs associé à une application multilinéaire étant les images des éléments d'une base locale, on fait la convention suivante :

Notation 2.17 Si on fixe une carte locale avec un système de coordonnées associé $\{y^i\}$, et si dans la base locale associée T a pour composantes $T_{\underline{\alpha}}^{\overline{\sigma}}$, où $\underline{\sigma}$ et $\underline{\alpha}$ représentent des systèmes d'indices contravariants et covariants pour un sous-type fixé, alors les composantes de ∇T dans la base locale seront notées

$$(\nabla T)_{i\underline{\alpha}}^{\cdot\underline{\sigma}} =: \nabla_i T_{\underline{\alpha}}^{\underline{\sigma}}.$$

∎

Cette notation est cohérente avec la dérivation d'une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ (qui est un $(0,0)$ champ de tenseurs) : si $Z = \dfrac{\partial}{\partial y^i}$, alors

$$\nabla_Z f = \nabla_i f = \partial_i f.$$

Pour un champ de vecteurs

$$Y = Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

dans un système de coordonnées locales $\{y^i\}$, les équations (2.6) et (2.7) avec $Z = \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ montrent que

$$(\nabla Y)_i{}^j = \nabla_i Y^j = \partial_i Y^j + \Gamma^j_{ik} Y^k. \tag{2.18}$$

Il ne faut pas confondre $\nabla_i Y^j$ avec $\nabla_i (Y^j)$. La première expression désigne la composante du tenseur ∇Y et la deuxième la dérivée covariante de la fonction Y^j sur la variété, et on a $\nabla_i (Y^j) = \partial_i Y^j$.

Pour calculer en coordonnées locales les composantes de la dérivée covariante d'un champ de tenseurs de type et de sous-type donné, on utilise les règles de la proposition 2.16.

Par exemple pour un champ de tenseurs une fois covariant $\alpha = \alpha_i \mathrm{d}y^i$ (c'est un champ de 1-formes), écrit dans un système de coordonnées, on sait que si

$$Y = Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

est un champ de vecteurs, alors la contraction $\alpha_j Y^j$ est une fonction. On a donc

$$\begin{aligned} \nabla_i(\alpha_j Y^j) &= \partial_i(\alpha_j Y^j) \\ &= Y^j \partial_i \alpha_j + \alpha_j \partial_i Y^j. \end{aligned}$$

D'autre part, grâce aux propriétés de la proposition précédente, on a

$$\nabla_i(\alpha_j Y^j) = \alpha_j \nabla_i Y^j + Y^j \nabla_i \alpha_j.$$

En remplaçant alors $\nabla_i Y^j$ par son expression (2.18), on trouve que

$$Y^j \nabla_i \alpha_j = Y^j \partial_i \alpha_j - \Gamma^k_{ij} \alpha_k Y^j.$$

L'expression étant vraie pour tout champ de vecteurs Y , on en déduit que

$$\nabla_i \alpha_j = \partial_i \alpha_j - \Gamma^k_{ij} \alpha_k.$$

De même pour calculer les composantes de la dérivée ∇T où T est un champ de tenseurs deux fois covariant T_{ij} (on ne précise plus le système de coordonnées locales), on considère d'abord la 1-forme $\alpha_i = T_{ij}X^j$ où X est un champ de vecteurs quelconque, et on utilise la formule précédente. On trouve que

$$\nabla_i T_{jk} = \partial_i T_{jk} - \Gamma^m_{ij} T_{mk} - \Gamma^m_{ik} T_{jm}. \tag{2.19}$$

Plus généralement, les composantes du champ de tenseurs ∇T pour un champ de tenseurs T donné se calculent en coordonnées locales comme précédemment, et on trouve dans cette expression un premier terme où, formellement, ∇ est remplacé par ∂, puis une somme de termes du type de ceux écrits plus haut, produits de symboles de Christoffel et des composantes du tenseur T avec sommation sur un indice donné. Il y a autant de tels termes que d'indices au tenseur T, ces termes sont affectés d'un signe $+$ lorsque l'indice sommé est contravariant et $-$ lorsque l'indice sommé est covariant. Ainsi par exemple,

$$\nabla_i T^j_\ell = \partial_i T^j_\ell - \Gamma^k_{i\ell} T^j_k + \Gamma^j_{ik} T^k_\ell.$$

Dans les chapitres ultérieurs, on aura à manier des équations dans lesquelles figurent des dérivées covariantes et des champs de tenseurs écrits avec des indices. La place des composantes des champs de tenseurs relativement aux dérivées covariantes a alors beaucoup d'importance. Ainsi, $\nabla_i X^j Y^k$ est différent de $X^j \nabla_i Y^k$. La première expression est une composante du tenseur $\nabla(X \otimes Y)$ tandis que la deuxième est une composante du tenseur $X \otimes (\nabla Y)$.

Remarque 2.18 La présence d'indices dans une expression ne signifie pas que le résultat dépende de la carte choisie. L'important est de savoir si les objets indicés ont une existence indépendante de la carte ou non (c'est-à-dire si ces objets sont des tenseurs ou non). Une égalité telle que

$$\nabla_i T^i{}_j = S_j, \tag{2.20}$$

ou S et T sont des champs de tenseurs, ne dépend pas de la carte choisie, malgré la présence d'indices, et peut aussi bien s'écrire : "la contraction 1-1 du tenseur ∇T est égale au tenseur S". L'égalité (2.20) est donc en fait tout aussi *intrinsèque* que la phrase précédente. En revanche, dès qu'apparaissent des symboles de Christoffel ou des dérivées partielles de fonctions indicées, alors le résultat dépend de la carte et n'est plus valable sur la variété toute entière. ∎

Lorsqu'on se donne une connexion linéaire, on y attache deux tenseurs fondamentaux.

Définition 2.19 La *torsion* d'une connexion linéaire ∇ est définie comme l'application $T : \Gamma(T^1M) \times \Gamma(T^1M) \to \Gamma(T^1M)$ telle que

$$\forall\, Y, Z \in \Gamma(T^1M), \quad T(Y,Z) = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y - [Y,Z]. \tag{2.21}$$

■

On montre alors le résultat suivant (voir par exemple [24]) :

Proposition 2.20 *Pour* $Y, Z \in \Gamma(T^1M)$ *,* $T(Y,Z)_P$ *pour* $P \in M$ *ne dépend que des valeurs de* Y *et* Z *au point* P *.*

D'après la caractérisation d'un champ de tenseurs comme application linéaire sur un $\mathscr{C}^\infty(M)$-module (voir la remarque 2.15), cette proposition montre que la torsion définit un champ de tenseurs de type $(2,1)$, dont les composantes dans une base locale sont données par les fonctions $T_{jk\cdot}^{\cdot\cdot\, i}$ telles que

$$\big(T(Y,Z)\big)^i = T_{jk\cdot}^{\cdot\cdot\, i}\, Y^j Z^k,$$

d'où en utilisant (2.21) pour les champs de vecteurs coordonnées

$$T_{jk\cdot}^{\cdot\cdot\, i} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}.$$

Définition 2.21 La *courbure* R d'une connexion linéaire ∇ est l'application qui à deux champs de vecteurs X et Y associe $R(X,Y) : \Gamma(T^1M) \to \Gamma(T^1M)$ tel que

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{2.22}$$

■

Comme pour la torsion, on montre le résultat suivant (voir [24]) :

Proposition 2.22 *La valeur de* $R(X,Y)Z$ *en un point* P *ne dépend que des valeurs de* X, Y *et* Z *au point* P *.*

Si on fixe X et Y dans $\Gamma(T^1M)$ et si on se place en un point P de M, $R(X,Y)$ est une application de T_PM dans lui même. Donc $R(X,Y)$ définit un champ de tenseurs de type $(1,1)$ et par conséquent R définit un champ de tenseurs de type $(3,1)$. En coordonnées locales $\{y^i\}$, on a

$$R\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \frac{\partial}{\partial y^k} = R_{ijk\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\,\ell}\, \frac{\partial}{\partial y^\ell}. \tag{2.23}$$

Dans un système de coordonnées locales, les composantes de R s'écrivent

$$R_{ijk\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\,\ell} = \partial_i \Gamma^\ell_{jk} - \partial_j \Gamma^\ell_{ik} + \Gamma^\ell_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^\ell_{jm}\Gamma^m_{ik}. \tag{2.24}$$

Le champ de tenseurs R intervient dans la permutation des indices de dérivations covariantes de tenseurs par la formule suivante :

$$\nabla_i \nabla_j Z^k - \nabla_j \nabla_i Z^k = R_{ij\ell\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\, k} Z^\ell - T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot\,\ell} \nabla_\ell Z^k, \tag{2.25}$$

où Z est un champ de vecteurs, et $\nabla_i \nabla_j Z^k$ est une composante du champ de tenseurs $\nabla\nabla Z$, dérivée covariante du champ de tenseurs ∇Z de type $(1,1)$.

2.3 Structure riemannienne

Définition 2.23 Une *métrique riemannienne* sur M est un champ de tenseurs deux fois covariant $\boldsymbol{g} = g_{ij} \mathrm{d}y^i \otimes \mathrm{d}y^j$ en coordonnées locales, symétrique et défini positif. Une *variété riemannienne* est une variété munie d'une métrique riemannienne. ∎

On a donc pour $Y, Z \in T_P M$, $\boldsymbol{g}_P(Y,Z) = \boldsymbol{g}_P(Z,Y)$ soit $g_{ij} = g_{ji}$ et de plus

$$\forall Y \in T_P M,\ Y \neq 0, \quad \boldsymbol{g}_P(Y,Y) = g_{ij} Y^i Y^j > 0.$$

On notera aussi $\boldsymbol{g}(Y,Z) = \langle Y, Z \rangle$.

La variété M étant compacte, une telle métrique existe toujours dans le cas envisagé ici. Il suffit par exemple de transporter celle provenant du produit scalaire euclidien à travers des cartes locales, et d'utiliser une partition de l'unité.

Notation 2.24 Dans une carte locale, on note g^{ij} l'inverse du tenseur métrique, c'est-à-dire que l'on a $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$. Les composantes g^{ij} définissent alors un élément de $\Gamma(T^2 M)$. Lorsque M est munie d'une structure riemannienne, la métrique permet de monter et descendre les indices des champs de tenseurs grâce à la convention suivante : si un tenseur S_{ij} est donné, alors on note ${S^i}_j$ le tenseur $g^{ik} S_{kj}$. ∎

Avec cette écriture, la notation g^{ij} est cohérente. La métrique permet donc d'établir des isomorphismes entre les espaces de type $T_p^q M$ et ceux de type $T_{p'}^{q'} M$ pourvu que $p + q = p' + q'$. Notons que ces isomorphismes sont reliés à la métrique. Ainsi si on a une application T de $\Gamma(T^1 M)$ dans $\Gamma(T^1 M)$ ceci définit un champ de tenseurs de type $(1,1)$ dont les composantes en coordonnées locales seront notées ${T_i}^j$. Si Y est un champ de vecteurs de composantes Y^i, alors on aura $(T(Y))^j = {T_i}^j Y^i$. Maintenant si on voit T à travers l'isomorphisme lié à $\boldsymbol{g}$, T est un élément de $\Gamma(T_2 M)$ de composantes T_{ij}, et on a pour un autre champ de vecteurs Z,

$$\langle T(Y), Z \rangle = {T_i}^j Y^i g_{jk} Z^k = T_{ij} Y^i Z^j = T(Y,Z).$$

Théoriquement, ceci permet de ne travailler sur une variété riemannienne qu'avec des champs de tenseurs covariants.

Théorème 2.25 (Levi-Civita, [24]) *Sur une variété riemannienne, il existe une unique connexion linéaire de tenseur de torsion nul telle que le tenseur métrique* $\boldsymbol{g}$ *soit de dérivée covariante nulle. Cette connexion est appelée la connexion riemannienne.*

On a donc par définition

$$\forall X, Y \in \Gamma(T^1 M) \qquad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \tag{2.26}$$

qui traduit le fait que la torsion est nulle. Dans une carte locale, l'équation (2.26) s'écrit encore :

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \tag{2.27}$$

D'autre part, on a d'après le théorème $(\nabla_X g)_{ij} = 0$ dans un système de coordonnées locales, pour tout X champ de vecteurs. Or, on a

$$\nabla_X (g_{ij} Y^i Z^j) = Y^i Z^j (\nabla_X g)_{ij} + g_{ij} Z^j (\nabla_X Y)^i + g_{ij} Y^i (\nabla_X Z)^j.$$

Donc le fait que le tenseur métrique soit de dérivée covariante nulle se traduit par l'équation :

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(T^1 M) \quad X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \tag{2.28}$$

En écrivant habilement que les expressions (2.19) sont nulles pour $T = \boldsymbol{g}$, on trouve que les symboles de Christoffel dans une carte doivent vérifier

$$\Gamma_{ij}^k = \tfrac{1}{2} g^{km} (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}). \tag{2.29}$$

Cette équation fournit l'existence et l'unicité de la connexion riemannienne.

Sur une variété riemannienne munie de la connexion riemannienne, on peut montrer que le transport parallèle le long d'une courbe est une isométrie. Ceci permet de prouver le résultat suivant (voir [24]) :

Proposition 2.26 *Soient X et Y des champs de vecteurs sur une variété riemannienne M. Soit $P \in M$, I un intervalle, $t_0 \in I$, et $c : I \to M$ une courbe telle que $c(t_0) = P$ et $c'(t) = X_{c(t)}$ pour tout $t \in I$. Alors la connexion riemannienne sur M s'écrit encore*

$$\big(\nabla_X Y\big)_P = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(P_{c,t_0,t}^{-1} Y_{c(t)}\big)\Big)_{t=t_0}, \tag{2.30}$$

où $P_{c,t_0,t}$ est le transport parallèle de t_0 à t le long de c (voir la définition 2.8*).*

Remarquons que le terme $P_{c,t_0,t}^{-1} Y_{c(t)}$ est un élément de $T_{c(t_0)} M$. La dérivation en t est donc la dérivation d'une application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel $T_{c(t_0)} M$.

Exemple 2.27 Dans le cas de l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne, on vérifie que le transport parallèle de t_0 à t le long d'une courbe c est simplement la translation de $c(t_0)$ à $c(t)$. Le terme $\nabla_X Y$ se calcule donc en prenant une courbe intégrale de X, puis en dérivant le champ de vecteur $Y_{c(t)}$ en tant qu'application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. ■

Le fait que le tenseur métrique commute avec la dérivée covariante permet de commuter aussi la dérivée covariante et le tenseur g^{ij} . Concrètement, si on se donne un champ de tenseurs $T^i{}_j$, alors pour la contraction des deux premiers indices de la dérivée covariante de ce tenseur, on notera

$$\nabla_i T^i{}_j = \nabla_k g^{k\ell} T_{\ell j} = g^{k\ell} \nabla_k T_{\ell j} =: \nabla^i T_{ij}.$$

Grâce à la métrique, on peut étendre la notion de tenseur symétrique à n'importe quel tenseur de type donné. Un tenseur de type (p,q) est symétrique si le tenseur de type $(p+q,0)$ qui lui est associé par la notation 2.24 est symétrique au sens de la définition 2.10. Ceci ne pose pas de problème, car le tenseur $\boldsymbol{g}$ est lui même symétrique. Lorsqu'un tenseur est symétrique, on peut écrire qu'il est dans l'espace $T_p^q M$ sans aucune ambiguïté. Dans la suite, si on ne précise pas le contraire, un élément de $\Gamma(T_p^q M)$ sera un champ de tenseurs symétrique de type (p,q) . Dans ce cas, on n'écrira pas les blancs éventuels dans l'écriture des composantes d'un tenseur : si T_{ij} est symétrique, on écrit T_j^i pour $T^i{}_j$.

Le *tenseur de Riemann* est défini comme le tenseur quatre fois covariant

$$R_{ijk\ell} = R_{ijk\cdot}^{\cdot\cdot\cdot s}\, g_{s\ell},$$

où le tenseur $R_{ijk\cdot}^{\cdot\cdot\cdot s}$ est donné en coordonnées locales par la formule (2.24). Il possède les propriétés suivantes :

$$R_{ijk\ell} + R_{jki\ell} + R_{kij\ell} = 0, \tag{2.31a}$$
$$R_{ijk\ell} = -R_{jik\ell}, \tag{2.31b}$$
$$R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij}, \tag{2.31c}$$

la première égalité étant l'égalité de Bianchi. Dans une variété riemannienne, la formule (2.25) de permutation de dérivées covariantes de tenseurs devient

$$\nabla_i \nabla_j Z^k - \nabla_j \nabla_i Z^k = R_{ij\ell\cdot}^{\cdot\cdot\cdot k} Z^\ell, \tag{2.32}$$

pour un champ de vecteurs Z . Pour un champ de 1-formes ω , on trouve la formule suivante :

$$\nabla_i \nabla_j\, \omega_k - \nabla_j \nabla_i\, \omega_k = -R_{ijk\cdot}^{\cdot\cdot\cdot \ell}\, \omega_\ell = R_{jik\cdot}^{\cdot\cdot\cdot \ell}\, \omega_\ell, \tag{2.33}$$

compte tenu des symétries du champ de tenseurs R .

La donnée de la métrique permet de munir M d'une structure d'espace métrique complet.

Définition 2.28 Si $c(t)$ est une courbe $\mathscr{C}^\infty$ d'un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dans M, la longueur de la courbe c est

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{\boldsymbol{g}_{c(t)}\left(c'(t), c'(t)\right)}\,\mathrm{d}t.$$

La notation $\boldsymbol{g}_{c(t)}$ rappelle que le vecteur $c'(t)$ appartient à $T_{c(t)}M$. La distance entre deux points $P, Q \in M$ est alors $d\,(P,Q) = \inf L(c)$ où l'$\inf$ est pris sur l'ensemble des courbes d'extrémités P et Q. ∎

La topologie définie sur M par cette distance coïncide avec sa topologie de variété. Une *courbe minimisante* de P à Q est une courbe c telle que $L(c) = d\,(P,Q)$. Localement, si les deux point P et Q ne sont pas trop éloignés, on montre qu'une géodésique est une courbe minimisante. Réciproquement, on a (voir [24])

Proposition 2.29 *Une courbe minimisante de P à Q est une géodésique.*

En revanche une géodésique peut ne plus être minimisante globalement (par exemple un grand cercle sur une sphère). La variété M étant compacte, deux points de M peuvent toujours être joints par une géodésique minimisante (on dit que la variété est *complète*).

On appelle *boule intrinsèque* une boule de M en tant qu'espace métrique muni de la distance d.

2.4 Plongements isométriques

Dans le cas des coques, on est en présence de deux variétés : d'une part l'ouvert $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$, d'autre part la surface S qui est plongée isométriquement dans Ω^ε.

Définition 2.30 Une variété riemannienne M est dite plongée isométriquement dans la variété riemannienne $\overline{M}$ s'il existe un plongement $\mathscr{C}^\infty$ de M dans $\overline{M}$ et si la métrique sur M est la restriction de la métrique sur $\overline{M}$. ∎

Dans un tel cas, surtout si M est de dimension deux, on appelle la métrique induite la *première forme fondamentale* de M.

Ainsi, le produit scalaire dans M de vecteurs tangents à M par rapport à la métrique de M est le même que leur produit scalaire par rapport à la métrique de $\overline{M}$, après transport par le plongement. Ceci implique qu'en un point $P \in M$, l'espace tangent $T_P\overline{M}$ se décompose en la somme directe

$$T_P\overline{M} = T_PM \oplus (T_PM)^\perp$$

où l'orthogonal est pris par rapport au produit scalaire dans $\overline{M}$. On dispose alors de deux connexions riemanniennes, ∇ et $\overline{\nabla}$ issues des métriques sur M et $\overline{M}$. On a alors le résultat suivant

Proposition 2.31 *Si $X, Y \in \Gamma(T^1M)$ et si $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont des extensions de X et Y comme champs de vecteurs sur $\overline{M}$, alors*

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\top,$$

où l'exposant $^\top$ signifie que l'on prend la partie tangente à M du vecteur dans la décomposition précédente.

On dit aussi que la connexion ∇ est la projection sur l'espace tangent à M de la connexion $\overline{\nabla}$.

Définition 2.32 On définit une application

$$B : \Gamma(T^1M) \times \Gamma(T^1M) \to \Gamma(T^1M)^\perp$$

par l'équation suivante, où Y et Z sont des champs de vecteurs sur M et $\overline{Y}, \overline{Z}$ des extensions de ces champs en des champs de vecteurs sur $\overline{M}$,

$$B(Y, Z) = \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Z} - \nabla_Y Z. \tag{2.34}$$

■

Pour que cette définition ait un sens, on vérifie que le résultat ne dépend pas des extensions choisies. La valeur de $B(Y, Z)$ en un point P ne dépend que des valeurs de X et Y au point P, donc B définit un champ de tenseurs. De plus, on vérifie que $[\overline{Y}, \overline{Z}] = [Y, Z]$, ce qui montre que B est symétrique.

Définition 2.33 La *seconde forme fondamentale* est définie à partir d'un vecteur $\eta \in (T_PM)^\perp$ comme étant l'application bilinéaire symétrique sur $\Gamma(T^1M)$ donnée par

$$H_\eta(X, Y)_P = \langle B(X, Y), \eta \rangle_P \tag{2.35}$$

où $X, Y \in \Gamma(T^1M)$ et où le produit scalaire est celui de $\overline{M}$. ■

Grâce aux propriétés de B, la valeur de $H_\eta(X, Y)_P$ ne dépend que des valeurs des champs de vecteurs au point P, donc H_η définit un champ de tenseurs.

Localement, il existe une extension $\overline{\eta}$ de η dans $\overline{M}$ qui est orthogonale à M sur M, et on pose

$$A_\eta(X) = -(\overline{\nabla}_X \overline{\eta})^\top \tag{2.36}$$

qui, compte tenu du fait que $\langle \overline{\eta}, X \rangle = 0$ sur M pour X champ de vecteurs tangents à M, est simplement l'endomorphisme de T_PM associé à la forme bilinéaire H_η, à travers l'isomorphisme provenant de la métrique (voir le commentaire suivant la notation 2.24). On a donc

$$H_\eta(X,Y) = \langle A_\eta(X), Y\rangle \,. \tag{2.37}$$

Si M est de codimension 1 et orientable, $(T_PM)^\perp$ est de dimension 1, ce qui fournit un choix naturel pour η comme étant le vecteur unitaire orienté positivement et générateur de $(T_PM)^\perp$, vecteur que l'on note alors N. La forme H_N bilinéaire sur chaque T_PM s'identifie donc à un tenseur symétrique deux fois covariant sur la variété M, dont les composantes dans une carte locale sont notées $b_{\alpha\beta}$ (ici, les indices grecs prennent des valeurs "hypersurfaciques", c'est-à-dire 1 où 2 dans le cas des coques où M est une surface). On a donc $H_N(X,Y) = b_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta$ où X^α et Y^β sont les composantes dans la base locale de vecteurs tangents X et Y à M. Maintenant, il est clair par définition même de l'application associée à une forme bilinéaire que A_N définit un champ de tenseurs une fois covariant et une fois contravariant sur M, de composante dans une carte locale $b^\alpha_\beta = g^{\alpha\gamma}b_{\gamma\beta}$ où $g^{\alpha\beta}$ est l'inverse de la métrique sur M qui est aussi la restriction de la métrique sur $\overline{M}$.

L'endomorphisme A_N étant symétrique, T_PM admet une base orthonormée pour le produit scalaire sur M et orthogonale pour A. Les valeurs propres de A sont appelées les *courbures principales* de M au point donné. Dans le cas bidimensionnel, A possède deux valeurs propres κ_1 et κ_2. On définit alors

$$K = \det A = \kappa_1\kappa_2 \tag{2.38}$$

qui est la *courbure de Gauss* de la surface en un point donné. Cette courbure est invariante par isométrie de la surface, ce fait constituant le théorème de Gauss (*Theorema Egregium*).

Définissons de plus

$$H = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{trace}\,A = \tfrac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2) \tag{2.39}$$

qui est appelée *courbure moyenne* de la surface au point considéré. Notons que dans une carte locale, on a $K = \det(b^\beta_\alpha)$ et $2H = b^\alpha_\alpha$ avec la convention de sommation des indices répétés.

3 Application à la situation des coques

Dans cette section, on applique les résultats généraux précédents aux coques. Cela amène à préciser la terminologie utilisée et à dégager des formules de calcul qui seront d'un intérêt pratique dans les sections suivantes.

3.1 Paramétrisation normale

Avec les notations de la section 1, on voit maintenant l'ouvert Ω^ε à travers le difféomorphisme Φ^ε .

Définition 3.1 Le difféomorphisme de $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ sur Ω^ε s'appelle la *paramétrisation normale* de Ω^ε . Un *système de coordonnées normales* est un système de coordonnées sur $\Omega^\varepsilon = \Phi^\varepsilon\big(S \times (-\varepsilon, \varepsilon)\big)$ issu d'une carte sur S . ■

La terminologie provient évidemment du fait que la troisième coordonnée h représente la distance parcourue depuis la surface moyenne S_0 le long de la normale N à S_0 . Si on dispose d'un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ de cartes locales pour la surface S , on a donc un atlas naturel pour Ω^ε indexé par le même ensemble I et formé des cartes $\Phi^\varepsilon\big(U_i \times (-\varepsilon, \varepsilon)\big)$ munies des applications

$$\mathbb{R}^3 \supset \Phi^\varepsilon\big(U_i \times (-\varepsilon, \varepsilon)\big) \xrightarrow{(\Phi^\varepsilon)^{-1}} U_i \times (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{\varphi_i \times \mathrm{Id}} \varphi_i(U_i) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^3. \tag{3.1}$$

De telles cartes induisent localement, par définition, des coordonnées normales. De plus, si on fixe h , ces cartes induisent des cartes locales sur la surface S_h dont les ouverts, de type $\Phi^\varepsilon(U_i, h)$, sont munis des applications suivantes, où $F_h : S_0 \to S_h$ est l'application partielle $\Phi^\varepsilon(\,\cdot\,, h)$ pour h fixé (on identifie S_0 à $S \times \{0\}$ et donc aussi à S elle-même) :

$$S_h \supset \Phi^\varepsilon(U_i, h) \xrightarrow{F_h^{-1}} U_i \xrightarrow{\varphi_i} \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^2. \tag{3.2}$$

Il est important de remarquer que les changements de carte associés aux applications de types (3.1) ou (3.2) ne dépendent pas de h . Ainsi, les seules contraintes géométriques sur Ω^ε ou S_h dues aux cartes locales proviennent en fait de contraintes sur la surface moyenne S_0 elle-même (voir le lemme 3.6).

Fixons maintenant une carte locale (U, φ) de S . Sur l'ouvert $\Phi^\varepsilon\big(U \times (-\varepsilon, \varepsilon)\big)$ de Ω^ε , on dispose donc d'une carte locale dont l'image est $\varphi(U) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^3$. Dans toute la suite, les indices latins prendront des valeurs tridimensionnelles (ici, 1,2,3) et les indices grecs des valeurs bidimensionnelles (1 et 2). Soit $\{y^\alpha\}$ le système de coordonnées sur $U \subset S_0$ induit par la carte locale. Sur la carte tridimensionnelle, on dispose donc des trois coordonnées (y^α, h) . On note parfois par commodité y^3 pour h . Notons alors

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = X_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

les vecteurs coordonnées issus de cette carte locale. Remarquons que $X_3 = N$ via le plongement dans $\mathbb{R}^3$. On n'hésitera donc pas à écrire N pour désigner le troisième vecteur coordonnée, sans oublier que lorsqu'on écrit $N = X_3$ on identifie en fait deux vecteurs de l'espace tangent en un point donné de la variété. Donc dans les calculs qui suivent, N dépend de h à travers son "point d'attache" dans la variété Ω^ε . De même, les vecteurs $X_\alpha = X_\alpha(h)$ dépendent de h , et sont tangents à S_h , pour h fixé : ils sont les vecteurs coordonnées associés à la carte (3.2) définie sur un ouvert de S_h .

La métrique sur Ω^ε dans ce système de coordonnées est alors définie par

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle_{\mathbb{R}^3} . \tag{3.3}$$

On est donc dans le cas de la section 2.4 où, pour h fixé, la variété $M = S_h$ est une surface plongée isométriquement dans $\overline{M} = \Omega^\varepsilon$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Dans ce cas on note D^h la connexion sur la surface S_h et ∇ la connexion sur l'ouvert Ω^ε issue du produit scalaire euclidien classique de $\mathbb{R}^3$. La connexion ∇ a des symboles de Christoffel identiquement nuls lorsqu'on prend pour système de coordonnées le système issu d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

3.2 Tenseurs fondamentaux

Les propriétés qui suivent peuvent être montrées directement à partir de la formule pour Φ^ε . Toutefois, les calculs ci-dessous vont permettre de se familiariser avec des objets qui sont manipulés constamment dans les chapitres ultérieurs. On fera un usage constant des formules (2.26) et (2.28). D'autre part, tous les tenseurs présents dépendent des trois coordonnées (y^α, h) . En général, on n'écrit pas la dépendance explicite en ces variables des objets en présence, et lorsqu'on le fait, on ne précise souvent que la dépendance en la troisième coordonnée h , car les coordonnées y^α dépendent d'une carte choisie, tandis que h a une existence globale sur la variété Ω^ε vue comme $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

On sait déjà qu'en un point P de S_0 , la métrique est telle que $g_{33} = 1$ et $g_{\alpha 3} = 0$ car la normale est le vecteur troisième coordonnée. Nous allons montrer que ceci reste vrai dans toute la coque, c'est-à-dire que X_3 est la normale au point $\Phi^\varepsilon(P,h)$ à la surface S_h . On notera désormais ∂_3^ε au lieu de ∂_3 pour rappeler que h varie dans un intervalle dépendant de ε . Ceci dit, on a

$$\begin{aligned}\partial_3^\varepsilon g_{33} &= X_3 \langle X_3, X_3 \rangle \\ &= 2 \langle N, \nabla_N N \rangle ,\end{aligned}$$

mais puisque la troisième courbe coordonnée (ayant N pour vecteur tangent) est une géodésique de l'espace ambiant par définition de la coque, on a $\nabla_N N = 0$ et donc $g_{33} = 1$ sur tout Ω^ε .

De plus, on a

$$\partial_3^\varepsilon g_{\alpha 3} = \langle X_\alpha, \nabla_N N \rangle + \langle \nabla_N X_\alpha, N \rangle .$$

Mais par symétrie de la connexion, $\nabla_N X_\alpha = \nabla_{X_\alpha} N$ car les champs de vecteurs X_α et N sont des champs de vecteurs coordonnées ($[X_\alpha, N] = 0$) et donc

$$\begin{aligned} \partial_3^\varepsilon g_{\alpha 3} &= \langle \nabla_{X_\alpha} N, N \rangle \\ &= \tfrac{1}{2} X_\alpha \langle N, N \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

car N est unitaire le long de la surface. Les coefficients de la métrique vérifient donc

$$g_{i3} = \delta_{i3} \qquad \text{et} \qquad g^{i3} = \delta^{i3} \tag{3.4}$$

en tout point de Ω^ε et ceci indépendamment de la carte choisie.

Les relations précédentes montrent en fait que la situation existant sur S_0 est identique à celle sur S_h et donc pour tout h , X_3 est orthogonal aux vecteurs X_α . Les composantes $g_{\alpha\beta}(h)$ sont les produits scalaires euclidiens des vecteurs X_α et X_β tangents à la surface S_h . Elles sont donc les composantes de la métrique de la surface S_h vue comme surface plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^3$.

Notation 3.2 La métrique de S_h , c'est-à-dire sa *première forme fondamentale*, se note en coordonnées locales

$$a_{\alpha\beta}(y^\alpha, h) := g_{\alpha\beta}(y^\alpha, h). \tag{3.5}$$

■

On note souvent $a_{\alpha\beta}(h)$ sans préciser le système de coordonnées $\{y^\alpha\}_{\alpha=1,2}$ sur S . Les fonctions $a_{\alpha\beta}(h)$ sont donc les composantes du tenseur métrique de la surface S_h plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^3$, dans le système de coordonnées sur S_h défini par la carte locale (3.2).

Les résultats de la section précédente montrent que sur S_h est définie la *seconde forme fondamentale* de coefficients dans le système de coordonnées choisi

$$b_{\alpha\beta}(h) = \langle \nabla_{X_\alpha} X_\beta, N \rangle . \tag{3.6}$$

Conformément à la notation 2.24 utilisée sur la surface S_h , on peut monter et descendre les indices des champs de tenseurs grâce à la métrique sur S_h . Ainsi, le tenseur $b_{\alpha\beta}(h)$ étant symétrique, on peut noter

$$b^{\alpha\beta}(h) = b_{\gamma\delta}(h) a^{\gamma\alpha}(h) a^{\delta\beta}(h) = b^\alpha_\gamma(h) a^{\gamma\beta}(h),$$

où $a^{\alpha\beta}(h)$ est l'inverse du tenseur métrique $a_{\alpha\beta}(h)$ sur S_h . De plus, par définition de la seconde forme fondamentale et de l'opérateur linéaire qui lui est associé, on a

$$A_N(X_\beta) = b^\alpha_\beta(h) X_\alpha = -\nabla_{X_\beta} N.$$

La dérivée par rapport à h de la composante $a_{\alpha\beta}(h) = g_{\alpha\beta}(h)$ se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
\partial_3^\varepsilon a_{\alpha\beta}(h) &= \big\langle \nabla_N X_\alpha, X_\beta \big\rangle + \big\langle X_\alpha, \nabla_N X_\beta \big\rangle \\
&= \big\langle \nabla_{X_\alpha} N, X_\beta \big\rangle + \big\langle \nabla_{X_\beta} N, X_\alpha \big\rangle \\
&= -\big\langle N, \nabla_{X_\alpha} X_\beta \big\rangle - \big\langle N, \nabla_{X_\beta} X_\alpha \big\rangle.
\end{aligned}$$

D'où

$$\partial_3^\varepsilon a_{\alpha\beta}(h) = -2 b_{\alpha\beta}(h). \tag{3.7}$$

En dérivant la formule $a^{\alpha\beta}(h) a_{\beta\gamma}(h) = \delta_\gamma^\alpha$ on trouve de même

$$\partial_3^\varepsilon a^{\alpha\beta}(h) = 2 b^{\alpha\beta}(h). \tag{3.8}$$

Enfin, on calcule la dérivée des composantes de la seconde forme fondamentale. On trouve

$$\begin{aligned}
\partial_3^\varepsilon b_{\alpha\beta}(h) &= N \big\langle \nabla_{X_\alpha} X_\beta, N \big\rangle \\
&= \big\langle \nabla_N \nabla_{X_\alpha} X_\beta, N \big\rangle \quad \text{car} \quad \nabla_N N = 0 \\
&= \big\langle \nabla_{X_\alpha} \nabla_N X_\beta, N \big\rangle - \big\langle R(X_\alpha, N) X_\beta, N \big\rangle.
\end{aligned}$$

Mais le tenseur de courbure de Riemann de $\mathbb{R}^3$ étant identiquement nul, le dernier terme est nul, d'où

$$\begin{aligned}
\partial_3^\varepsilon b_{\alpha\beta}(h) &= \big\langle \nabla_{X_\alpha} \nabla_{X_\beta} N, N \big\rangle \\
&= -\big\langle \nabla_{X_\beta} N, \nabla_{X_\alpha} N \big\rangle \quad \text{car} \quad \big\langle \nabla_{X_\beta} N, N \big\rangle = 0 \\
&= -\big\langle b_\beta^\gamma(h) X_\gamma, b_\alpha^\delta(h) X_\delta \big\rangle \\
&= -a_{\gamma\delta}(h) b_\beta^\gamma(h) b_\alpha^\delta(h).
\end{aligned}$$

Et donc

$$\partial_3^\varepsilon b_{\alpha\beta}(h) = -b_\alpha^\gamma(h) b_{\gamma\beta}(h). \tag{3.9}$$

Notation 3.3 Le tenseur symétrique défini par la relation

$$c_{\alpha\beta}(h) := b_\alpha^\gamma(h) b_{\gamma\beta}(h) \tag{3.10}$$

est appelé parfois *troisième forme fondamentale*, bien qu'il suffise des deux premières pour déterminer la surface complètement (voir le théorème 3.9). ∎

Avec cette notation, l'équation (3.9) devient

$$\partial_3^\varepsilon b_{\alpha\beta}(h) = -c_{\alpha\beta}(h). \tag{3.11}$$

Les valeurs propres de la matrice $b_\alpha^\beta(h)$ sont les courbures principales. Le théorème de Cayley-Hamilton montre alors d'après les équations (2.38) et (2.39) l'équation suivante

$$c_\alpha^\beta(h) = 2H(h)b_\alpha^\beta(h) - K(h)\delta_\alpha^\beta, \tag{3.12}$$

où $H(h)$ est la courbure principale de S_h et $K(h)$ sa courbure de Gauss.

Il faut remarquer que $b_\alpha^\beta(h)$ signifie $a^{\beta\gamma}(h)b_{\gamma\alpha}(h)$ où $a^{\beta\gamma}(h) = g^{\beta\gamma}(h)$ est l'inverse de la métrique de la surface S_h, qui dépend donc de h. Les équations (3.8) et (3.11) montrent alors que

$$\begin{aligned}
\partial_3^\varepsilon b_\alpha^\beta(h) &= \partial_3^\varepsilon(a^{\beta\gamma}(h)b_{\gamma\alpha}(h)) \\
&= b_{\gamma\alpha}(h)\partial_3^\varepsilon a^{\beta\gamma}(h) + a^{\beta\gamma}(h)\partial_3^\varepsilon b_{\gamma\alpha}(h) \\
&= 2b_{\gamma\alpha}(h)b^{\beta\gamma}(h) - a^{\beta\gamma}(h)c_{\gamma\alpha}(h),
\end{aligned}$$

d'où l'équation

$$\partial_3^\varepsilon b_\alpha^\beta(h) = c_\alpha^\beta(h). \tag{3.13}$$

Remarque 3.4 Accessoirement, on peut obtenir les expressions des courbures principales des surfaces S_h à partir de celles de S_0 en résolvant l'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial h} b_\beta^\alpha(h) = b_\gamma^\alpha(h)b_\beta^\gamma(h)$$

provenant des équations précédentes pour les surfaces S_h. On trouve alors que la i-ème courbure principale de S_h, $\kappa_i(h)$, vaut

$$\kappa_i(h) = \frac{\kappa_i(0)}{1 + h\kappa_i(0)}.$$

$\blacksquare$

Grâce à (3.11) et (3.13), on trouve enfin

$$\begin{aligned}
\partial_3^\varepsilon c_{\alpha\beta}(h) &= b_{\gamma\beta}(h)\partial_3^\varepsilon b_\alpha^\gamma(h) + b_\alpha^\gamma(h)\partial_3^\varepsilon b_{\gamma\beta}(h) \\
&= b_{\gamma\beta}(h)c_\alpha^\gamma(h) - b_\alpha^\gamma(h)c_{\gamma\beta}(h) \\
&= b_{\gamma\beta}(h)b_\alpha^\delta(h)b_\delta^\gamma(h) - b_\alpha^\gamma(h)b_\gamma^\delta(h)b_{\delta\beta}(h),
\end{aligned}$$

d'où l'équation

$$\partial_3^\varepsilon c_{\alpha\beta}(h) = 0. \tag{3.14}$$

Ceci montre que les composantes $c_{\alpha\beta}(h)$ dans une carte locale ne dépendent pas de h .

Le résultat des calculs précédents montre que dans un système de coordonnées locales, on a la relation

$$a_{\alpha\beta}(h) = a_{\alpha\beta}(0) - 2hb_{\alpha\beta}(0) + h^2 c_{\alpha\beta}(0), \tag{3.15}$$

qui fait intervenir des composantes de champs de tenseurs (c'est-à-dire des fonctions sur un ouvert de carte).

On peut résumer les calculs de cette sous-section en écrivant que les composantes $g_{ij}(h)$ de la métrique peuvent se représenter sous forme de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{\alpha\beta}(h) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $a_{\alpha\beta}(h)$ est donné par l'équation (3.15).

3.3 Réduction normale des champs de tenseurs

Dans la sous-section précédente, on a dérivé en h des composantes de champs de tenseurs définis sur S_h et sur Ω^ε . Cela a un sens, car de telles composantes sont des fonctions dépendant de h et à valeurs réelles. De plus, les composantes rencontrées définissent bien des champs de tenseurs sur les surfaces S_h car il s'agit des deux formes fondamentales $a_{\alpha\beta}(h)$ et $b_{\alpha\beta}(h)$ qui par définition sont des composantes de champs de tenseurs sur la surface S_h plongée dans $\mathbb{R}^3$. Le but de cette sous-section est de montrer comment tous les champs de tenseurs tridimensionnels peuvent se réduire à différents champs de tenseurs sur S_h , et ceci grâce au fait que l'on peut utiliser sur S_h la carte (3.2) qui provient d'une carte (3.1) sur Ω^ε .

Notation 3.5 Soit T un tenseur de type (p,q) sur Ω^ε . Le sous-type de ce tenseur détermine une partition $\{I,J\}$ de $\{1,\dots,p+q\}$ telle que dans une base locale, les composantes de T se notent $T^{\underline{k}}_{\underline{\ell}}$ où $\underline{k}$ et $\underline{\ell}$ sont des multi-indices : $\underline{k} = (k_s)_{s\in I}$, avec k_s variant dans $\{1,2,3\}$, et $\underline{\ell} = (\ell_s)_{s\in J}$, avec ℓ_s variant dans $\{1,2,3\}$. On note alors $X_{\underline{k}} \otimes \mathrm{d}y^{\underline{\ell}}$ la base locale associée au sous-type :

$$X_{\underline{k}} \otimes \mathrm{d}y^{\underline{\ell}} := \bigotimes_{s=1}^{p+q} f_s \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_s = X_{k_s} & \text{si} \quad s\in I \\ f_s = \mathrm{d}y^{\ell_s} & \text{si} \quad s \in J \end{cases}$$

■

Si on se place en coordonnées normales (voir la définition 3.1), on dispose d'une carte du type (3.1) sur un ouvert de Ω^ε . Dans le système de coordonnées associé, on note désormais $X_i(h)$ les champs de vecteurs coordonnées pour bien fixer la valeur de h considérée ($X_3(h) = N$). On note de même $\mathrm{d}y^i(h)$ la base duale de $X_i(h)$. D'après la notation précédente, une base locale de champs de tenseurs d'un sous-type donné s'écrit donc $X_{\underline{k}}(h) \otimes \mathrm{d}y^{\underline{\ell}}(h)$. Le lemme suivant est fondamental pour obtenir des formules intrinsèques lorsqu'on fait le changement de variables en coordonnées normales dans les équations de l'élasticité tridimensionnelle :

Lemme 3.6 *Soit T un champ de tenseurs de type (p,q) sur Ω^ε . Soit $\{I,J\}$ la partition de $\{1,\dots,p+q\}$ en ensembles d'indices contravariants et covariants associée à T (voir la notation* 3.5*). Supposons que l'on se donne des partitions de ces ensembles :*

$$I = I_* \sqcup I_3 \quad et \quad J = J_* \sqcup J_3.$$

Dans un système de coordonnées normales sur Ω^ε , le champ de tenseurs T s'écrit

$$T = \sum_{\underline{\ell},\underline{k}} T^{\underline{k}}_{\underline{\ell}}\, X_{\underline{k}}(h) \otimes \mathrm{d}y^{\underline{\ell}}(h).$$

On définit alors l'opération qui, dans un système de coordonnées locales, aux fonctions $T^{\underline{k}}_{\underline{\ell}}$, fait correspondre les fonctions $T^{\underline{\delta}}_{\underline{\alpha}}$ définies par

$$T^{\underline{\delta}}_{\underline{\alpha}} = T^{\underline{k}}_{\underline{\ell}} \quad avec \quad \begin{cases} k_s = \delta_s & si \quad s \in I_*, \\ k_s = 3 & si \quad s \in I_3, \\ \ell_s = \alpha_s & si \quad s \in J_*, \\ \ell_s = 3 & si \quad s \in J_3. \end{cases} \tag{3.16}$$

Cette opération définit alors une application continue $T \to T_*$ de l'espace des champs de tenseurs sur Ω^ε de sous-type déterminé par I et J vers l'espace des champs de tenseurs sur S_h de sous-type déterminé par I_* et J_* , où T_* s'écrit :

$$T_* = \sum_{\underline{\delta},\underline{\alpha}} T^{\underline{\delta}}_{\underline{\alpha}}\, X_{\underline{\delta}}(h) \otimes \mathrm{d}y^{\underline{\alpha}}(h). \tag{3.17}$$

Preuve. Effectuons la démonstration dans le cas d'un champ de tenseurs de la forme $T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k}$, où l'on fixe le deuxième indice à 3. On veut donc montrer que l'élément qui, dans une base locale, s'écrit $T_{\alpha 3\cdot}^{\cdot\cdot\beta}\, \mathrm{d}y^\alpha(h) \otimes X_\beta(h)$ définit un élément de $\Gamma(T^1_1 S_h)$.

On remarque tout d'abord que la base locale donnée ci-dessus est liée à une carte du type (3.2) à partir d'un atlas de S . Pour montrer que $T_{\alpha 3\cdot}^{\cdot\cdot\beta}\, \mathrm{d}y^\alpha(h) \otimes X_\beta(h)$ définit bien un champ de tenseur, il suffit de faire varier ces cartes, et de vérifier que les composantes se comporte bien. Mais les cartes du type (3.2) ne dépendent que de cartes locales sur S. Soit donc (U,φ) et (V,ψ) deux cartes locales sur S autour d'un point $P \in S$. En notant F_h l'application $\Phi^\varepsilon(\,\cdot\,,h)$ pour h fixé, ces deux cartes induisent, après identification de S_0 et S, des cartes locales $(F_h(U),\varphi\circ F_h^{-1})$ et $(F_h(V),\psi\circ F_h^{-1})$ sur la surface S_h autour du point $F_h(P)$. On vérifie alors que l'application de changement de carte est l'application $\varphi\circ F_h^{-1}\circ(\psi\circ F_h^{-1})^{-1} = \varphi\circ\psi^{-1}$ de $\psi(V\cap U)$ dans $\varphi(V\cap U)$.

Ces deux cartes induisent aussi deux cartes locales du type (3.1) sur Ω^ε. On vérifie alors que le changement de carte associé pour Ω^ε est alors simplement l'application

$$\mathbb{R}^3 \supset \psi(V\cap U)\times(-\varepsilon,\varepsilon) \xrightarrow{\psi^{-1}\times\mathrm{Id}} V\cap U\times(-\varepsilon,\varepsilon) \xrightarrow{\varphi\times\mathrm{Id}} \varphi(V\cap U)\times(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbb{R}^3.$$

La matrice jacobienne de ce changement de carte est donc la matrice

$$A^i_j = \begin{pmatrix} j^\alpha_\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où j^α_β est la matrice jacobienne du changement de carte $\varphi\circ\psi^{-1}$ de $\psi(V\cap U)$ dans $\varphi(V\cap U)$. Notons $T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k}$ et $\overline{T}_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k}$ les composantes du champ de tenseurs T dans les deux systèmes de coordonnées sur Ω^ε induits par les cartes locales du type (3.1) issues de (U,φ) et (V,ψ). Par l'application définie dans l'énoncé du lemme, on trouve deux familles de fonctions $T_{\alpha 3\cdot}^{\cdot\cdot\beta}$ et $\overline{T}_{\alpha 3\cdot}^{\cdot\cdot\beta}$ définissant deux champs de tenseurs locaux sur S_h dans deux bases locales différentes. En utilisant alors le critère de tensorialité sur la variété Ω^ε et grâce à la structure de la matrice A^j_i, on a

$$j^\alpha_\gamma\,(j^{-1})^\sigma_\beta\,T_{\alpha 3\cdot}^{\cdot\cdot\beta} = A^i_\gamma\,A^j_3\,(A^{-1})^\sigma_k\,T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} = \overline{T}_{\gamma 3\cdot}^{\cdot\cdot\sigma}\,.$$

La matrice j^α_β étant la matrice jacobienne de changement de carte sur S_h, on en déduit donc que les composantes définies précédemment sont les composantes d'un champ de tenseurs sur S_h. La généralisation à d'autres types de champs de tenseurs est évidente. ■

3.4 Dérivées covariantes

On dispose donc d'une connexion ∇ sur Ω^ε et d'une connexion D^h sur S_h à h fixé, associée à la métrique $a_{\alpha\beta}(h)$. On note $\Gamma^k_{ij}(h)$ les symboles de Christoffel sur de Ω^ε dans un système de coordonnées normales (voir la définition 3.1). Les formules (2.29) et (3.7) valables pour tout h permettent de calculer les symboles de Christoffel comprenant un indice 3. On trouve

$$\begin{aligned}
&\Gamma^k_{33}(h) = 0,\\
&\Gamma^3_{\alpha 3}(h) = 0,\\
&\Gamma^3_{\alpha\beta}(h) = -\tfrac{1}{2} g^{33}(h)\partial^\varepsilon_3 g_{\alpha\beta}(h) = b_{\alpha\beta}(h),\\
&\Gamma^\beta_{\alpha 3}(h) = \tfrac{1}{2} g^{\beta\delta}(h)\partial^\varepsilon_3 g_{\alpha\delta}(h) = -b^\beta_\alpha(h).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Les formules ci-dessus dépendent a priori de la carte choisie, car les symboles de Christoffel ne définissent pas un champ de tenseurs. En fait, ces relations sont vraies dans toute carte car $b_{\alpha\beta}(h)$ est un champ de tenseurs sur S_h : elles sont intrinsèques sur S_h, mais pas sur $\mathbb{R}^3$. En revanche, les termes $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(h)$ qui sont les symboles de Christoffel de la connexion D^h sur S_h ne sont pas les composantes d'un champ de tenseurs sur S_h et dépendent du système de coordonnées normales choisi.

Soit une 1-forme tridimensionnelle $\boldsymbol{u}$ définie sur Ω^ε. Elle est donc décrite par trois composantes u_i dans la base $\mathrm{d}y^i$, et le tenseur $\nabla\boldsymbol{u}$ a pour composantes dans une carte

$$\nabla_i u_j = \partial_i u_j - \Gamma^k_{ij} u_k.$$

D'après le lemme 3.6, la 1-forme $\boldsymbol{u}$, vue de S_h, se décompose donc en deux parties. D'une part $u_\alpha \mathrm{d}y^\alpha$ qui est une 1-forme sur S_h et d'autre part la composante u_3 qui définit une fonction sur S_h. On ne fera pas de distinction dans la suite entre les deux interprétations possibles de $\boldsymbol{u}$ comme 1-forme sur Ω^ε ou comme couple $(u_\alpha \mathrm{d}y^\alpha, u_3)$ d'une 1-forme sur S_h et d'une fonction sur S_h. Il y a même une identité entre les 1-formes sur Ω^ε et de tels couples : si on a un couple $(u_\alpha \mathrm{d}y^\alpha, f)$, alors il suffit de vérifier que l'expression $u_\alpha \mathrm{d}y^\alpha + f\mathrm{d}y^3$ définit bien une 1-forme sur Ω^ε.

Définition 3.7 On appelle le couple $(u_\alpha \mathrm{d}y^\alpha, u_3) \in \Gamma(T_1 S_h) \times \mathscr{C}^\infty(S_h)$ la *réduction normale* de la 1-forme tridimensionnelle $\boldsymbol{u}$. ∎

Le contexte ne doit cependant pas prêter à confusion. Ainsi $\mathrm{D}^h u$ est la dérivée covariante de $u_\alpha \mathrm{d}y^\alpha \in \Gamma(T_1 S_h)$, et dans une carte locale ses composantes s'écrivent

$$\mathrm{D}^h_\alpha u_\beta = \partial_\alpha u_\beta - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(h) u_\gamma,$$

en prenant garde que la sommation dans le second membre a lieu uniquement sur les indices surfaciques, et ne fait pas intervenir l'indice 3.

Grâce aux équations (3.18), on a les relations suivantes, qui relient ∇ et D^h :

$$\begin{aligned}
&\nabla_3 u_3 = \partial^\varepsilon_3 u_3,\\
&\nabla_\alpha u_3 = \partial_\alpha u_3 + b^\beta_\alpha(h) u_\beta,\\
&\nabla_3 u_\alpha = \partial^\varepsilon_3 u_\alpha + b^\beta_\alpha(h) u_\beta,\\
&\nabla_\alpha u_\beta = \mathrm{D}^h_\alpha u_\beta - b_{\alpha\beta}(h) u_3.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Il est important de remarquer que ces relations sont intrinsèques, malgré la présence de dérivées partielles (ce qui a priori signifie que le résultat dépend d'une carte choisie). D'abord, u_3 étant une simple fonction pour S_h , on peut écrire

$$\partial_\alpha u_3 = \mathrm{D}^h_\alpha u_3.$$

D'autre part, la dérivée partielle ∂^ε_3 a une existence globale sur Ω^ε car les changement de cartes sur Ω^ε ne dépendent pas de h (voir la démonstration du lemme 3.6). Les composantes $\partial^\varepsilon_3 u_\alpha$ définissent donc un élément de $\Gamma(T_1 S_h)$. Plus généralement, la dérivée partielle ∂^ε_3 définit un opérateur de $\Gamma(T^q_p \Omega^\varepsilon)$ dans lui-même pour un sous-type donné de champs de tenseurs, simplement en dérivant les composantes en h . Grâce au lemme 3.6, elle agit ainsi sur des champs de tenseurs sur S_h qui sont des réductions normales de champs de tenseurs tridimensionnels. Ainsi, l'expression $\partial^\varepsilon_3 a_{\alpha\beta}(h) = -2b_{\alpha\beta}(h)$ est en fait intrinsèque.

Grâce au lemme (3.6), les relations (3.19) sont des égalités entre champs de tenseurs sur S_h . Elles vont permettre de passer dans un premier temps des équations de l'élasticité posées de manière naturelle en terme de dérivée covariante ∇ à des équations posées sur S_h en terme de dérivées covariantes D^h . Dans un second temps, on développera encore les équations, comme on l'a fait pour la métrique, afin d'obtenir des équations où h est explicité. Ces équations seront des familles dépendant de h d'opérateurs sur S_0 agissant sur une 1-forme $\boldsymbol{u}$ qui dépendra de h .

3.5 Relations de compatibilité

On a déjà mentionné le fait que la donnée de la métrique et de la seconde forme fondamentale définit, à isométrie de $\mathbb{R}^3$ près, une unique surface plongée de $\mathbb{R}^3$. C'est le résultat du théorème 3.9 ci-dessous. Il apparaît qu'il faut imposer des conditions supplémentaires, car la métrique et la seconde forme fondamentale ne sont pas indépendantes et doivent être liées par des équations. Dans la suite de cette sous-section, on ne précise pas la valeur de h considérée. On note donc $a_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$ les premières et secondes formes fondamentales de S_h dans un système de coordonnées locales. De même, la dérivée covariante D^h est simplement notée D .

La première des relations devant être satisfaites est l'équation de Gauss, qui relie la courbure de Gauss K de S_h (notée elle aussi sans la dépendance en h) au tenseur métrique $a_{\alpha\beta}$. Notons $\widetilde{R}$ le tenseur de courbure de Riemann de la surface S_h ($\widetilde{R}$ ne dépend que de la métrique $a_{\alpha\beta}$). Ses composantes sont donc indexées par des indices grecs. De plus, en vertu des relations (2.31b) et (2.31c), les composantes du tenseur $\widetilde{R}_{\alpha\beta\delta\gamma}$ sont nulles si les deux premiers indices ou les deux derniers indices sont égaux. Les seules composantes non nulles sont donc celles comprenant exactement les indices 1 et 2 dans les deux couples d'indices $\{\alpha\beta\}$ et $\{\delta\gamma\}$. Toujours grâce aux relations (2.31b) et (2.31c), la connaissance de $\widetilde{R}$ se réduit donc à celle de la composante $\widetilde{R}_{1212}$. D'autre part, le tenseur de courbure de Riemann R de Ω^ε, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, s'annule identiquement. Or on calcule en coordonnées locales grâce à la formule (2.24) que

$$R_{\alpha\beta\delta\cdot}^{\cdots\gamma} = \widetilde{R}_{\alpha\beta\delta\cdot}^{\cdots\gamma} + \Gamma^\gamma_{\alpha 3}\Gamma^3_{\beta\delta} - \Gamma^\gamma_{\beta 3}\Gamma^3_{\alpha\delta},$$

d'où, en utilisant les équations (3.18), la relation

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta\delta\cdot}^{\cdots\gamma} = b^\gamma_\alpha b_{\beta\delta} - b^\gamma_\beta b_{\alpha\delta}. \tag{3.20}$$

Donc si on note a le déterminant de la métrique $a_{\alpha\beta}$, la première équation liant la métrique et la seconde forme fondamentale est

$$\widetilde{R}_{1212} = -\det(b_{\alpha\beta}) = -aK. \tag{3.21}$$

Remarque 3.8 On a simplement donné une démonstration du théorème de Gauss qui montre que la courbure de Gauss, définie à partir de $b_{\alpha\beta}$, ne dépend en fait que de $a_{\alpha\beta}$ via la relation précédente. ■

La deuxième relation provient du fait que

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\cdot}^{\cdots 3} &= \partial_\alpha\Gamma^3_{\beta\gamma} - \partial_\beta\Gamma^3_{\alpha\gamma} + \Gamma^3_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma} - \Gamma^3_{\beta\delta}\Gamma^\delta_{\alpha\gamma} \\ &= \partial_\alpha b_{\beta\gamma} - \partial_\beta b_{\alpha\gamma} + b_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma} - b_{\beta\delta}\Gamma^\delta_{\alpha\gamma} + (\Gamma^\delta_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma} - \Gamma^\delta_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma}) \\ &= \mathrm{D}_\alpha b_{\beta\gamma} - \mathrm{D}_\beta b_{\alpha\gamma}. \end{aligned}$$

On trouve donc les relations suivantes

$$\mathrm{D}_\alpha b_{\beta\gamma} = \mathrm{D}_\beta b_{\alpha\gamma}. \tag{3.22}$$

Ces équations sont appelées équations de *Codazzi-Mainardi*. Compte tenu de la symétrie du tenseur $b_{\alpha\beta}$, elles signifient en fait que le tenseur $\mathrm{D}_\alpha b_{\beta\gamma}$ est symétrique, c'est-à-dire que ses composantes sont invariantes par permutations des indices.

Le théorème suivant est une réciproque des équations (3.21) et (3.22). Dans un système de coordonnées locales, ces deux équations sont en fait des équations aux dérivées partielles portant sur les deux matrices $a_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$, car les symboles de Christoffel et le tenseur de courbure de Riemann ne dépendent que de $a_{\alpha\beta}$. On a alors le résultat suivant, dont une démonstration se trouve dans [23] :

Théorème 3.9 (Bonnet) *Soient $a_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$ deux fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs matrices définies sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ telles que $a_{\alpha\beta}$ soit définie positive pour tout $q \in V$. Supposons de plus que ces deux matrices vérifient les équations* (3.21) *et (3.22) écrites en fonctions de* $a_{\alpha\beta}$ *et* $b_{\alpha\beta}$ *dans une carte locale. Alors si* $q \in V$ *, il existe un voisinage* $U \subset V$ *de* q *et un difféomorphisme*

$$\phi : U \mapsto \phi(U) \subset \mathbb{R}^3$$

tel que la surface ainsi définie ait pour métrique $a_{\alpha\beta}$ *et pour seconde forme fondamentale* $b_{\alpha\beta}$ *. De plus, si* $\overline{\phi}$ *vérifie les mêmes propriétés, alors* $\overline{\phi} = A \circ \phi$ *où* A *est une isométrie affine de* $\mathbb{R}^3$ *.*

4 Elasticité en paramétrisation normale

Le but de cette section est d'effectuer le changement de variable annoncé afin de passer en coordonnées normales dans les équations de l'élasticité linéaire 3D. On utilise maintenant constamment la convention de sommation des indices répétés pour noter la contraction d'un indice covariant avec un indice contravariant.

4.1 Tenseurs des déformations

Le tenseur e_{ij} en coordonnées euclidiennes représente la déformation du corps élastique au premier ordre. Dans un système de coordonnées normales, nous noterons ce tenseur γ_{ij} . Après déformation, la variété Ω^ε est transformée en une variété $\widehat{\Omega}^\varepsilon$. On notera $\widehat{g}_{ij}$ la métrique de cette variété déformée écrite dans la même carte que pour la variété non déformée. Ceci est possible si l'amplitude de la déformation n'est pas trop grande auquel cas on peut associer à la variété déformée le même atlas que la variété non déformée. Avec cette notation, on a

$$2\gamma_{ij} = \widehat{g}_{ij} - g_{ij}. \tag{4.1}$$

Si la déformation est liée à un déplacement $\boldsymbol{u} = u_i \mathrm{d}y^i$, alors d'après l'équation (1.1) on a

$$\gamma_{ij}(\boldsymbol{u}) = \tfrac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$$

et au regard des relations (3.19) liant ∇ et D^h , on a les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_{33}(h)(\boldsymbol{u}) &= \partial_3^\varepsilon u_3, \\ \gamma_{\alpha 3}(h)(\boldsymbol{u}) &= \tfrac{1}{2}(\partial_\alpha u_3 + \partial_3^\varepsilon u_\alpha) + b_\alpha^\beta(h) u_\beta, \\ \gamma_{\alpha\beta}(h)(\boldsymbol{u}) &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha^h u_\beta + \mathrm{D}_\beta^h u_\alpha) - b_{\alpha\beta}(h) u_3, \end{aligned} \tag{4.2}$$

où on précise la dépendance en h du tenseur γ_{ij} pour rappeler qu'il s'agit maintenant de champs de tenseurs vus sur la surface S_h (en utilisant le lemme 3.6). En particulier ces équations ne dépendent pas de la carte choisie initialement sur S, et sont intrinsèques.

Dans les nouvelles coordonnées locales on notera encore les composantes du tenseur $\boldsymbol{A}$ par $A^{ijk\ell}$. Dans l'expression (1.2) apparaît le tenseur δ^{ij} qui est l'inverse du tenseur métrique de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes. Il se transforme donc dans le système de coordonnées normales en le tenseur g^{ij}. En faisant le lien avec l'expression (1.2), on a donc maintenant

$$A^{ijk\ell} = \lambda g^{ij} g^{k\ell} + \mu(g^{ik} g^{j\ell} + g^{i\ell} g^{jk}). \tag{4.3}$$

Enfin, on note $\boldsymbol{f} = f^i X_i$ les composantes du second membre de l'élasticité dans la nouvelle base. Remarquons qu'on ne différencie pas le nom des composantes selon le système de coordonnées, car c'est le même tenseur qui intervient. Seules les composantes du tenseur des déformations changent de nom (γ_{ij} au lieu de e_{ij}), par souci de cohérence avec les notations traditionnelles.

On effectue alors le changement de variables dans l'équation (1.4). Remarquons que l'espace $V(\Omega^\varepsilon)$ est invariant par changement de variable, et qu'on peut l'écrire

$$V(\Omega^\varepsilon) = \{\boldsymbol{u} = u_i \mathrm{d}y^i \mid u_i \in \mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)\ ,\ \boldsymbol{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\}. \tag{4.4}$$

Le problème est alors de trouver $\boldsymbol{u} \in V(\Omega^\varepsilon)$ tel que

$$\forall \boldsymbol{v} \in V(\Omega^\varepsilon) \quad \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijk\ell} \gamma_{ij}(\boldsymbol{u}) \gamma_{k\ell}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}V = \int_{\Omega^\varepsilon} f^i v_i\, \mathrm{d}V \tag{4.5}$$

où $\mathrm{d}V$ désigne la 3-forme volume riemannienne de la variété Ω^ε, celle qui en coordonnées locales s'écrit

$$\mathrm{d}V = \sqrt{g}\, \mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2 \wedge \mathrm{d}y^3,$$

où g est le déterminant de la métrique g_{ij}.

Si la déformation tridimensionnelle d'une coque est décrite par le tenseur γ_{ij}, le théorème 3.9 suggère que dans une théorie bidimensionnelle des coques, c'est-à-dire pour des équations posées sur la surface moyenne S_0, la déformation soit correctement décrite par deux tenseurs : d'une part, par le tenseur de changement de métrique de la surface, $2\gamma_{\alpha\beta}(0) = \widehat{a}_{\alpha\beta}(0) - a_{\alpha\beta}(0)$, qui mesure la différence entre le tenseur métrique $a_{\alpha\beta}(0)$ de la surface S_0 et le tenseur métrique $\widehat{a}_{\alpha\beta}(0)$ de la surface $\widehat{S}_0$ image de la surface S_0 par la déformation liée au déplacement $\boldsymbol{u}$, et d'autre part, par le tenseur de changement de courbure de la surface défini comme étant

$$\rho_{\alpha\beta}(0) = \widehat{b}_{\alpha\beta}(0) - b_{\alpha\beta}(0) \tag{4.6}$$

où $\widehat{b}_{\alpha\beta}(0)$ est la seconde forme fondamentale de la surface déformée écrite dans la même carte que pour la surface non déformée (voir l'équation (4.1)). En théorie linéarisée, on peut montrer (voir par exemple [50]) que ce tenseur dépend du déplacement $\boldsymbol{u}$ via la formule

$$\rho_{\alpha\beta}(0)(\boldsymbol{u}) = \mathrm{D}^0_\alpha \mathrm{D}^0_\beta u_3 - c_{\alpha\beta}(0)u_3 + b^\gamma_\alpha(0)\mathrm{D}^0_\beta u_\gamma + \mathrm{D}^0_\alpha b^\gamma_\beta(0)u_\gamma. \tag{4.7}$$

L'application ρ qui à $\boldsymbol{u}$ associe $\rho_{\alpha\beta}(0)(\boldsymbol{u})$ est initialement définie pour des couples du type $(u_\alpha, u_3) \in \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$. Il est évident que cette définition s'étend d'une part à toutes les surfaces S_h (en écrivant D^h au lieu de D^0 et $b^\alpha_\beta(h)$ au lieu de $b^\alpha_\beta(0)$) et d'autre part à n'importe quelle fonction régulière de h à valeurs dans l'ensemble des couples de $\Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$. Dans la suite, on note donc

$$\rho_{\alpha\beta}(h)(\boldsymbol{u}) = \mathrm{D}^h_\alpha \mathrm{D}^h_\beta u_3 - c_{\alpha\beta}(h)u_3 + b^\gamma_\alpha(h)\mathrm{D}^h_\beta u_\gamma + \mathrm{D}^h_\alpha b^\gamma_\beta(h)u_\gamma \tag{4.8}$$

l'opérateur de changement de courbure linéarisé opérant sur la surface S_h.

Au regard des équations (4.1) et (4.6), on peut s'attendre à ce que comme dans le théorème 3.9, les tenseurs $\gamma_{\alpha\beta}(0)$ et $\rho_{\alpha\beta}(0)$ définissent, en utilisant un atlas, la surface déformée toute entière. C'est effectivement le cas, au moins en théorie linéaire, et le théorème suivant est vrai, $\mathrm{H}^k(S_0)$ désignant l'espace de Sobolev d'ordre k sur la surface S_0 (voir [4]).

Théorème 4.1 *Soit $u_\alpha \mathrm{d}y^\alpha$ une 1-forme dont les composantes sont dans $\mathrm{H}^1(S_0)$ et u_3 une fonction de $\mathrm{H}^2(S_0)$. Notons $\boldsymbol{u} = (u_\alpha, u_3)$. Supposons que*

$$\gamma_{\alpha\beta}(0)(\boldsymbol{u}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho_{\alpha\beta}(0)(\boldsymbol{u}) = 0.$$

et que $\boldsymbol{u}$ satisfasse les conditions aux limites

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_\nu u_3 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial S_0$$

où ∂_ν désigne la dérivée par rapport à la normale rentrante à S_0 le long de ∂S_0. Alors sous ces conditions, on a $\boldsymbol{u} = 0$.

On pourra trouver des démonstration de ce théorème dans Bernadou & Ciarlet [5] ou Sanchez-Hubert & Sanchez-Palencia [50].

Les équations précédentes constituent le point de départ de ce qu'on appelle les théories linéaires de coques développées par John [33], Koiter [35, 36], Naghdi [41] ou encore Budiansky & Sanders [6]. Ces théories cherchent à trouver des modèles posés uniquement sur la surface moyenne S_0 de la coque, dont la solution sera la plus proche possible de celle de (4.5). Leurs méthodes consistent à effectuer un développement asymptotique des équations (4.5) par rapport à ε et à sélectionner des termes susceptible de fournir un modèle à la fois simple et représentatif. Le modèle ayant obtenu le plus de succès est sûrement celui de Koiter. Ceci est dû en grande partie à sa formulation très esthétique et séduisante. En effet, des calculs très généraux de John, Koiter a su retenir un modèle de coque ne faisant intervenir que les deux tenseurs $\gamma_{\alpha\beta}(0)$ et $\rho_{\alpha\beta}(0)$ sur la surface S_0, ce qui paraît le plus naturel au regard du théorème précédent.

Dans la suite, nous allons étudier de manière plus systématique et plus précise les développements asymptotiques effectués dans ces articles, afin d'obtenir le maximum d'information possible sur le déplacement tridimensionnel.

Parce qu'ils seront d'une utilité constante dans la suite, on définit deux nouveaux opérateurs :

Définition 4.2 Si $\boldsymbol{u} = (u_\alpha, u_3) \in \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$, on pose

$$\begin{aligned} \theta_\alpha(0)(\boldsymbol{u}) &= \partial_\alpha u_3 + b_\alpha^\beta(0) u_\beta && \text{tourbillon transverse,} \\ \omega_{\alpha\beta}(0)(\boldsymbol{u}) &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha^0 u_\beta - \mathrm{D}_\beta^0 u_\alpha) && \text{tourbillon plan.} \end{aligned} \tag{4.9}$$

■

Comme précédemment, ces champs de tenseurs s'étendent aux surfaces S_h, en écrivant D^h à la place de D^0 et $b_\alpha^\beta(h)$ à la place de $b_\alpha^\beta(0)$. Si $\boldsymbol{u}$ est un champ de 1-formes sur Ω^ε, les équations (3.19) montrent alors que

$$\theta_\alpha(h)(\boldsymbol{u}) := \partial_\alpha u_3 + b_\alpha^\beta(h) u_\beta = \nabla_\alpha u_3 \quad \text{et}$$

$$\omega_{\alpha\beta}(h)(\boldsymbol{u}) := \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha^h u_\beta - \mathrm{D}_\beta^h u_\alpha) = \nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\beta u_\alpha.$$

En ne précisant pas la valeur de h considérée, on vérifie qu'on a la relation

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}_\alpha \theta_\beta + b_\alpha^\nu \gamma_{\beta\nu} + b_\alpha^\nu \omega_{\beta\nu} \\ &\quad = \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\beta u_3 + \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\delta u_\delta + \tfrac{1}{2} b_\alpha^\nu \mathrm{D}_\beta u_\nu + \tfrac{1}{2} b_\alpha^\nu \mathrm{D}_\nu u_\beta - c_{\alpha\beta} u_3 + \tfrac{1}{2} b_\alpha^\nu \mathrm{D}_\beta u_\nu - \tfrac{1}{2} b_\alpha^\nu \mathrm{D}_\nu u_\beta, \end{aligned}$$

d'où l'équation

$$\rho_{\alpha\beta} = \mathrm{D}_\alpha \theta_\beta + b_\alpha^\nu \gamma_{\beta\nu} + b_\alpha^\nu \omega_{\beta\nu} \tag{4.10}$$

où on ne précise plus la dépendance en $\boldsymbol{u}$ des tenseurs en jeu.

Avant d'effectuer le changement de variable, disons un mot de ce qu'il advient des relations de Gauss et de Codazzi-Mainardi au cours de la déformation.

4.2 Relations de compatibilités pour la surface déformée

Lorsque la coque subit une déformation, la surface S_0 se transforme en une surface $\widehat{S}_0$ qui a pour métrique et pour seconde forme fondamentale les tenseurs $\widehat{a}_{\alpha\beta}(0)$ et

$\widehat{b}_{\alpha\beta}(0)$. A cette surface est aussi associée une dérivée covariante $\widehat{\mathrm{D}}^0$. Dans toute cette sous-section, on ne précise pas que tous les tenseurs sont évalués en 0 car les résultats qui suivent sont en fait valables pour n'importe quelle surface plongée dans $\mathbb{R}^3$, et sont vrais en particulier pour les surfaces S_h munies des formes fondamentales $a_{\alpha\beta}(h)$ et $b_{\alpha\beta}(h)$ et de la dérivée covariante D^h .

Les équations de Gauss et de Codazzi-Mainardi (3.21) et (3.22) doivent être vérifiées sur la surface déformée. On doit avoir

$$\widehat{\mathrm{D}}_{\alpha}\widehat{b}^{\gamma}_{\beta} = \widehat{\mathrm{D}}_{\beta}\widehat{b}^{\gamma}_{\alpha} \quad \text{et} \quad -\widehat{a}\ \widehat{K} = \det(\widehat{b}_{\alpha\beta}) \tag{4.11}$$

où les expressions surmontées d'un chapeau signifient qu'elles se rapportent à la surface déformée. Les relations (4.1) et (4.6), écrites sur la surface S_0 s'écrivent

$$\widehat{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + 2\gamma_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \widehat{b}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + \rho_{\alpha\beta}.$$

En reportant ces expressions dans les équations (4.11), on déduit que les tenseurs $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\rho_{\alpha\beta}$ doivent vérifier des équations sur la surface S . Remarquons que pour obtenir ces équations, on doit non seulement effectuer le remplacement des formes fondamentales, mais aussi celui des dérivées covariantes qui dépendent de la métrique. Les seuls objets ne changeant pas sont les champs de vecteurs provenant des fonctions coordonnées (c'est-à-dire les dérivées partielles), car on a fait l'hypothèse que la carte est la même pour la surface initiale et pour la surface déformée.

Les équations ainsi obtenues sont non linéaires, et portent le nom de celles dont elles proviennent (Gauss ou Codazzi-Mainardi). Les calculs complets se trouvent dans John [33]. Il est à noter que dans une théorie plus générale de l'élasticité sur une coque, il faut tenir compte de ces équations en plus des équations générales du type (4.5).

Toutefois, nous allons prouver dans la proposition suivante qu'en théorie linéaire, les équations précédentes *linéarisées* sont automatiquement vérifiées. Ces équations sont les suivantes : l'équation scalaire

$$\mathrm{D}^{\beta}\mathrm{D}_{\beta}\gamma^{\alpha}_{\alpha} - \mathrm{D}^{\beta}\mathrm{D}_{\alpha}\gamma^{\alpha}_{\beta} - K\gamma^{\alpha}_{\alpha} + \rho^{\alpha}_{\alpha}b^{\beta}_{\beta} - \rho^{\alpha}_{\beta}b^{\beta}_{\alpha} = 0, \tag{4.12}$$

qui provient de la linéarisation de l'équation (3.21) écrite sur la surface déformée et porte donc le nom d'*équation de Gauss linéarisée*, et l'équation dans $\Gamma(T_1S)$

$$\mathrm{D}_{\alpha}\rho^{\alpha}_{\beta} - \mathrm{D}_{\beta}\rho^{\alpha}_{\alpha} - 2b^{\lambda}_{\beta}\mathrm{D}_{\alpha}\gamma^{\alpha}_{\lambda} + b^{\lambda}_{\beta}\mathrm{D}_{\lambda}\gamma^{\alpha}_{\alpha} + b^{\lambda}_{\alpha}\mathrm{D}_{\beta}\gamma^{\alpha}_{\lambda} = 0, \tag{4.13}$$

qui provient de la linéarisation de l'équation (3.22) sur la surface déformée et à ce titre est appelée *équation de Codazzi-Mainardi linéarisée*.

Les équations (4.12) et (4.13) sont des égalités entre opérateurs, c'est la raison pour laquelle on ne précise pas la dépendance en $\boldsymbol{u}$.

Proposition 4.3 *Soit* $\boldsymbol{u}$ *une 1-forme sur* Ω^ε *,* $\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u})$ *et* $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u})$ *les tenseurs définis par les expressions* (4.7) *et* (4.2)*. Alors les équations* (4.12) *et* (4.13) *de Gauss et de Codazzi-Mainardi sont automatiquement vérifiées.*

Preuve. Elle va consister à reporter les expressions (4.7) et (4.2) dans les membres de gauche des équations (4.12) et (4.13).

1a. Montrons tout d'abord l'équation (4.12) lorsque $u_\alpha \equiv 0$. Le membre de gauche de (4.12) devient alors

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^\beta\mathrm{D}_\beta\gamma^\alpha_\alpha - \mathrm{D}^\beta\mathrm{D}_\alpha\gamma^\alpha_\beta - K\gamma^\alpha_\alpha + \rho^\alpha_\alpha b^\beta_\beta - \rho^\alpha_\beta b^\beta_\alpha \\ = -\mathrm{D}^\beta\mathrm{D}_\beta(b^\alpha_\alpha u_3) + \mathrm{D}^\beta\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\beta u_3 + K b^\alpha_\alpha u_3 + b^\beta_\beta(\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha u_3) \\ - b^\beta_\alpha \mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\beta u_3 - b^\beta_\beta c^\alpha_\alpha u_3 + c^\alpha_\beta b^\beta_\alpha u_3.\end{aligned}$$

La dérivée covariante commutant avec la contraction et le produit tensoriel, on peut développer les dérivées doubles comme les dérivées ordinaires d'un produit. L'expression précédente devient

$$\begin{aligned}- u_3(\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha b^\beta_\beta) - 2(\mathrm{D}_\alpha b^\beta_\beta)\mathrm{D}^\alpha u_3 + u_3(\mathrm{D}^\beta\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\beta) + (\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\beta)\mathrm{D}^\beta u_3 \\ + (\mathrm{D}^\beta b^\alpha_\beta)\mathrm{D}_\alpha u_3 + b^\alpha_\beta\left[c^\beta_\alpha + (K - c^\nu_\nu)\delta^\beta_\alpha\right] u_3.\end{aligned}$$

En utilisant les équations (3.22), qui impliquent en particulier que $\mathrm{D}_\alpha b^\beta_\beta = \mathrm{D}_\beta b^\beta_\alpha$, on voit que tous les termes de l'expression précédente s'annulent sauf a priori le dernier entre crochet. Grâce à la relation (3.12), celui-ci vaut encore

$$\left[b^\alpha_\alpha c^\nu_\nu - K b^\alpha_\alpha + K b^\alpha_\alpha - b^\beta_\beta c^\nu_\nu\right] u_3 = 0,$$

ce qui montre (4.12) lorsque les composante u_α de $\boldsymbol{u}$ sont nulles.

1b. Par linéarité, il suffit donc de montrer le résultat lorsque $u_3 \equiv 0$. Dans ce cas, l'équation devient

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^\beta\mathrm{D}_\beta\gamma^\alpha_\alpha - \mathrm{D}^\beta\mathrm{D}_\alpha\gamma^\alpha_\beta - K\gamma^\alpha_\alpha + \rho^\alpha_\alpha b^\beta_\beta - \rho^\alpha_\beta b^\beta_\alpha \\ = \mathrm{D}^\beta\mathrm{D}_\beta\mathrm{D}^\alpha u_\alpha - \frac{1}{2}\mathrm{D}^\beta\mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}^\alpha u_\beta - \frac{1}{2}\mathrm{D}^\beta\mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\beta u^\alpha - K\mathrm{D}^\alpha u_\alpha + b^\beta_\beta b^\gamma_\alpha \mathrm{D}^\alpha u_\gamma \\ + b^\beta_\beta \mathrm{D}^\alpha b^\gamma_\alpha u_\gamma - b^\beta_\alpha b^\gamma_\beta \mathrm{D}^\alpha u_\gamma - b^\beta_\alpha \mathrm{D}_\beta b^{\alpha\gamma} u_\gamma.\end{aligned} \tag{4.14}$$

L'équation (3.12) montre que les termes facteurs du tenseur $\mathrm{D}_\alpha u_\beta$ s'annulent tous dans l'expression précédente. D'autre part la définition du tenseur de courbure $\widetilde{R}$ donne la formule suivante pour la permutation de deux dérivées covariantes agissant sur un tenseur d'ordre deux : (comparer avec (2.33))

$$\mathrm{D}_\beta\mathrm{D}_\alpha S_{\gamma\delta} - \mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\beta S_{\gamma\delta} = \widetilde{R}_{\,\alpha\beta\gamma\cdot}^{\,\cdot\cdot\cdot\,\nu}\, S_{\nu\delta} + \widetilde{R}_{\,\alpha\beta\delta\cdot}^{\,\cdot\cdot\cdot\,\nu}\, S_{\gamma\nu}. \tag{4.15}$$

La formule (2.33) appliquée à la 1-forme u_α , avec la convention de montée et de descente des indices, en effectuant une contraction, et l'utilisation des formules (3.12) et (3.20) donne la relation suivante :

$$\mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}^\beta u_\beta - \mathrm{D}^\beta \mathrm{D}^\alpha u_\beta = \widetilde{R}^{\beta\alpha\cdot\nu}_{\cdot\cdot\beta\cdot}\, u_\nu = -K\, u^\alpha. \tag{4.16}$$

Appliquant la formule (4.15) au tenseur $\mathrm{D}^\alpha u_\beta$, et en effectuant deux contractions, on trouve

$$\mathrm{D}^\beta \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}^\alpha u_\beta = \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}^\beta \mathrm{D}^\alpha u_\beta + \widetilde{R}^{\cdot\beta\alpha\cdot}_{\alpha\cdot\cdot\nu}\, \mathrm{D}^\nu u_\beta + \widetilde{R}^{\cdot\beta\cdot\nu}_{\alpha\cdot\beta\cdot}\, \mathrm{D}^\alpha u_\nu.$$

Mais dans cette expression, les deux derniers termes sont opposés l'un à l'autre grâce aux propriétés (2.31) du tenseur $\widetilde{R}$, donc ils s'annulent mutuellement. En utilisant alors l'équation (4.16), on trouve

$$\mathrm{D}^\beta \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}^\alpha u_\beta = \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}^\beta u_\beta + \mathrm{D}^\alpha K\, u_\alpha.$$

En effectuant le même type d'opération sur le deuxième et le troisième terme de l'équation (4.14), les termes comportant trois dérivées covariantes s'annulent, et celle-ci devient

$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^\alpha K\, u_\alpha - \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^\alpha K\, u_\alpha + b^\beta_\beta\, \mathrm{D}^\alpha b^\gamma_\alpha u_\gamma - b^\beta_\alpha\, \mathrm{D}_\beta b^{\alpha\gamma} u_\gamma. \tag{4.17}$$

Les deux derniers termes de cette équation peuvent encore s'écrire

$$-b^\gamma_\alpha u_\gamma\, \mathrm{D}^\alpha b^\beta_\beta + b^{\beta\gamma} u_\gamma\, \mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\beta + \mathrm{D}^\alpha b^\beta_\beta b^\gamma_\alpha u_\gamma - \mathrm{D}^\alpha c^\gamma_\alpha u_\gamma = \mathrm{D}^\alpha K u_\alpha$$

grâce à l'équation (3.12) et à l'équation de Codazzi-Mainardi. L'expression (4.17) est donc nulle, ce qui termine la démonstration de (4.12).

2. Pour montrer (4.13), on utilise la relation (4.10). Grâce à cette dernière, on a en effet

$$\mathrm{D}_\alpha \rho^\alpha_\beta = \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\beta \theta^\alpha + \mathrm{D}_\alpha b^\nu_\beta \gamma^\alpha_\nu + \mathrm{D}_\alpha b^\nu_\beta \omega^{\,\alpha\cdot}_{\cdot\nu}$$

et

$$\mathrm{D}_\beta \rho^\alpha_\alpha = \mathrm{D}_\beta \mathrm{D}_\alpha \theta^\alpha + \mathrm{D}_\beta (b^\nu_\alpha \gamma^\alpha_\nu) + \mathrm{D}_\beta (b^\nu_\alpha \omega^{\,\alpha\cdot}_{\cdot\nu}).$$

Le tenseur $\omega_{\beta\gamma}$ étant antisymétrique tandis que $b_{\alpha\beta}$ est symétrique, on a $b^\nu_\alpha \omega^{\,\alpha\cdot}_{\cdot\nu} = 0$. Permutant alors les dérivées covariantes D grâce à (4.15), développant les expressions précédentes, et utilisant encore le fait que $\omega_{\alpha\beta}$ soit antisymétrique (couplé avec le fait que le tenseur $\mathrm{D}_\alpha b^\gamma_\beta$ est symétrique), on obtient

$$\mathrm{D}_\alpha \rho^\alpha_\beta - \mathrm{D}_\beta \rho^\alpha_\alpha = K\theta_\beta + b^\nu_\beta \mathrm{D}_\alpha \gamma^\alpha_\nu + b^\nu_\beta \mathrm{D}_\alpha \omega^{\,\alpha\cdot}_{\cdot\nu} - b^\nu_\alpha \mathrm{D}_\beta \gamma^\alpha_\nu.$$

Le membre de gauche de (4.13) vaut donc

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}_\alpha \rho^\alpha_\beta - \mathrm{D}_\beta \rho^\alpha_\alpha - 2b^\lambda_\beta \mathrm{D}_\alpha \gamma^\alpha_\lambda + b^\lambda_\beta \mathrm{D}_\lambda \gamma^\alpha_\alpha + b^\lambda_\alpha \mathrm{D}_\beta \gamma^\alpha_\lambda \\
&= K\theta_\beta - b^\nu_\beta \mathrm{D}_\alpha \gamma^\alpha_\nu + b^\nu_\beta \mathrm{D}_\alpha \omega^{\,\alpha\cdot}_{\cdot\nu} + b^\nu_\beta \mathrm{D}_\nu \gamma^\alpha_\alpha \\
&= K\mathrm{D}_\beta u_3 + Kb^\gamma_\beta u_\gamma + b^\gamma_\beta \mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\gamma u_3 - b^\gamma_\beta \mathrm{D}_\gamma b^\alpha_\alpha u_3 - \tfrac{1}{2} b^\gamma_\beta \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}^\alpha u_\gamma - \tfrac{1}{2} b^\gamma_\beta \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\gamma u^\alpha \\
&\qquad\quad - \tfrac{1}{2} b^\gamma_\beta \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\gamma u^\alpha + \tfrac{1}{2} b^\gamma_\beta \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}^\alpha u_\gamma + \tfrac{1}{2} b^\gamma_\beta \mathrm{D}_\gamma \mathrm{D}^\alpha u_\alpha + \tfrac{1}{2} b^\gamma_\beta \mathrm{D}_\gamma \mathrm{D}_\alpha u^\alpha \\
&= Kb^\gamma_\beta u_\gamma + b^\gamma_\beta \mathrm{D}_\gamma \mathrm{D}_\alpha u^\alpha - b^\gamma_\beta \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\gamma u^\alpha \\
&= b^\gamma_\beta (K - K) u_\gamma \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Les équations (4.12) et (4.13) sont donc en particulier valables sur les surfaces S_h, à conditions d'écrire la dépendance en h des tenseurs en présence.

On verra que dans le développement asymptotique de l'opérateur d'élasticité, les termes en ε^2 peuvent être modifiés grâce aux équations (4.12) et (4.13) sur la surface S_0. On se servira alors de la proposition précédente pour obtenir des résultats comparables à ceux de John (voir [33]).

4.3 Equations tridimensionnelles

Le but de cette dernière sous-section est d'écrire les équations de l'élasticité 3D en coordonnées normales. Pour cela, on part des équations écrites de manière naturelle en termes de dérivée covariante ∇, puis on utilise le lemme 3.6 et les relations (3.19) pour les exprimer en termes de dérivées covariantes D^h, de dérivées ∂_3^ε et d'opérateurs sur les surfaces S_h dépendant de $a_{\alpha\beta}(h)$ et $b_{\alpha\beta}(h)$.

Pour commencer, on intègre par partie les équations (4.5). On peut intégrer par partie avec des dérivées covariantes (voir par exemple [27]), la formule découlant de la formule de Stokes dans le cas de $\mathbb{R}^n$ pour une variété de dimension n, en utilisant une partition de l'unité liée à un recouvrement par des cartes.

Dans le cas présent, si $\boldsymbol{v} \in V(\Omega^\varepsilon)$, l'intégrale figurant dans la formule (4.5) peut encore s'écrire

$$\int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijk\ell} \gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u}) \nabla_i v_j \,\mathrm{d}V = \int_{\Omega^\varepsilon} f^i v_i \,\mathrm{d}V.$$

par définition du tenseur γ_{ij}.

En intégrant alors par partie et en vertu des propriétés de $\boldsymbol{v}$, cette égalité s'écrit encore

$$-\int_{\Omega^\varepsilon} v_j \nabla_i A^{ijk\ell} \gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u}) \,\mathrm{d}V + \int_{S_{\pm\varepsilon}} v_j A^{3jk\ell} \gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u}) \,\mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega^\varepsilon} f^i v_i \,\mathrm{d}V.$$

L'égalité étant vraie pour tout $\boldsymbol{v} \in V(\Omega^\varepsilon)$ on déduit que les équations de l'élasticité s'écrivent pour tout $j = 1, 2, 3$

$$-\nabla_i A^{ijk\ell}\gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u}) = f^j \quad \text{dans} \quad \Omega^\varepsilon \tag{4.18a}$$

$$A^{3jk\ell}\gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u}) = 0 \qquad \text{sur} \quad S_{\pm\varepsilon} \tag{4.18b}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_0^\varepsilon. \tag{4.18c}$$

Le but de cette sous-section étant simplement d'effectuer un changement de variable dans cet opérateur, on suppose désormais que la 1-forme $\boldsymbol{u}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. L'expression précédente est donc une égalité de champs de tenseurs définis sur Ω^ε et les membres de gauche des équations (4.18a) et (4.18b) définissent des éléments de $\Gamma(T^1\Omega^\varepsilon)$. En contractant par le tenseur g_{ij}, on obtient des éléments de $\Gamma(T_1\Omega^\varepsilon)$. Dans la suite, pour des raisons pratiques, c'est sous cette dernière forme qu'on utilise les équations (4.18). De plus, d'après le lemme 3.6, une égalité dans $\Gamma(T_1\Omega^\varepsilon)$ se décompose en deux égalités valables pour tout $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$: une dans $\Gamma(T_1 S_h)$ et une dans $\mathscr{C}^\infty(S_h)$ (c'est la réduction normale de la 1-forme). L'équation dans $\mathscr{C}^\infty(S_h)$ s'appelle la *composante transverse* et l'équation dans $\Gamma(T_1 S_h)$ les *composantes surfaciques* de l'équation (4.18).

Le théorème suivant donne l'expression en paramétrisation normale de l'opérateur défini en (4.18).

Théorème 4.4 *Soit* $\boldsymbol{u} \in \Gamma(T_1\Omega^\varepsilon)$. *La réduction normale des équations* (4.18a) *et* (4.18b), *écrites dans* $\Gamma(T_1\Omega^\varepsilon)$ *(c'est-à-dire en composantes covariantes), fournit les équations suivantes : en composantes transverses (pour* $j = 3$ *), les égalités*

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\partial^\varepsilon_{33} u_3 + (\lambda + \mu)\partial^\varepsilon_3 \gamma^\alpha_\alpha(h)(\boldsymbol{u}) - \mu b^\alpha_\alpha(h)\partial^\varepsilon_3 u_3 + \mu\rho^\alpha_\alpha(h)(\boldsymbol{u}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -f_3 \quad \textit{dans} \quad \Omega^\varepsilon, \\ (\lambda + 2\mu)\partial^\varepsilon_3 u_3 + \lambda\gamma^\alpha_\alpha(h)(\boldsymbol{u}) = 0 \quad \textit{sur} \quad S_{\pm\varepsilon}, \end{cases} \tag{4.19}$$

où la première équation est aussi une égalité dans $\mathscr{C}^\infty(S_h)$ *pour tout* $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ *et la deuxième une égalité dans* $\mathscr{C}^\infty(S_{\pm\varepsilon})$. *En composantes surfaciques, (pour* $j = \alpha$ *), on trouve*

$$\begin{cases} 2\mu\partial^\varepsilon_3\gamma_{\alpha 3}(h)(\boldsymbol{u}) + \lambda\partial^\varepsilon_3(\mathrm{D}^h_\alpha u_3) - 2\mu b^\beta_\beta(h)\gamma_{\alpha 3}(h)(\boldsymbol{u}) + \lambda\mathrm{D}^h_\alpha\gamma^\nu_\nu(h)(\boldsymbol{u}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2\mu\mathrm{D}^h_\beta\gamma^\beta_\alpha(h)(\boldsymbol{u}) = -f_\alpha \quad \textit{dans} \quad \Omega^\varepsilon, \\ 2\mu\gamma_{\alpha 3}(h)(\boldsymbol{u}) = 0 \quad \textit{sur} \quad S_{\pm\varepsilon}, \end{cases} \tag{4.20}$$

où la première équation est aussi une égalité dans $\Gamma(T_1 S_h)$ *pour tout* $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ *et la deuxième une équation dans* $\Gamma(T_1 S_{\pm\varepsilon})$.

Remarque 4.5 Bien qu'écrites dans un système de coordonnées locales, les équations (4.19) et (4.20) sont intrinsèques car tous les objets indicés sont des champs de tenseurs. ■

Preuve. Remarquons tout d'abord que g_{ij} (et donc g^{ij}) étant de dérivée covariante nulle, le tenseur $\boldsymbol{A}$ est lui aussi de dérivée covariante nulle (voir la formule (4.3)). Comme ∇ commute avec la contraction des tenseurs, (4.18a) peut encore se réécrire

$$-A^{ijk\ell}\nabla_i\gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u}) = f^j.$$

1. Pour la composante transverse ($j = 3$), le résultat de la réduction normale du tenseur donnant une fonction, la multiplication par $g_{33} = 1$ ne change rien, et on peut faire les calculs de l'opérateur (4.18a) en composantes contravariantes. Dans la suite des calculs, on ne précise plus la dépendance en h des tous les tenseurs en présences. Compte tenu des hypothèses faites sur les coefficients de $\boldsymbol{A}$, l'équation (4.18a) se réduit à

$$A^{3333}\nabla_3\nabla_3 u_3 + A^{33\alpha\beta}\nabla_3\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) + A^{\alpha 3\beta 3}\nabla_\alpha\nabla_\beta u_3 + A^{\alpha 3\beta 3}\nabla_\alpha\nabla_3 u_\beta = -f^3.$$

Le tenseur de courbure de Riemann de Ω^ε étant identiquement nul, on peut permuter les dérivées covariantes ∇ , donc l'équation, compte tenu de la symétrie du tenseur $A^{\alpha 3\beta 3}$, s'écrit :

$$A^{3333}\partial^\varepsilon_{33}u_3 + (A^{33\alpha\beta} + A^{\alpha 3\beta 3})\nabla_3\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) + A^{\alpha 3\beta 3}\nabla_\alpha\nabla_\beta u_3 = -f^3,$$

et un calcul à partir des expressions (3.19) montre que dans un système de coordonnées locales, on a

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha\nabla_\beta u_3 &= \partial_\alpha(\nabla_\beta u_3) - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\nabla_\gamma u_3 - \Gamma^3_{\alpha\beta}\nabla_3 u_3 - \Gamma^\gamma_{\alpha 3}\nabla_\beta u_\gamma - \Gamma^3_{\alpha 3}\nabla_3 u_3\\
&= \mathrm{D}_\alpha(\nabla_\beta u_3) - b_{\alpha\beta}\nabla_3 u_3 + b^\gamma_\alpha\nabla_\beta u_\gamma\\
&= \mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\beta u_3 + \mathrm{D}_\alpha b^\gamma_\beta u_\gamma - b_{\alpha\beta}\partial^\varepsilon_3 u_3 + b^\gamma_\alpha\mathrm{D}_\beta u_\gamma - b^\gamma_\alpha b_{\beta\gamma}u_3\\
&= \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) - b_{\alpha\beta}\partial^\varepsilon_3 u_3.
\end{aligned}$$

Cette équation est simplement l'expression d'un objet 3D en coordonnées normales en utilisant le lemme 3.6. Les opérateurs dépendent donc de h , et la présence de la dérivée partielle ∂^ε_3 ne dépend pas du système de coordonnées choisi. L'équation précédente est en particulier bien intrinsèque sur S_h . Remarquons d'autre part que puisque la dérivée covariante commute avec le tenseur métrique, on a

$$g^{\alpha\beta}\nabla_3\,\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) = \nabla_3\,\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{u}) = \partial^\varepsilon_3\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{u}),$$

car $\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{u})$ est une fonction. On développe alors de même l'équation (4.18b), et en définitive, grâce à (4.3), les équations (4.18a) et (4.18b) s'écrivent bien comme l'équation (4.19).

2. Passons donc maintenant à $j = \sigma$ (composantes surfaciques). Pour obtenir les équations dans $\Gamma(T_1\Omega^\varepsilon)$, on multiplie (4.18a) par $g_{\sigma\alpha}$ en sommant sur σ ($g_{3\alpha} = 0$). L'équation s'écrit alors

$$2A_{\alpha\cdots}^{\cdot 3\beta 3}\,\nabla_3\gamma_{\beta 3}(\boldsymbol{u}) + A_{\alpha\cdots}^{\cdot\beta 33}\,\nabla_\beta\nabla_3 u_3 + A_{\alpha\cdots}^{\cdot\sigma\beta\delta}\,\nabla_\sigma\gamma_{\beta\delta}(\boldsymbol{u}) = -f^\sigma g_{\sigma\alpha} =: -f_\alpha. \qquad (4.21)$$

Or on trouve après calcul tenant compte des symétries de $\boldsymbol{A}$ et des expressions du type (3.19) pour des tenseurs deux fois covariants liant les connexions ∇ et D , que l'on a

$$A_{\alpha\cdots}^{\cdot\sigma\beta\delta}\,\nabla_\sigma\gamma_{\beta\delta} = A_{\alpha\cdots}^{\cdot\sigma\beta\delta}\,\mathrm{D}_\sigma\gamma_{\beta\delta} - 2A_{\alpha\cdots}^{\cdot\sigma\beta\delta}\,b_{\sigma\beta}\gamma_{\delta 3} \qquad (4.22)$$

valable en tant qu'opérateur dépendant de h . De plus

$$A_{\alpha\cdots}^{\cdot\beta 33}\,\nabla_\beta\nabla_3 u_3 = A_{\alpha\cdots}^{\cdot\beta 33}\,\partial_3^\varepsilon\partial_\beta u_3 + 2A_{\alpha\cdots}^{\cdot\beta 33}\,b_\beta^\nu\gamma_{\nu 3}(\boldsymbol{u}). \qquad (4.23)$$

Enfin on a l'égalité suivante :

$$\nabla_3\gamma_{\alpha 3} = \partial_3^\varepsilon\gamma_{\alpha 3} + b_\alpha^\nu\gamma_{\nu 3}. \qquad (4.24)$$

En reportant alors les équations (4.22), (4.23), (4.24) dans l'équation (4.21), on trouve grâce à (4.3)

$$\begin{aligned}2\mu\partial_3^\varepsilon\gamma_{\alpha 3}(\boldsymbol{u}) + 2\mu b_\alpha^\nu\gamma_{\nu 3}(\boldsymbol{u}) + \lambda\partial_3^\varepsilon(\mathrm{D}_\alpha u_3) + 2\lambda b_\alpha^\beta\gamma_{\beta 3}(\boldsymbol{u}) + \lambda\mathrm{D}_\alpha\gamma_\nu^\nu(\boldsymbol{u})&\\ + 2\mu\mathrm{D}_\beta\gamma_\alpha^\beta(\boldsymbol{u}) - 2\lambda b_\alpha^\beta\gamma_{\beta 3}(\boldsymbol{u}) - 2\mu b_\beta^\beta\gamma_{\alpha 3}(\boldsymbol{u}) - 2\mu b_\alpha^\beta\gamma_{\beta 3}(\boldsymbol{u}) &= -f_\alpha.\end{aligned}$$

Remarquons que le second membre de l'équation précédente fait intervenir les composantes covariantes de $\boldsymbol{f}$ et non pas les composantes contravariantes que nous avions utilisées pour poser le problème. On trouve donc bien l'équation (4.20). ■

Dans le chapitre suivant, on va développer les équations (4.19) et (4.20) en fonction de h . Pour cela, on va tout d'abord montrer que les équations écrites sur S_h peuvent en fait s'interpréter comme des équations tensorielles écrites sur S_0 et dépendant de h de manière $\mathscr{C}^\infty$.

Chapitre II

Développement des équations

Le but de ce chapitre est d'expliciter le rôle du petit paramètre ε dans les équations de l'élasticité tridimensionnelle sur une coque. Dans le chapitre précédent, on a exprimé ces équations comme des équations tensorielles posées sur les surfaces S_h pour tout h. Dans un premier temps, on montre comment on peut ramener l'étude de tenseurs sur S_h à des tenseurs définis sur S_0 et dépendant de h. Les objets en présence appartiennent alors naturellement à des espaces du type $\mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon),\Gamma(T^q_pS_0)\big)$, et on peut effectuer dans ces espaces des développements de Taylor à coefficients tensoriels. On montre en fait que tous les tenseurs naturels : métrique, courbure, dérivée covariante, sont développables en séries entières en h. En effectuant alors un changement d'échelle, ou *scaling*, on montre que l'opérateur 3D admet lui-même un développement en série entière en ε. La fin du chapitre donne l'expression des coefficients du développement de cet opérateur. La plupart des développements des champs de tenseurs intervenant dans les équations se trouve dans NAGHDI [41], où une approche différente est employée, utilisant le *shifter* et ses propriétés étudiées dans la sous-section 1.2 du présent chapitre. Le *shifter* est utilisé ici pour effectuer un changement d'inconnue dans les équations en utilisant la *projection euclidienne* du déplacement.

1 Projections sur la surface moyenne

Les équations (4.19) et (4.20) du chapitre I sont des équations posées sur les surfaces S_h. Elles sont écrites en coordonnées locales, mais les objets indicés étant des tenseurs sur S_h (d'après le lemme 3.6 du chapitre I) elles expriment en fait des égalités de champs de tenseurs sur S_h. L'idée classique, qu'on retrouve en particulier dans [41], est qu'un champ de tenseurs sur S_h peut se plonger dans $\mathbb{R}^3$ et ainsi définir, après un changement de base euclidienne, un champ de tenseurs sur S_0 qui dépend de h. Par exemple, les champs de vecteurs sur S_h déterminent aussi des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dépendant d'un point $P_h = F_h(P_0)$ de S_h. Il suffit de les exprimer une base de $\mathbb{R}^3$ induite par une base locale au point P_0 de la surface S_0 pour voir qu'ils définissent bien des champs de vecteurs dépendant de h sur S_0. C'est dans cette optique qu'a été introduit le *shifter* qui est étudié dans la sous-section 1.2. Auparavant, on donne un approche plus intrinsèque que la précédente, qui montre a posteriori que le shifter n'est ici qu'un outil de calcul qui peut éventuellement simplifier l'écriture des équations. Enfin, on définit les *opérateurs* 2D qui sont des opérateurs tensoriels agissant sur la surface moyenne, et qu'on retrouve dans les coefficients des développements de Taylor effectués dans les sections suivantes.

1.1 Projections intrinsèques

Rappelons que sur S_h, on peut définir un atlas à partir d'un atlas sur S (voir la sous-section 3.1 du chapitre I). En effet, à partir d'une carte locale (U, φ) sur S, on peut définir une carte locale sur S_h, dont l'ouvert est $F_h(U)$ (où $F_h = \Phi^\varepsilon(\,\cdot\,, h)$ avec h fixé), muni de l'application

$$S_h \supset \Phi^\varepsilon(U, h) \xrightarrow{F_h^{-1}} U \xrightarrow{\varphi} \varphi(U) \subset \mathbb{R}^2. \tag{1.1}$$

En prenant des cartes locales parcourant un atlas de S, on définit ainsi un atlas pour S_h. Dans la démonstration du lemme 3.6 du chapitre I, on a utilisé le fait que les changements de cartes locales associés à cet atlas sont les mêmes que ceux de l'atlas initial de S.

L'application Φ^ε est un difféomorphisme de $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ sur Ω^ε. De plus, c'est ce difféomorphisme qui induit les systèmes de coordonnées normales en prenant un système de coordonnées sur la surface S (voir la définition 3.1 du chapitre I). Or sur la variété $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, on a la projection naturelle :

$$S \times (-\varepsilon, \varepsilon) \ni (P, h) \longrightarrow (P, 0) \in S \times \{0\} = S_0. \tag{1.2}$$

C'est cette projection, dans un système de coordonnées normales, qui va permettre de ramener sur la surface S_0 des champs de tenseurs définis sur les surfaces S_h.

Définition 1.1 La *projection intrinsèque* sur la surface S_0 est l'application $\pi_0 : \Omega^\varepsilon \to S_0$ telle que $\pi_0 \circ \Phi^\varepsilon : S \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_0$ soit l'application définie par l'équation (1.2). ■

Soit (U, φ) une carte locale sur S, et soient $\{y^\alpha\}_{\alpha=1,2}$ les coordonnées locales associées. Dans ce système de coordonnées la projection (1.2) s'écrit simplement

$$\varphi(U) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \ni (y^\alpha, h) \longrightarrow (y^\alpha, 0) \in \varphi(U) \times \{0\} = \varphi(U). \tag{1.3}$$

Mais la carte (U,φ) induit sur Ω^ε un système de coordonnées normales dont la carte locale est $\Phi^\varepsilon\big(U\times(-\varepsilon,\varepsilon)\big)$ munie de l'application

$$\mathbb{R}^3 \supset \Phi^\varepsilon\big(U\times(-\varepsilon,\varepsilon)\big) \xrightarrow{(\Phi^\varepsilon)^{-1}} U\times(-\varepsilon,\varepsilon) \xrightarrow{\varphi\times \mathrm{Id}} \varphi(U)\times(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbb{R}^3.$$

Cette carte locale induit un système de coordonnées normales $\{y^\alpha,h\}_{\alpha=1,2}$ qui sont les mêmes que le système de coordonnées sur $U\times(-\varepsilon,\varepsilon)$. Or par définition la projection $\pi_0\circ\Phi^\varepsilon$ s'écrit dans ce système comme (1.3). On en déduit que dans un système de coordonnées normales, la projection π_0 s'écrit simplement $\pi_0:(y^\alpha,h)\to(y^\alpha,0)$. Il est alors clair que la restriction du π_0 à une surface S_h définit un isomorphisme de S_h dans S_0, qui envoie le vecteur $X_\alpha(h)$ sur le vecteur $X_\alpha(0)$, et on vérifie que $\pi_0\big|_{S_h} = F_h^{-1}$.

Les applications inverses l'une de l'autre F_h et $\pi_0\big|_{S_h}$ sont des difféomorphismes entre les surfaces S_h et S_0. Ces difféomorphismes vont permettre de ramener l'étude des champs de tenseurs sur S_h à l'étude de champs de tenseurs sur S_0. Avant d'étudier cela dans le détail, rappelons comment on définit l'image d'un champ de vecteurs par un difféomorphisme. Soient M et N deux variétés, et $F:M\to N$ un difféomorphisme (Les variétés M et N ont donc même dimension notée n).

Définition 1.2 Soit T un champ de vecteurs sur la variété M. Le *champ de vecteurs image* de T par le difféomorphisme F, noté $\mathrm{d}F(T)$, est défini par la relation

$$\forall\, f\in\mathscr{C}^\infty(N),\qquad \big(\mathrm{d}F(T)\big)(f) = T(f\circ F). \tag{1.4}$$

■

La relation (1.4) définit bien un champ de vecteurs, car un champ de vecteurs est déterminé par ses valeurs sur toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. Soit alors (U,φ) une carte locale sur M autour d'un point P et (V,ψ) une carte locale sur N autour du point $Q=F(P)$. On dispose donc d'un système de coordonnées locales $\{x^i\}_{i=1}^n$ sur M autour de P et d'un système de coordonnées locales $\{y^j\}_{j=1}^n$ sur N autour de Q. On peut de plus supposer que l'application $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}$ est un difféomorphisme de $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^n$ dans $\psi(V)\subset\mathbb{R}^n$. Dans les équations suivantes, si les coordonnées x^i et y^j apparaissent simultanément, alors il est implicite qu'elles se correspondent via le difféomorphisme $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}$.

Soit donc f une fonction sur N autour du point Q. Dans le système de coordonnées sur M, le champs de vecteurs T s'écrit

$$T = T^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

où la notation $T^i(x)$ précise que T^i est une fonction définie dans le système de coordonnées $\{x^i\}$. D'autre part, sur N, on pose

$$\mathrm{d}F(T) = Z^j(y)\,\frac{\partial}{\partial y^j},$$

et on se propose de trouver l'expression de Z^j en fonction des T^i. On a pour f une fonction définie autour du point $Q \in N$,

$$\big(\mathrm{d}F(T)\big)(f) = Z^i(y)\,\frac{\partial}{\partial \zeta^i}(f \circ \psi^{-1}),$$

où les $\{\zeta^i\}$ sont les coordonnées euclidiennes de $\mathbb{R}^n$ autour de $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$. Mais par définition, on a aussi

$$T(f \circ F) = T^j(x)\,\frac{\partial}{\partial \xi^j}(f \circ F \circ \varphi^{-1}),$$

où $\{\xi^j\}$ est un système de coordonnées euclidiennes autour de $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. On a donc

$$\begin{aligned} T(f \circ F) &= T^j(x)\,\frac{\partial}{\partial \xi^j}\big(f \circ \psi^{-1} \circ \big(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\big)\big), \\ &= T^j(x)\,\frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial \zeta^k}\,\frac{\partial}{\partial \xi^j}(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_k\,. \end{aligned}$$

On en déduit donc par identification que

$$Z^k(y) = Z^k\big(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x)\big) = T^j(x)\,A^k_j(x), \tag{1.5}$$

où

$$A^k_j(x) = \frac{\partial}{\partial \xi^j}(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_k.$$

est la matrice jacobienne du difféomorphisme F à travers les cartes locales (U, φ) et (V, ψ).

La relation (1.5) s'étend de manière évidente aux champs de tenseurs. Dans le cas d'un champ de 1-formes (et plus généralement, pour un indice covariant), c'est l'inverse de la matrice jacobienne du difféomorphisme qui intervient. Ceci permet donc de définir l'image d'un champ de tenseurs de type (p, q) par un difféomorphisme. L'image conserve le type (et le sous-type) du tenseur concerné. Effectuer un changement de coordonnées pour un champ de tenseurs est en fait la même opération que calculer son image par le difféomorphisme identité dans deux systèmes de coordonnées différents. On retrouve ainsi les équations du type (2.16) du chapitre I pour un changement de coordonnées locales.

Dans le cas des coques, on a le difféomorphisme $\pi_0\big|_{S_h} : S_h \to S_0$. Si T est un champ de tenseurs sur S_h , l'image $\mathrm{d}\pi_0\big|_{S_h}(T)$ sera alors un champ de tenseurs sur S_0 . Le lemme suivant montre qu'il est très facile de calculer les composantes de l'image par le difféomorphisme π_0 d'un champ de tenseurs sur S_h .

Lemme 1.3 *Soit T un champ de tenseurs sur la surface S_h . Dans un système de coordonnées normales, on dispose de la base locale $X_{\underline{\delta}}(h) \otimes \mathrm{d}y^{\underline{\alpha}}(h)$ liée au sous-type de T (voir la notation* 3.5 *du chapitre* I*). Dans cette base locale, le champ de tenseurs T s'écrit :*

$$T = \sum_{\underline{\alpha},\underline{\delta}} T^{\underline{\delta}}_{\underline{\alpha}}(h)\ X_{\underline{\delta}}(h) \otimes \mathrm{d}y^{\underline{\alpha}}(h).$$

Alors l'image du champ de tenseurs T par le difféomorphisme $\pi_0\big|_{S_h} : S_h \to S_0$ s'écrit localement

$$\mathrm{d}\pi_0\big|_{S_h}(T) = \sum_{\underline{\alpha},\underline{\delta}} T^{\underline{\delta}}_{\underline{\alpha}}(h)\ X_{\underline{\delta}}(0) \otimes \mathrm{d}y^{\underline{\alpha}}(0).$$

Preuve. La clef de la démonstration réside dans le fait que les cartes locales sur S_0 et sur S_h sont le mêmes, à composition par l'application $F_h = \pi_0\big|_{S_h}^{-1}$ près.

Ainsi, soit une carte locale (U, φ) sur S . Cette carte induit une carte locale $(F_h(U), \varphi \circ F_h^{-1})$ sur S_h , et les vecteurs coordonnées associés sont les vecteurs $X_\alpha(h)$. Si T est un champ de tenseurs sur S_h , on note donc $X_{\underline{\delta}}(h)\otimes\mathrm{d}y^{\underline{\alpha}}(h)$ la base locale en coordonnées normales associée à son sous-type. L'image $\mathrm{d}\pi_0\big|_{S_h}(T)$ définit alors un champ de tenseurs de même sous-type sur S_0 . Ce champ de tenseurs admet donc une décomposition dans la base locale $X_{\underline{\delta}}(0) \otimes \mathrm{d}y^{\underline{\alpha}}(0)$, et les composantes de $\mathrm{d}\pi_0\big|_{S_h}(T)$ dans cette base se calculent grâce à une formule du type (1.5). Or la matrice jacobienne de l'application $\pi_0\big|_{S_h} : S_h \to S_0$ dans les bases locales $X_\alpha(h)$ et $X_\alpha(0)$ est l'inverse de la matrice jacobienne de l'application $F_h : S_0 \to S_h$ dans les mêmes bases. Or cette dernière matrice est la matrice identité, car c'est la matrice de l'application $(\varphi \circ F_h^{-1}) \circ F_h \circ (\varphi \circ F_0^{-1})^{-1} = \mathrm{Id}$. On en déduit que les composantes de $\mathrm{d}\pi_0\big|_{S_h}(T)$ dans la base locale $X_{\underline{\delta}}(0) \otimes \mathrm{d}y^{\underline{\alpha}}(0)$ sont les mêmes que les composantes de T dans la base locale $X_{\underline{\delta}}(h) \otimes \mathrm{d}y^{\underline{\alpha}}(h)$, ce qui prouve le lemme. ∎

Remarque 1.4 On peut aussi définir, de manière similaire à la définition 1.2, l'application réciproque d'un champ de tenseurs par un difféomorphisme. L'image réciproque d'un champ de tenseurs sur S_h par l'application F_h coïncide alors avec l'image de ce même champ de tenseurs par l'application $\pi_0\big|_{S_h}$. ∎

L'intérêt de ce lemme réside dans le fait que les équations en présence sont des équations intrinsèques écrites en coordonnées locales, c'est-à-dire en composantes.

Le lemme précédent permet donc de dire que toutes les égalités tensorielles sur S_h sont en fait des égalités tensorielles sur S_0, avec la même écriture pour les composantes. Ceci est fondamental pour développer les équations, car les développements sont avant tout basés sur les développements de Taylor des composantes des tenseurs dans un système de coordonnées locales. Le lemme précédent garantit alors que les coefficients de ces développements sont encore des champs de tenseurs sur la surface S_0.

En utilisant successivement le lemme 3.6 du chapitre I, puis le lemme 1.3, on voit que les composantes d'un champ de tenseurs tridimensionnel définissent aussi des champs de tenseurs sur la surface moyenne S_0. Ces composantes dépendent alors de h de manière $\mathscr{C}^\infty$. Plus précisément, on a le

Corollaire 1.5 *Les notations sont celles du lemme* 3.6 *du chapitre* I. *Soit T un champ de tenseurs tridimensionnel de type (p,q). On note T_*^h le champ de tenseurs de S_h défini par l'équation* (3.16) *du chapitre* I. *Ce champ de tenseurs est de type (p_*, q_*) déterminé par les sous-ensembles J_* et I_*. Alors les images des champs de tenseurs T_*^h par les applications $\pi_0\big|_{S_h}$ définissent des champs de tenseurs sur S_0, qui s'écrivent pour tout $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$:*

$$\sum_{\underline{\delta},\underline{\alpha}} T_{\underline{\alpha}}^{\underline{\delta}}(h)\ X_{\underline{\delta}}(0) \otimes \mathrm{d}y^{\underline{\alpha}}(0).$$

De plus, ce champ de tenseurs est un élément de $\mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Gamma(T_{p_*}^{q_*} S_0)\big)$.

C'est cette dernière propriété des champs de tenseurs existant sur la coque qui va permettre d'effectuer des développements de Taylor dans des espaces du type $\mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Gamma(T_p^q S_0)\big)$.

Ainsi, dans le chapitre I, on avait trouvé l'équation suivante dans un système de coordonnées locales :

$$a_{\alpha\beta}(h) = a_{\alpha\beta}(0) - 2h b_{\alpha\beta}(0) + h^2 c_{\alpha\beta}(0), \tag{1.6}$$

où $b_{\alpha\beta}(0)$ et $c_{\alpha\beta}(0)$ sont les seconde et troisième formes fondamentales de la surface S_0. L'application des lemmes précédents permet donc de dire que cette égalité est en fait valable dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Gamma(T_2 S_0)\big)$, et non plus comme égalité de fonctions sur un ouvert de carte.

1.2 Projection euclidienne

Un autre moyen de ramener les équations sur la surface moyenne S_0 est de passer par l'espace ambiant. Conservons les notations précédentes. Soit $P \in S_0$, et $Q = F_h(P)$. Un champ de vecteurs tridimensionnel est par définition un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Au point P, on dispose de la base $(X_\alpha(0), N)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$, l'idée est alors d'exprimer le champ de vecteurs au point Q dans cette base. C'est la méthode utilisée dans [41]. A la fin de cette sous-section, on en discute les avantages et inconvénients. Le champ de tenseurs suivant est à la base des développements de Taylor effectués en théorie des coques.

Définition 1.6 On appelle *shifter* le champ de tenseurs symétrique défini sur S_0 et dépendant de h, $\boldsymbol{\mu} \in \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Gamma(T_1^1 S_0)\big)$ tel que

$$\mu_\beta^\alpha(h) = \delta_\beta^\alpha - h b_\beta^\alpha(0). \tag{1.7}$$

■

Le tenseur $\boldsymbol{\mu}$ peut aussi s'écrire $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{Id} - h\,\boldsymbol{b}(0)$, où $\boldsymbol{b}(0)$ est la seconde forme fondamentale de la surface S_0. Il est donc clair que pour ε assez petit, $\mu_\beta^\alpha(h)$ est inversible. Avant d'aller plus, loin donnons la définition suivante :

Définition 1.7 Si k est un entier positif, on pose pour tout $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$(b^k)_\beta^\alpha(h) = b_{\nu_1}^\alpha(h) b_{\nu_2}^{\nu_1}(h) \cdots\ b_\beta^{\nu_{k-1}}(h),$$

avec la convention $(b^0)_\beta^\alpha(h) = \delta_\beta^\alpha$. ■

Avec cette définition on a bien sûr $c_\alpha^\beta(h) = c_{\alpha\gamma}(h) a^{\gamma\beta}(h) = (b^2)_\alpha^\beta(h)$.

En utilisant la définition 1.7, il est clair que pour ε assez petit, l'inverse du *shifter* noté $(\mu^{-1})_\beta^\alpha(h)$, est égal à la série entière convergente

$$(\mu^{-1})_\beta^\alpha(h) = \sum_{k\geq 0} h^k (b^k)_\beta^\alpha(0). \tag{1.8}$$

Remarque 1.8 On peut aussi trouver une expression exacte de l'inverse du *shifter* en utilisant une formule algébrique pour l'inverse d'une matrice. On calcule en effet que le déterminant du *shifter* est égal à $1 - 2hH(0) + h^2 K(0)$ où $H(0)$ est la courbure moyenne et $K(0)$ la courbure de Gauss de la surface S_0. On trouve donc dans un système de coordonnées locales

$$(\mu^{-1})_\beta^\alpha(h) = \big(1 - 2hH(0) + h^2 K(0)\big)^{-1} m_\beta^\alpha(h),$$

où $m_\beta^\alpha(h)$ est la matrice

$$m_\beta^\alpha(h) = \begin{pmatrix} \mu_1^1(h) & -\mu_1^2(h) \\ -\mu_2^1(h) & \mu_2^2(h) \end{pmatrix}.$$

L'avantage de cette formule est qu'elle est exacte au sens où on peut calculer explicitement l'inverse sans avoir à calculer la somme d'une série entière. Mais dans la suite, on ne l'utilise jamais car d'une part ce sont précisément les développements des tenseurs qui sont utiles, et d'autre part les expressions tensorielles sont plus lourdes à manipuler et ne simplifient pas les équations. ■

Comme il est noté dans [41], le *shifter* intervient lorsqu'on cherche à faire le lien entre la variété $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ et son plongement dans $\mathbb{R}^3$. Soit par exemple un champ de vecteurs $\boldsymbol{T}(h) = T^\alpha(h) X_\alpha(h)$ défini sur S_h et provenant d'un champ de vecteurs tridimensionnel (voir le lemme 3.6 du chapitre I). Les composantes $T^\alpha(h)$ définissent donc un champ de vecteurs sur S_0 dépendant de h (corollaire 1.5). L'application Φ^ε définissant la coque est la composée de l'application identité suivie d'une translation le long d'une géodésique. Prenons une *paramétrisation* d'un ouvert de S_0 (c'est-à-dire l'inverse d'une carte locale). On note ainsi W un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et p une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ de W dans un ouvert de S_0. Notons $\{y^\alpha\}$ les coordonnées de $\mathbb{R}^2$ sur l'ouvert W (qui s'identifient avec les coordonnées locales définies par la carte locale associée à la paramétrisation), l'application Φ^ε s'écrit dans $W \times (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$(y^\alpha, h) \mapsto p(y^\alpha) + hN\big(p(y^\alpha)\big) \in \mathbb{R}^3.$$

Si on dérive cette application par rapport à y^α, cela donne par définition le vecteur $X_\alpha(h)$. D'autre part, la courbe $y^1 \mapsto p(y^1, y^2)$ est par définition une courbe intégrale du champ de vecteur $X_1(0)$. On a donc pour α un indice surfacique

$$\frac{\partial p}{\partial y^\alpha} = X_\alpha(0).$$

Supposons la coordonnée y^2 fixée. La dérivée du champ de vecteurs $N\big(p(y^1, y^2)\big)$ par rapport à y^1 est la dérivée du champ de vecteurs N le long de la courbe $y^1 \to p(y^1, y^2)$ qui est une courbe intégrale du champ de vecteur $X_1(0)$. D'après l'exemple 2.27 du chapitre I, on en déduit que

$$\frac{\partial}{\partial y^1} N\big(p(y^1, y^2)\big) = \nabla_{X_1(0)} N,$$

où ∇ est la connexion riemannienne de $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique euclidienne. En permutant le rôle de y^1 et y^2, on en déduit que pour α un indice surfacique, on a

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha} N\big(p(y)\big) = \nabla_{X_\alpha(0)} N = -b_\alpha^\beta(0) X_\beta(0).$$

On a en définitive

$$X_\alpha(h) = \mu_\alpha^\beta(h) X_\beta(0). \tag{1.9}$$

Cette équation est ici valable dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Ainsi, le champ de vecteurs $\boldsymbol{T}(h)$ peut s'écrire

$$\boldsymbol{T}(h) = T^\alpha(h) X_\alpha(h) = T^\alpha(h) \mu_\alpha^\beta(h) X_\beta(0). \tag{1.10}$$

Si on fixe un point $P \in S_0$, le repère $X_i(0)$, $i = 1, 2, 3$ au point P forme un repère de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Le vecteur $\boldsymbol{T}(h)$ pris au point $\Phi^\varepsilon(P, h)$ se décompose donc dans ce repère en $\boldsymbol{T}(h) = \widetilde{T}^i(h)X_i(0)$. L'examen de l'équation précédente montre donc que

$$\widetilde{T}^\alpha(h) = \mu^\alpha_\beta(h)T^\beta(h), \tag{1.11}$$

cette relation ayant un sens dans l'espace des champs de vecteurs sur S_0 dépendant de h (accessoirement, on a aussi $\widetilde{T}^3(h) = 0$). On a une relation similaire avec un champ de 1-formes $\boldsymbol{v}(h) = v_\alpha(h)\mathrm{d}y^\alpha(h)$:

$$\widetilde{v}_\alpha(h) = (\mu^{-1})^\beta_\alpha(h)v_\beta(h), \tag{1.12}$$

où les $\widetilde{v}_\alpha(h)$ sont les composantes du champ de 1-formes $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^3$ exprimé dans la base $\mathrm{d}y^\alpha(0)$. Les expressions tildées sont appelées les *projections euclidiennes* sur la surface S_0 des vecteurs et des 1-formes considérées.

Les équations (1.11) et (1.12) expliquent pourquoi le *shifter* intervient constamment en théorie des coques. L'idée classique est que c'est la bonne méthode pour ramener sur S_0 les équations posées sur S_h .

Tout d'abord, il faut remarquer qu'on ne peut pas faire l'économie du lemme 1.3, car sinon, les expressions (1.11) et (1.12) n'aurait pas de sens. Il faut en effet dire d'une manière ou d'une autre que les composantes $T^\beta(h)$ définissent un champ de vecteurs sur S_0 .

Ensuite, donnons une interprétation géométrique des équations (1.11) et (1.12). On conserve les notations de la sous-section précédente. On remarque tout d'abord que le lemme 1.3 est aussi vrai dans l'autre sens : l'image d'un champ de vecteurs $T^\alpha X_\alpha(0)$ de S_0 par l'application $F_h : S_0 \to S_h$ s'écrit dans une base locale $T^\alpha X_\alpha(h)$. Ceci est vrai car les applications de changements de cartes sont les mêmes sur S_0 et sur S_h . Le *shifter* définit donc aussi un champ de tenseurs sur la surface S_h . Soit toujours (U, φ) une carte locale sur S . On définit une nouvelle carte locale sur Ω^ε telle que en tout point $\Phi^\varepsilon(P, h)$ de Ω^ε , la base locale associée soit la base formée des vecteurs $X_i(0)$ (alors que pour le système de coordonnées normales associé, la base locale est $X_i(h)$). Ceci est toujours possible pour ε assez petit. Autour d'un point Q de S_h , on a donc deux cartes : une carte du type $(F_h(U), \varphi \circ F_h^{-1})$ associée à la base locale $X_\alpha(h)$ et une autre carte du type (V_h, ψ) associée à la base locale $X_\alpha(0)$, où V_h est un ouvert de S_h contenant Q et ψ une application de V_h dans $\mathbb{R}^2$. L'équation (1.9) montre alors la première partie de la proposition suivante, la deuxième partie étant une conséquence immédiate de la démonstration du lemme 1.3 :

Proposition 1.9
(i) *La matrice* $\mu^\beta_\alpha(h)$ *est la matrice jacobienne du changement de coordonnées de la*

carte $(F_h(U), \varphi \circ F_h^{-1})$ *vers la carte* (V_h, ψ) *autour d'un même point de la surface* S_h *.*

(ii) *La matrice* $\mu_\alpha^\beta(h)$ *est la matrice jacobienne de l'application* $F_h : S_0 \to S_h$ *dans les système de coordonnées issus des cartes* (U, φ) *sur* S_0 *et* (V_h, ψ) *sur* S_h *.*

Ainsi, le *shifter* apparaît essentiellement comme un changement de carte locale sur S_h. Un corollaire à la proposition précédente est que $(\mu^{-1})_\alpha^\beta(h)$ est la matrice jacobienne de l'application $\pi_0 : S_h \to S_0$ dans les cartes (V_h, ψ) sur S_h et (U, φ) sur S_0.

Quel est alors l'intérêt d'introduire le *shifter*? Tout d'abord, on va voir que toutes les expressions le font intervenir (voir la formule (2.1) ci-dessous) car la métrique $a_{\alpha\beta}(h)$ et la seconde forme fondamentale $b_{\alpha\beta}(h)$ s'expriment facilement en fonction du *shifter*. Celui-ci étant analytique en h, ceci permet de développer en séries entières les tenseurs fondamentaux sur la coque. De plus, certaines équations faisant intervenir un champ de vecteurs $T^\alpha(h) X_\alpha(h)$ se simplifient lorsqu'on les écrit en fonction de $\widetilde{T}^\beta(h) = T^\alpha(h)\mu_\alpha^\beta(h)$ plutôt qu'en fonction de $T^\alpha(h)$ (ce qui, dans les deux cas, définit un champ de vecteurs sur S_0). En revanche, un inconvénient de ramener les équations sur S_0 en utilisant le *shifter*, c'est qu'on perd la signification de certains tenseurs. Ainsi, l'équation (1.6) s'écrit encore

$$a_{\alpha\beta}(h) = \mu_\alpha^\sigma(h)\mu_\beta^\delta(h) a_{\sigma\delta}(0),$$

ce qui signifie d'après la proposition précédente que l'image par le difféomorphisme π_0 du tenseur métrique $a_{\alpha\beta}(h)$ sur S_h est bien le tenseur métrique $a_{\alpha\beta}(0)$ sur S_0. En dérivant en h l'équation (1.6) et en utilisant le fait que $\partial_3^\varepsilon a_{\alpha\beta}(h) = -2b_{\alpha\beta}(h)$, on voit en revanche que

$$b_{\alpha\beta}(h) = \mu_\alpha^\sigma(h) b_{\sigma\beta}(0).$$

Ceci montre que l'image de la deuxième forme fondamentale sur S_h par l'application $\pi_0\big|_{S_h}$ n'est pas égale au tenseur $b_{\alpha\beta}(0)$, c'est-à-dire à la deuxième forme fondamentale sur S_0. Si c'était le cas, les deux surfaces S_h et S_0 seraient d'ailleurs les mêmes, à une isométrie de $\mathbb{R}^3$ près (voir le théorème 3.9 du chapitre I).

1.3 Déplacement shifté

Les équations tridimensionnelles de l'élasticité permettent de définir un opérateur agissant sur un champ de 1-formes $\boldsymbol{u}$. Grâce au corollaire 1.5, l'étude de cet opérateur se ramène à l'étude d'un opérateur agissant sur $\mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon, \varepsilon), \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$. Les sous-sections précédentes montrent qu'on peut associer à $\boldsymbol{u}$ un élément de cet espace de différentes manières suivant l'utilisation de la projection intrinsèque ou de la projection euclidienne de $\boldsymbol{u}$.

Il se trouve que les calculs qui suivent pour le développement de l'opérateur 3D sont plus simples si on considère la projection euclidienne du champ de 1-formes $\boldsymbol{u}$. Pour cette raison, on fait la définition suivante :

Définition 1.10 Soit un déplacement $\boldsymbol{u} \in \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon),\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ de composantes $u_\alpha(h)$ et $u_3(h)$ dans la base $\mathrm{d}y^\alpha(0)$ et $\mathrm{d}y^3(0)$. Le *déplacement shifté* $\boldsymbol{w} \in \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon),\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ de composantes $w_\alpha(h)$ et $w_3(h)$ est défini par la formule

$$\begin{cases} w_\alpha(h) = (\mu^{-1})^\beta_\alpha(h)u_\beta(h), \\ w_3(h) = u_3(h). \end{cases} \tag{1.13}$$

■

Si on définit l'opérateur

$$\boldsymbol{\mu}(h) : \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon),\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon),\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$$

par l'équation

$$\boldsymbol{\mu}(h)\big(\boldsymbol{w}(h)\big) = \begin{cases} w_\alpha(h) - hb^\beta_\alpha(h)w_\beta(h), \\ w_3(h), \end{cases} \tag{1.14}$$

alors le déplacement *shifté* associé à $\boldsymbol{u}(h)$ est $\boldsymbol{w}(h) = \boldsymbol{\mu}^{-1}(h)\big(\boldsymbol{u}(h)\big)$.

La proposition 1.9 montre que le déplacement shifté $\boldsymbol{w}$ définit le même objet géométrique sur la coque Ω^ε que le déplacement $\boldsymbol{u}$. Considérer le déplacement shifté revient à faire un changement de carte locale sur Ω^ε avant d'utiliser la projection intrinsèque et le lemme 1.5. L'équation 1.10 écrite pour un champ de 1-formes montre donc que *en tant que champ de 1-formes de* $\mathbb{R}^3$, on a l'égalité suivante :

$$\boldsymbol{u}(h) = u_\alpha(h)\mathrm{d}y^\alpha(h) + u_3(h)\mathrm{d}y^3(h) = w_\alpha(h)\mathrm{d}y^\alpha(0) + w_3(h)\mathrm{d}y^3(0),$$

après l'identification de $\mathrm{d}y^\alpha(h)$ avec un élément de T^1S_0 grâce à la translation euclidienne. Le fait que $\mathrm{d}y^3(h) = \mathrm{d}y^3(0)$, c'est-à-dire que la normale à S_0 soit la même que la normale à S_h, montre que les composantes w_3 et u_3 sont les mêmes.

On considère désormais les équations de l'élasticité pour le déplacement shifté. Le retour aux composantes $u_i(h)$ se fait simplement par composition avec l'opérateur $\boldsymbol{\mu}(h)$.

Remarque 1.11 La définition précédente est donnée pour un champ de 1-formes de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur la coque. On peut montrer que l'espace $\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)^3$ est bien défini sur la coque comme l'espace des déplacements $\boldsymbol{u}$ dont les composantes sont de classes

H^1 dans un système de coordonnées locales. L'ouvert Ω^ε étant une variété de classe $\mathscr{C}^\infty$, les changements de cartes sont $\mathscr{C}^\infty$ et cette définition est donc indépendante du système de coordonnées locales choisies. Le corollaire 1.5 est alors encore valable pour les champs de 1-formes de cette régularité, et la définition précédente a encore un sens pour un déplacement $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)^3$. ■

Dans le but de simplifier les écritures, on fait la notation suivante :

Notation 1.12 On note

$$a_{\alpha\beta} := a_{\alpha\beta}(0) \quad \text{et} \quad b_{\alpha\beta} := b_{\alpha\beta}(0) \tag{1.15}$$

la première et la seconde forme fondamentale sur la surface moyenne S_0. La troisième forme fondamentale sur S_0 se note de même simplement $c_{\alpha\beta}$. Enfin, on note

$$\mathrm{D} := \mathrm{D}^0 \tag{1.16}$$

la dérivée covariante sur la surface S_0. ■

La notation pour D^0 est cohérente avec l'équation (1.15) et le fait que la dérivée covariante sur la surface S_0 ne dépend que de la première forme fondamentale $a_{\alpha\beta}(0)$. De même, on note d'après la définition 1.7

$$(b^k)^\alpha_\beta := (b^k)^\alpha_\beta(0),$$

et ainsi le *shifter* et son inverse s'écrivent

$$\mu^\beta_\alpha(h) = \delta^\beta_\alpha - h b^\beta_\alpha \quad \text{et} \quad (\mu^{-1})^\beta_\alpha(h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^k (b^k)^\beta_\alpha. \tag{1.17}$$

2 Développements en séries entières

Dans cette section, on donne un théorème d'existence de développement en série entière pour les équations tridimensionnelles. Il s'agit ici de séries entières en ε. Pour obtenir ce résultat, on développe tout d'abord en séries entières en h les champs de tenseurs fondamentaux qui interviennent dans l'opérateur tridimensionnel. On utilise ici le fait que le *shifter* est développable en série entière en h. Ensuite, on fait un changement d'échelle pour ramener l'étude d'opérateurs sur Ω^ε à l'étude d'opérateurs sur la variété $S \times (-1, 1)$ indépendante de ε. On voit alors facilement que les séries entières en h sont aussi des séries entières en ε, et que la notion de développement en ε d'opérateurs tridimensionnels sur $S \times (-1, 1)$ est cohérente. Dans la suite, c'est cette dernière échelle en puissance de ε qui est importante. Les coefficients du développement en séries entières de l'opérateur 3D font intervenir des *opérateurs* 2D agissant sur la surface S_0, et dont la définition est donnée dans la sous-section 2.4.

2.1 Formes fondamentales

Avec la définition 1.6, la métrique $a_{\alpha\beta}(h)$ s'écrit encore d'après l'équation (1.6) et la notation 1.12

$$a_{\alpha\beta}(h) = \mu_\alpha^\gamma(h)\mu_\beta^\lambda(h)a_{\gamma\lambda}. \tag{2.1}$$

Cette égalité est valable dans $\mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon),\Gamma(T_2S_0)\big)$. Le tenseur $\mu_{\alpha\beta}(h)$ étant inversible, on en déduit

$$a^{\alpha\beta}(h) = (\mu^{-1})_\sigma^\alpha(h)(\mu^{-1})_\delta^\beta(h)a^{\sigma\delta},$$

où $a^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}(0)$ en accord avec la notation 1.12. Le tenseur métrique sur S_h ainsi que son inverse admettent donc des développements en séries entières. De plus, on calcule facilement en faisant le produit des séries entières que

$$\begin{aligned} a^{\alpha\beta}(h) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} h^n(b^n)_\sigma^\alpha\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} h^n(b^n)_\gamma^\beta\Big)a^{\sigma\gamma} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h^n\Big(\sum_{k=0}^{n}(b^k)_\sigma^\alpha a^{\sigma\gamma}(b^{n-k})_\gamma^\beta\Big) \end{aligned}$$

et on obtient finalement

$$a^{\alpha\beta}(h) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)h^n(b^n)^{\alpha\beta}, \tag{2.2}$$

où $(b^n)^{\alpha\beta} = (b^n)_\sigma^\alpha a^{\sigma\beta}$. Une autre manière d'obtenir ce développement est d'itérer les équations (3.8) et (3.13) du chapitre I, et de montrer ainsi par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a

$$(\partial_3^\varepsilon)^n a^{\alpha\beta}(h) = (n+1)!\,(b^n)^{\alpha\beta}(h),$$

ce qui donne le développement de Taylor de $a^{\alpha\beta}(h)$ (et la convergence de cette série est claire, voir la remarque 2.1 ci-dessous). D'autre part, l'équation $\partial_3^\varepsilon a_{\alpha\beta}(h) = -2b_{\alpha\beta}(h)$ montre, en utilisant (1.6), que l'on a

$$b_{\alpha\beta}(h) = b_{\alpha\beta} - hc_{\alpha\beta} \tag{2.3}$$

$$= \mu_\alpha^\gamma(h)b_{\gamma\beta}. \tag{2.4}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} b_\beta^\alpha(h) &= a^{\alpha\gamma}(h)b_{\gamma\beta}(h) \\ &= (\mu^{-1})_\delta^\alpha(h)(\mu^{-1})_\nu^\gamma(h)a^{\delta\nu}\mu_\gamma^\lambda(h)b_{\lambda\beta} \qquad (2.5) \\ &= (\mu^{-1})_\delta^\alpha(h)b_\beta^\delta, \end{aligned}$$

d'où la formule

$$b^\alpha_\beta(h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^n (b^{n+1})^\alpha_\beta. \tag{2.6}$$

Comme précédemment, on peut obtenir directement à partir des équations du chapitre I la relation $(\partial^\varepsilon_3)^n b^\alpha_\beta(h) = n!\,(b^{n+1})^{\alpha\beta}(h)$.

Remarque 2.1 En utilisant le fait que le champ de tenseurs $b^\beta_\alpha = b^\beta_\alpha(0)$ est borné, car la surface S_0 est compacte, on obtient des estimations sur les dérivées successives qui montre la convergence normale des séries de Taylor des tenseurs $a^{\alpha\beta}(h)$ et $b^\beta_\alpha(h)$. Cette même remarque est valable pour les autres champs de tenseurs liés à la géométrie de S_0. ■

2.2 Développements des dérivées covariantes

Afin de calculer le développement d'une expression comportant une ou plusieurs dérivées covariantes, on a besoin de connaître le développement des symboles de Christoffel dans une carte. On a alors la

Proposition 2.2 *Dans un système de coordonnées normales fixé, on a l'égalité suivante :*

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(h) = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(0) + (\mu^{-1})^\gamma_\delta(h) \mathrm{D}_\alpha \mu^\delta_\beta(h). \tag{2.7}$$

Conformément à la notation (1.16), D désigne la dérivée covariante D^0 sur la surface S_0. Ce lemme montre que les symboles de Christoffel sont développables en séries entières en h, et on remarque que seul le premier terme de ce développement ne définit pas un champ de tenseurs sur la surface S_0, et n'est donc pas intrinsèque.

Preuve. Montrons tout d'abord que le développement de Taylor des symboles de Christoffel s'écrit :

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(h) = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(0) - \sum_{n\geq 1} h^n (b^{n-1})^\gamma_\delta \mathrm{D}_\alpha b^\delta_\beta. \tag{2.8}$$

Rappelons que dans un système de coordonnées

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(h) = \tfrac{1}{2} a^{\gamma\sigma}(h)(\partial_\alpha a_{\beta\sigma}(h) + \partial_\beta a_{\alpha\sigma}(h) - \partial_\sigma a_{\alpha\beta}(h)).$$

On dérive alors cette formule par rapport à h. Grâce aux formules du chapitre I donnant les dérivées des tenseurs $a^{\alpha\beta}(h)$ et $a_{\alpha\beta}(h)$, c'est-à-dire les équations $\partial^\varepsilon_3 a^{\alpha\beta}(h) = 2b^{\alpha\beta}(h)$ et $\partial^\varepsilon_3 a_{\alpha\beta}(h) = -2b_{\alpha\beta}(h)$, on trouve, en ne précisant plus la dépendance en h :

$$\partial^\varepsilon_3 \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = b^{\gamma\sigma}(\partial_\alpha a_{\beta\sigma} + \partial_\beta a_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma a_{\alpha\beta}) - a^{\gamma\sigma}(\partial_\alpha b_{\beta\sigma} + \partial_\beta b_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma b_{\alpha\beta}).$$

Le second membre de cette équation comprend deux termes. Le premier terme s'écrit encore

$$\begin{aligned} b^{\gamma\sigma}(\partial_\alpha a_{\beta\sigma} + \partial_\beta a_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma a_{\alpha\beta}) &= b^\gamma_\delta a^{\delta\sigma}(\partial_\alpha a_{\beta\sigma} + \partial_\beta a_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma a_{\alpha\beta}) \\ &= 2b^\gamma_\delta \Gamma^\delta_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

grâce à l'équation donnant l'expression des symboles de Christoffel par rapport à la métrique. Dans le deuxième terme, il apparaît des dérivées partielles du tenseur $b_{\alpha\beta}$. Afin de rendre l'expression intrinsèque, et au regard de l'équation (2.8), on va faire apparaître des dérivées covariantes de ce tenseur. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} a^{\gamma\sigma}(\partial_\alpha b_{\beta\sigma} + \partial_\beta b_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma b_{\alpha\beta}) &= a^{\gamma\sigma}(\mathrm{D}_\alpha b_{\beta\sigma} + \mathrm{D}_\beta b_{\alpha\sigma} - \mathrm{D}_\sigma b_{\alpha\beta}) \\ &\quad + a^{\gamma\sigma}(\Gamma^\delta_{\alpha\beta} b_{\delta\sigma} + \Gamma^\delta_{\alpha\sigma} b_{\beta\delta} + \Gamma^\delta_{\beta\alpha} b_{\delta\sigma} \\ &\quad + \Gamma^\delta_{\beta\sigma} b_{\alpha\delta} - \Gamma^\delta_{\sigma\alpha} b_{\delta\beta} - \Gamma^\delta_{\sigma\beta} b_{\alpha\delta}) \\ &= \mathrm{D}_\alpha b^\gamma_\beta + 2\Gamma^\delta_{\alpha\beta} b^\gamma_\delta, \end{aligned}$$

grâce à l'équation de Codazzi-Mainardi et au fait que les symboles de Christoffel sont symétriques ($\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}$) ainsi que la seconde forme fondamentale.

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \partial^\varepsilon_3 \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} &= 2b^\gamma_\delta \Gamma^\delta_{\alpha\beta} - (\mathrm{D}_\alpha b^\gamma_\beta + 2\Gamma^\delta_{\alpha\beta} b^\gamma_\delta) \\ &= -\mathrm{D}_\alpha b^\gamma_\beta. \end{aligned}$$

Donc on a pour tout h

$$\partial^\varepsilon_3 \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(h) = -\mathrm{D}^h_\alpha b^\gamma_\beta(h). \tag{2.9}$$

On dérive alors le tenseur $\mathrm{D}_\alpha b^\gamma_\beta$ par rapport à h . On trouve, en utilisant les équations (2.9) ci-dessus et (3.13) du chapitre I, et sans écrire la dépendance en h :

$$\begin{aligned} \partial^\varepsilon_3 \mathrm{D}_\alpha b^\gamma_\beta &= \partial^\varepsilon_3 \partial_\alpha b^\gamma_\beta - \partial^\varepsilon_3(\Gamma^\delta_{\alpha\beta} b^\gamma_\delta) + \partial^\varepsilon_3(\Gamma^\gamma_{\alpha\delta} b^\delta_\beta) \\ &= \partial_\alpha c^\gamma_\beta - \Gamma^\delta_{\alpha\beta} c^\gamma_\delta + \Gamma^\gamma_{\alpha\delta} c^\delta_\beta + b^\gamma_\delta \mathrm{D}_\alpha b^\delta_\beta - b^\delta_\beta \mathrm{D}_\alpha b^\gamma_\delta \\ &= \mathrm{D}_\alpha c^\gamma_\beta + b^\gamma_\delta \mathrm{D}_\alpha b^\delta_\beta - b^\delta_\beta \mathrm{D}_\alpha b^\gamma_\delta \\ &= b^\delta_\beta \mathrm{D}_\alpha b^\gamma_\delta + b^\gamma_\delta \mathrm{D}_\alpha b^\delta_\beta + b^\gamma_\delta \mathrm{D}_\alpha b^\delta_\beta - b^\delta_\beta \mathrm{D}_\alpha b^\gamma_\delta, \end{aligned}$$

et on trouve donc l'équation pour tout h :

$$\partial^\varepsilon_3 \mathrm{D}^h_\alpha b^\gamma_\beta(h) = 2b^\gamma_\delta(h) \mathrm{D}^h_\alpha b^\delta_\beta(h). \tag{2.10}$$

On montre par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a

$$(\partial^\varepsilon_3)^n \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(h) = -n!\,(b^{n-1})^\gamma_\delta(h) \mathrm{D}^h_\alpha b^\delta_\beta(h), \tag{2.11}$$

ce qui implique l'équation (2.8). D'après les calculs précédents, la formule (2.11) est vraie pour $n = 1$ et 2 . Supposons la vraie pour $n \geq 2$. On a alors, en ne précisant plus les dépendances en h :

$$(\partial_3^\varepsilon)^{n+1}\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \partial_3^\varepsilon\big(-n!\,(b^{n-1})_\delta^\gamma \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\delta\big)$$
$$= -n!\left[\partial_3^\varepsilon\big((b^{n-1})_\delta^\gamma\big)\mathrm{D}_\alpha b_\beta^\delta + (b^{n-1})_\delta^\gamma \partial_3^\varepsilon \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\delta\right].$$

Mais d'après la sous-section précédente, ou en itérant l'équation (3.13) du chapitre I, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\partial_3^\varepsilon (b^n)_\alpha^\beta(h) = n(b^{n+1})_\alpha^\beta(h).$$

On a donc, d'après l'équation (2.10) :

$$(\partial_3^\varepsilon)^{n+1}\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = -n!\left[(n-1)(b^n)_\delta^\gamma \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\delta + 2(b^{n-1})_\delta^\gamma b_\nu^\delta \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\nu\right]$$
$$= -(n+1)!\,(b^n)_\delta^\gamma \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\delta,$$

ce qui prouve le résultat au rang $n+1$ et achève donc la récurrence et prouve l'équation (2.8).

D'autre part, le deuxième terme du membre de gauche de l'équation (2.7) s'écrit, compte tenu de ce que $\mathrm{D}_\alpha \delta_\beta^\delta = 0$,

$$(\mu^{-1})_\delta^\gamma(h)\mathrm{D}_\alpha \mu_\beta^\delta(h) = -\Big(\sum_{k=0}^{\infty} h^k (b^k)_\delta^\gamma\Big) h\mathrm{D}_\alpha b_\beta^\delta$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty} h^{k+1}(b^k)_\delta^\gamma \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\delta$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty} h^k (b^{k-1})_\delta^\gamma \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\delta,$$

où les sommes des membres de gauche sont convergentes de manière évidente. Mais cette dernière expression est aussi la somme du développement de Taylor de la fonction $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(h)$ à partir de l'ordre 1, qui est donc convergente. On en déduit l'égalité (2.7) de la proposition, qui est une égalité dans l'algèbre des séries entières en h. ■

Cette proposition permet alors de montrer les équations suivantes :

Corollaire 2.3 *Soit* $u_\beta(h) \in \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon),\Gamma(T_1 S_0)\big)$. *On a alors l'égalité*

$$\mathrm{D}_\alpha^h u_\beta(h) = \mathrm{D}_\alpha u_\beta(h) - (\mu^{-1})_\delta^\sigma(h) u_\sigma(h) \mathrm{D}_\alpha \mu_\beta^\delta(h), \tag{2.12}$$

qui s'écrit encore

$$\mathrm{D}_\alpha^h u_\beta(h) = \mu_\beta^\delta(h)\mathrm{D}_\alpha(\mu^{-1})_\delta^\nu(h) u_\nu(h). \tag{2.13}$$

où D *est la dérivée covariante sur la surface* S_0 *et* $\mu_\beta^\delta(h)$ *le shifter.*

De même, si $T^\sigma_\beta(h)$ est un élément de $\mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon),\Gamma(T^1_1 S_0)$ on a l'égalité :

$$\mathrm{D}^h_\alpha T^\sigma_\beta(h) = \mathrm{D}_\alpha T^\sigma_\beta(h) - (\mu^{-1})^\nu_\delta(h) T^\sigma_\nu(h) \mathrm{D}_\alpha \mu^\delta_\beta(h) + (\mu^{-1})^\sigma_\delta(h) T^\nu_\beta(h) \mathrm{D}_\alpha \mu^\delta_\nu(h). \quad (2.14)$$

Preuve. On a par définition

$$\mathrm{D}^h_\alpha u_\beta(h) = \partial_\alpha u_\beta(h) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(h) u_\sigma(h),$$

et d'après la formule (2.7), on a

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^h_\alpha u_\beta(h) &= \partial_\alpha u_\beta(h) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(0) u_\sigma(h) - (\mu^{-1})^\sigma_\delta(h) u_\sigma(h) \mathrm{D}_\alpha \mu^\delta_\beta(h)\\ &= \mathrm{D}_\alpha u_\beta(h) - (\mu^{-1})^\sigma_\delta(h) u_\sigma(h) \mathrm{D}_\alpha \mu^\delta_\beta(h)\end{aligned}$$

ce qui montre l'équation (2.12). L'équation (2.13) résulte alors d'un simple calcul : on a successivement

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^h_\alpha u_\beta(h) &= \mathrm{D}_\alpha u_\beta(h) - (\mu^{-1})^\sigma_\delta(h) u_\sigma(h) \mathrm{D}_\alpha \mu^\delta_\beta(h)\\ &= \mathrm{D}_\alpha u_\beta(h) - \mathrm{D}_\alpha \mu^\delta_\beta(h) (\mu^{-1})^\sigma_\delta(h) u_\sigma(h) + \mu^\delta_\beta(h) \mathrm{D}_\alpha (\mu^{-1})^\sigma_\delta(h) u_\sigma(h),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

De même, on a dans un système de coordonnées

$$\mathrm{D}^h_\alpha T^\sigma_\beta(h) = \partial_\alpha T^\sigma_\beta(h) - \Gamma^\nu_{\alpha\beta}(h) T^\sigma_\nu(h) + \Gamma^\sigma_{\alpha\nu}(h) T^\nu_\beta(h),$$

et l'équation (2.7) montre le résultat (2.14). ■

Le fait que les symboles de Christoffel soient développables en séries entières montre le résultat suivant :

Corollaire 2.4 *Soit $T^{\underline{\sigma}}_{\underline{\alpha}}(h) \in \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon),\Gamma(T^q_p S_0)\big)$ un champ de tenseurs sur S_0 dépendant de h, et de type (p,q). Si ce champ de tenseurs est développable en série entière en h à coefficients dans $\Gamma(T^q_p S_0)$, alors le champ de tenseurs $\mathrm{D}^h_\beta T^{\underline{\sigma}}_{\underline{\alpha}}(h)$ est développable en série entière à coefficients tensoriels sur S_0.*

Preuve. Dans l'expression $\mathrm{D}^h_\beta T^{\underline{\sigma}}_{\underline{\alpha}}(h)$ écrite en coordonnées locales apparaissent des symboles de Christoffel et une dérivée partielle. Les premiers termes des développements (2.7) permettent de reconstituer la dérivée covariante $\mathrm{D} = \mathrm{D}^0$ et les autres sont à coefficients tensoriels sur S_0. Ceci montre que dans le développement en série entière en carte locale de $\mathrm{D}^h_\beta T^{\underline{\sigma}}_{\underline{\alpha}}(h)$, tous les termes sont des composantes de champs de tenseurs. ■

2.3 Changement d'échelle

Les équations précédentes font intervenir des développements en séries entières en h. Ceci est adapté à l'étude d'objets ne dépendant que de h et ayant une existence sur les surfaces S_h. L'opérateur d'élasticité 3D comporte des dérivées ∂_3^ε qui ont une existence globale sur la coque. La notion de développement en série entière en h à coefficients tensoriels ne s'applique donc pas pour cet opérateur. C'est la raison pour laquelle on fait un changement d'échelle pour se ramener à un domaine indépendant de ε, ce qui conduit ensuite à considérer des développements en séries entières en ε et non plus en h. On pose donc

$$x_3 = \frac{h}{\varepsilon}. \tag{2.15}$$

Ce changement d'échelle, ou *scaling*, n'est pas considéré ici comme un changement de variable lié à un changement de carte afin de conserver les significations géométriques et physiques des objets utilisés. Cela signifie qu'on garde les notations utilisées précédemment pour les tenseurs définis sur S_0 et sur les surfaces S_h. En fait, dans la mesure où on développe tout en ε, ceci n'a pas d'importance : les seuls objets importants dans le résultat final sont les tenseurs surfaciques, qui ne sont pas affectés par ce changement de coordonnées.

Si $\{y^\alpha\}$ désigne un système de coordonnées sur la surface S_0 on note aussi $y^\alpha = x_\alpha$ de sorte qu'à un système de coordonnées normales $\{y^\alpha, h\}$ sur un ouvert de Ω^ε correspond après le changement d'échelle un système de coordonnées $\{x_\alpha, x_3\}$ sur $S \times (-1, 1)$. On pose alors

$$\Omega = S \times (-1, 1),$$

variété sur laquelle (x_α, x_3) est un système de coordonnées toujours appelé système de coordonnées normales. Remarquons que la position de l'indice, en bas pour le système $\{x_\alpha\}$ et en haut pour le système $\{y^\alpha\}$, n'a pas d'importance car les objets indicés ne sont pas des tenseurs. Cette notation est employée par souci de cohérence avec les notations traditionnelles, et aussi parce que le résultat final fait intervenir des polynômes en x_3, et l'écriture x_3^2 est plus pratique que $(x^3)^2$. On note

$$\Gamma_+ := S \times \{+1\} \quad \text{et} \quad \Gamma_- := S \times \{-1\}$$

les faces supérieures et inférieures correspondant à $S_{+\varepsilon}$ et $S_{-\varepsilon}$. De même on note $\Gamma_0 := \partial S \times (-1, 1)$ le bord latéral correspondant à Γ_0^ε.

Enfin, on note ∂_3 la dérivée partielle par rapport à x_3. Cette dérivée a une existence globale sur la variété Ω, et on a la relation

$$\partial_3^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\partial_3. \tag{2.16}$$

Cette équation est une égalité entre deux objets définis sur deux variétés différentes Ω^ε et Ω. Elle est néanmoins cohérente, car ces deux variétés sont difféomorphes, et l'égalité dit que ∂_3^ε et $\varepsilon^{-1}\partial_3$ définissent le même objet à travers le difféomorphisme lié au changement d'échelle.

Dans la suite, on note
$$I := (-1, 1).$$
Afin de distinguer les objets sur Ω^ε de ceux sur Ω, on emploie la notation suivante :

Notation 2.5 Soit $\boldsymbol{T}(h)$ un élément de $\mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon),\Gamma(T_p^qS_0)\big)$. Après le changement d'échelle $h = \varepsilon x_3$ ce champ de tenseurs définit un élément noté $\boldsymbol{T}[\varepsilon]$ de $\mathscr{C}^\infty\big(I,\Gamma(T_p^qS_0)\big)$ et dépendant de ε. ■

Si le champ de tenseurs $\boldsymbol{T}(h)$ est développable en série entière en h, il est alors clair que $\boldsymbol{T}[\varepsilon]$ est développable en série entière en ε à coefficients dans $\mathscr{C}^\infty\big(I,\Gamma(T_p^qS_0)\big)$ et ces coefficients sont même polynomiaux en x_3. Pour h fixé et un système de coordonnées normales choisi, le champ de tenseurs $\boldsymbol{T}(h)$ dépend de x_α, tandis que dans ce même système de coordonnées, $\boldsymbol{T}[\varepsilon]$ dépend des trois coordonnées (x_α, x_3) pour ε fixé. A partir du chapitre III, la notation $\boldsymbol{T}[\varepsilon]$ sera employée systématiquement pour désigner la série formelle associée au développement en série entière du tenseur $\boldsymbol{T}[\varepsilon]$.

Par exemple, le champ de tenseurs $\mu_\beta^\alpha(h)$ est développable en série entière en h tout comme son inverse, et la notation précédente montre que $\mu_\beta^\alpha[\varepsilon]$ et $(\mu^{-1})_\beta^\alpha[\varepsilon]$ sont développables en séries entières en ε, avec les formules
$$\mu_\beta^\alpha[\varepsilon] = \delta_\beta^\alpha - \varepsilon x_3 b_\beta^\alpha \quad \text{et} \quad (\mu^{-1})_\beta^\alpha[\varepsilon] = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_3^k (b^k)_\beta^\alpha$$
en utilisant la notation 1.12. De même, l'opérateur $\boldsymbol{\mu}(h)$ défini par l'équation (1.14) permet de définir un opérateur
$$\boldsymbol{\mu}[\varepsilon] : \mathscr{C}^\infty\big(I,\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big(I,\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big).$$
Si en particulier $\boldsymbol{w} \in \mathscr{C}^\infty\big(I,\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$, alors l'équation
$$\boldsymbol{u}[\varepsilon] := \boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \begin{cases} w_\alpha - \varepsilon x_3 b_\alpha^\beta w_\beta \\ w_3, \end{cases} \tag{2.17}$$
montre en particulier que $\boldsymbol{u}[\varepsilon]$ ainsi défini est développable en série entière en ε.

2.4 Opérateurs 2D

Dans la suite, on va développer les opérateurs de l'élasticité en fonction de h. Les coefficients de ces développements sont alors des opérateurs définis sur la surface moyenne S_0 et qui sont intrinsèques. La définition suivante permet de donner un cadre rigoureux à l'étude de ces opérateurs.

Définition 2.6 Un *opérateur* 2D est un opérateur différentiel L agissant sur l'espace des couples $\Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$ et à valeurs dans un espace de champs de tenseurs sur S_0, de la forme

$$L(\boldsymbol{z}) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*,\, (I,J) \in \mathcal{C}} c_J^I \big(B_*^{[k,I,J]} \otimes (\mathrm{D}^{(k-1)} z_\alpha) \big) + \sum_{k \in \mathbb{N},\, (I,J) \in \mathcal{C}} c_J^I \big(B_3^{[k,I,J]} \otimes (\mathrm{D}^{(k)} z_3) \big), \tag{2.18}$$

où les sommes sont effectuées sur des ensembles finis, avec

- $\mathrm{D}^{(k)}$ la dérivée covariante sur S_0 effectuée k-fois (avec $\mathrm{D}^{(0)} = \mathrm{Id}$), donc $(\mathrm{D}^{(k-1)} z_\alpha)$ et $(\mathrm{D}^{(k)} z_3)$ appartiennent à $\Gamma(T_k S_0)$.
- $B_*^{[k,I,J]}, B_3^{[k,I,J]}$ des champs de tenseurs sur S_0 qui sont des combinaisons linéaires de produits de tenseurs $\boldsymbol{b}$ et de tenseurs du type $\mathrm{D}^{(i)} \boldsymbol{b}$ où $\boldsymbol{b}$ est la seconde forme fondamentale de la surface S_0.
- $\mathcal{C}$ l'ensemble des couples (I, J) de sous-ensembles ordonnés de $\mathbb{N}^*$, tels que $\# I = \# J$.
- c_J^I l'opérateur de contraction défini comme composé de la suite de contractions surfaciques sur les indices dont les positions dans le tenseur sont définies par I et J.

■

Remarquons que le fait que L soit à valeurs dans un espace de champs de tenseurs implique que les termes des sommes soient tous des tenseurs du même type et du même sous-type. Les opérateurs $\rho_{\alpha\beta}(0)$, $\gamma_{\alpha\beta}(0)$, $\theta_\alpha(0)$ et $\omega_{\alpha\beta}(0)$ sont des opérateurs 2D au sens précédent. En accord avec la notation 1.12, on note désormais ces opérateurs de la façon suivante :

Notation 2.7 Dans la suite, les opérateurs

$$\rho_{\alpha\beta} := \rho_{\alpha\beta}(0), \quad \gamma_{\alpha\beta} := \gamma_{\alpha\beta}(0), \quad \theta_\alpha := \theta_\alpha(0), \quad \omega_{\alpha\beta} := \omega_{\alpha\beta}(0), \tag{2.19}$$

désignent donc des opérateurs 2D au sens de la définition précédente. ■

Un opérateur 2D est défini comme un opérateur agissant sur $\Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$. Il agit aussi naturellement sur l'espace

$$\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big).$$

Si $\boldsymbol{w}$ est un élément de cet espace, et si L est un opérateur 2D à valeurs dans un espace du type $\Gamma(T_p^q S_0)$, alors $L(\boldsymbol{w}) \in \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_p^q S_0)\big)$.

D'autre part, la dérivée partielle ∂_3 possède une existence globale sur la variété $\Omega = S \times I$ et donc après réduction normale des champs de 1-formes, sur l'espace

$\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$. Par définition, il est clair que cette dérivée partielle commute alors avec les opérateurs 2D agissant sur $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$. On a donc par exemple $\partial_3 \circ \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} \circ \partial_3$.

Dans la suite, on va développer en série entière l'opérateur 3D, et les coefficients de ce développement sont des polynômes en x_3 à coefficients opérateurs 2D composés avec des dérivées partielles ∂_3 , qui agissent alors sur des éléments $\boldsymbol{w} \in \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$.

2.5 Développement en séries entières de l'opérateur

Le théorème 4.1 du chapitre I donne l'expression de l'opérateur d'élasticité 3D en coordonnées normales agissant sur le déplacement $\boldsymbol{u}$, ce qui induit un opérateur agissant sur le déplacement *shifté* $\boldsymbol{w}$. Le corollaire 1.5 montre alors que l'opérateur à l'intérieur défini par les équations (4.19) et (4.20) du chapitre I permet de définir un opérateur

$$\boldsymbol{L} : \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$$

par l'équation

$$\begin{cases} L_\alpha(\boldsymbol{w}) = 2\mu\partial_3^\varepsilon\gamma_{\alpha3}(h) \circ \boldsymbol{\mu}(h)(\boldsymbol{w}) + \lambda\partial_3^\varepsilon(\mathrm{D}_\alpha^h w_3) - 2\mu b_\beta^\beta(h)\gamma_{\alpha3}(h) \circ \boldsymbol{\mu}(h)(\boldsymbol{w}) \\ \qquad\qquad + \lambda\mathrm{D}_\alpha^h\gamma_\nu^\nu(h) \circ \boldsymbol{\mu}(h)(\boldsymbol{w}) + 2\mu\mathrm{D}_\beta^h\gamma_\alpha^\beta(h) \circ \boldsymbol{\mu}(h)(\boldsymbol{w}), \\ L_3(\boldsymbol{w}) = (\lambda+2\mu)\partial_{33}^\varepsilon w_3 + (\lambda+\mu)\partial_3^\varepsilon\gamma_\alpha^\alpha(h) \circ \boldsymbol{\mu}(h)(\boldsymbol{w}) - \mu b_\alpha^\alpha(h)\partial_3^\varepsilon w_3 \\ \qquad\qquad + \mu\rho_\alpha^\alpha(h) \circ \boldsymbol{\mu}(h)(\boldsymbol{w}). \end{cases} \tag{2.20}$$

De même, les équations sur les surfaces supérieures et inférieures de la coques permettent de définir un opérateur

$$\boldsymbol{B} : \mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \Gamma(T_1S_{\pm\varepsilon}) \times \mathscr{C}^\infty(S_{\pm\varepsilon})$$

par les équations

$$\begin{cases} B_\alpha(\boldsymbol{w}) = 2\mu\gamma_{\alpha3}(h) \circ \boldsymbol{\mu}(h)(\boldsymbol{w})\big|_{S_{\pm\varepsilon}}, \\ B_3(\boldsymbol{w}) = (\lambda+2\mu)\partial_3^\varepsilon w_3 + \lambda\gamma_\alpha^\alpha(h) \circ \boldsymbol{\mu}(h)(\boldsymbol{w})\big|_{S_{\pm\varepsilon}}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Dans ces équations, l'opérateur $\boldsymbol{\mu}(h)$ est l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ défini par l'équation (1.14).

Le changement d'échelle permet de définir un nouvel opérateur à partir de l'opérateur d'élasticité 3D. Rappelons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que la coque géométrique Ω^ε soit définie pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ (voir la sous-section 1.1 du chapitre I). On peut de plus supposer que ε_0 est assez petit pour que le shifter, et donc l'opérateur $\boldsymbol{\mu}[\varepsilon]$, soit inversible pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Définition 2.8 Pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ fixé, on appelle *opérateur d'élasticité* 3D *sur la variété* Ω l'opérateur $\big(\boldsymbol{L}(\varepsilon), \boldsymbol{B}(\varepsilon)\big)$ avec

$$\boldsymbol{L}(\varepsilon) : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$$

et

$$\boldsymbol{B}(\varepsilon) : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \Gamma(T_1\Gamma_\pm) \times \mathscr{C}^\infty(\Gamma_\pm\big)$$

les opérateurs obtenus à partir des opérateurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{B}$ en effectuant le changement d'échelle (2.15). On a donc dans tout système de coordonnées normales

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}(\varepsilon)(x_\alpha, x_3; \mathrm{D}_\alpha, \partial_3) = \boldsymbol{L}(x_\alpha, \varepsilon x_3; \mathrm{D}_\alpha, \varepsilon^{-1}\partial_3) \quad \text{et} \\ \boldsymbol{B}(\varepsilon)(x_\alpha, x_3; \mathrm{D}_\alpha, \partial_3) = \boldsymbol{B}(x_\alpha, \varepsilon x_3; \mathrm{D}_\alpha, \varepsilon^{-1}\partial_3). \end{cases} \tag{2.22}$$

■

Il est clair que les formules (2.22) définissent bien des opérateurs intrinsèques sur la variété Ω car le changement d'échelle n'affecte pas les objets sur la surface S_0. Avec cette définition, on montre le théorème suivant :

Théorème 2.9 *Les opérateurs $\boldsymbol{L}(\varepsilon)$ et $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$ sont développables en séries entières en ε. Ainsi, il existe pour tout $k \geq 0$ des opérateurs*

$$\boldsymbol{L}^k : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$$

et

$$\boldsymbol{B}^k : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \Gamma(T_1\Gamma_\pm) \times \mathscr{C}^\infty(\Gamma_\pm\big)$$

tels que

$$\boldsymbol{L}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \boldsymbol{L}^k \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{B}(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \boldsymbol{B}^k. \tag{2.23}$$

De plus, on a $\boldsymbol{L}^0 = \boldsymbol{\ell} \circ \partial_{33}$ et $\boldsymbol{B}^0 = \boldsymbol{\ell} \circ \partial_3$ où $\boldsymbol{\ell}$ est défini par

$$\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{w}) = \big(\mu w_\alpha, (\lambda + 2\mu) w_3\big).$$

Enfin, pour tout $k \geq 1$, il existe des opérateurs $\boldsymbol{L}^{k,j}$ pour $j = 0, 1, 2$ et $\boldsymbol{B}^{k,j}$ pour $j = 0, 1$, polynômes en x_3 à coefficients opérateurs 2D *tels que pour tout $\boldsymbol{w} \in \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$,*

$$\boldsymbol{L}^k(\boldsymbol{w}) = \sum_{j=0}^{2} \boldsymbol{L}^{k,j}(\partial_3^{2-j}\boldsymbol{w}) \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{B}^k(\boldsymbol{w}) = \sum_{j=0}^{1} \boldsymbol{B}^{k,j}(\partial_3^{1-j}\boldsymbol{w}).$$

Preuve. Les opérateurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{B}$ ne font intervenir que des dérivées partielles d'ordres un et deux en $y^3 = h$, et les coefficients de ces dérivées partielles sont des opérateurs intrinsèques sur S_0 ne dépendant que de la première et la seconde forme fondamentale $a_{\alpha\beta}(h)$ et $b_{\alpha\beta}(h)$ sur S_h , et comportant des dérivées covariantes D^h .

Les équations (2.1), (2.2) et (2.3) montrent que les champs de tenseurs $a_{\alpha\beta}(h)$, $b_{\alpha\beta}(h)$ et $a^{\alpha\beta}(h)$, sont développables en séries entières en h , et ces développements ne comportent que des puissances positives de h .

En utilisant le corollaire 2.4, on voit que les opérateurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{B}$ sont développables en séries entières en h , et les coefficients de ces développements sont des compositions d'opérateurs 2D et de dérivées ∂_3^ε d'ordres au plus 2 .

Le changement d'échelle et les relations (2.22) montrent que les opérateurs $\boldsymbol{L}(\varepsilon)$ et $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$ sont développables en séries entières en ε . Les propriétés des opérateurs $\boldsymbol{L}^k$ et $\boldsymbol{B}^k$ se vérifient alors aisément. ■

La suite de ce chapitre consiste à donner des expressions exactes des opérateurs $\boldsymbol{L}^k$ et $\boldsymbol{B}^k$ pour tout $k \geq 0$.

3 Développements des tenseurs principaux

Dans cette section, on commence le calcul des coefficients du développement de l'opérateur 3D. Pour cela, on introduit tout d'abord de nouveaux opérateurs 2D qui vont intervenir dans les développements, ainsi que certaines de leurs propriétés. Ensuite, on fixe $\boldsymbol{w} \in \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$, et on développe le tenseur des déformations tridimensionnel associé à $\boldsymbol{w}$ en fonction de ε .

3.1 Quelques opérateurs 2D

Avant de commencer les développements proprement dits, on récapitule ici diverses propriétés et définitions d'opérateurs 2D qui seront utiles dans la suite. Rappelons, en utilisant la notation 2.7, que le tourbillon plan est défini par la formule

$$\omega_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha u_\beta - \mathrm{D}_\beta u_\alpha) \tag{3.1}$$

pour $\boldsymbol{u} \in \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$. Dans la suite, $\boldsymbol{u}$ désigne toujours un élément de cet espace.

On introduit alors les opérateurs 2D suivants : tout d'abord

$$\mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta} := \tfrac{1}{2}(b_\alpha^\gamma \omega_{\beta\gamma} + b_\beta^\gamma \omega_{\alpha\gamma}), \tag{3.2}$$

partie symétrique du tenseur $b^\gamma_\alpha \omega_{\beta\gamma}$. De même la partie symétrique du tenseur $b^\sigma_\alpha \gamma_{\beta\sigma}$ se note

$$\mathrm{Sb}(\gamma)_{\alpha\beta} := \tfrac{1}{2}(b^\sigma_\alpha \gamma_{\beta\sigma} + b^\sigma_\beta \gamma_{\alpha\sigma}), \tag{3.3}$$

et la partie antisymétrique

$$\mathrm{Ab}(\gamma)_{\alpha\beta} := \tfrac{1}{2}(b^\sigma_\alpha \gamma_{\beta\sigma} - b^\sigma_\beta \gamma_{\alpha\sigma}). \tag{3.4}$$

L'intérêt des tenseurs précédents provient des calculs qui suivent. Rappelons que le tourbillon transverse est défini par la formule :

$$\theta_\alpha(\boldsymbol{u}) = \mathrm{D}_\alpha u_3 + b^\sigma_\alpha u_\sigma. \tag{3.5}$$

On pose alors

$$\boxed{\kappa_{\alpha\beta} := \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha \theta_\beta + \mathrm{D}_\beta \theta_\alpha).} \tag{3.6}$$

L'expression explicite de ce tenseur en fonction de $\boldsymbol{u}$ est

$$\kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\beta u_3 + \mathrm{D}_\beta \mathrm{D}_\alpha u_3) + \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha b^\sigma_\beta u_\sigma + \mathrm{D}_\beta b^\sigma_\alpha u_\sigma). \tag{3.7}$$

Le résultat suivant relie les deux tenseurs κ et ρ.

Proposition 3.1 *L'égalité d'opérateurs* 2D *suivante est vraie :*

$$\rho_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} + \mathrm{Sb}(\gamma)_{\alpha\beta} + \mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta}. \tag{3.8}$$

Preuve. D'après l'équation (4.10) du chapitre I, on a

$$\rho_{\alpha\beta} = \mathrm{D}_\alpha \theta_\beta + b^\nu_\alpha \gamma_{\beta\nu} + b^\nu_\alpha \omega_{\beta\nu}.$$

Le membre de droite de l'expression (3.8) est simplement la partie symétrique du membre de droite de l'équation précédente. Le fait que le tenseur $\rho_{\alpha\beta}$ est symétrique suffit donc à montrer la proposition. Cela résulte de la définition même de l'opérateur ρ comme tenseur de changement de courbure, mais on peut le vérifier directement par calcul, ce qui est fait dans la suite de cette preuve.

On veut donc montrer que pour toute 1-forme $\boldsymbol{u}$,

$$\mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\beta u_3 - c_{\alpha\beta} u_3 + \mathrm{D}_\alpha b^\sigma_\beta u_\sigma + b^\sigma_\alpha \mathrm{D}_\beta u_\sigma = \mathrm{D}_\beta \mathrm{D}_\alpha u_3 - c_{\beta\alpha} u_3 + \mathrm{D}_\beta b^\sigma_\alpha u_\sigma + b^\sigma_\beta \mathrm{D}_\alpha u_\sigma.$$

Les tenseurs $\mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\beta u_3$ et $c_{\alpha\beta}$ sont symétriques de manière évidente. D'autre part, un calcul utilisant les règles de manipulation des dérivées covariantes de tenseurs montre que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}_\beta b^\sigma_\alpha u_\sigma + b^\sigma_\beta \mathrm{D}_\alpha u_\sigma \\
&= b^\sigma_\alpha \mathrm{D}_\beta u_\sigma + (\mathrm{D}_\alpha b^\sigma_\beta) u_\sigma + b^\sigma_\beta \mathrm{D}_\alpha u_\sigma \\
&= \mathrm{D}_\alpha b^\sigma_\beta u_\sigma + b^\sigma_\alpha \mathrm{D}_\beta u_\sigma,
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'équation de Codazzi-Mainardi $\mathrm{D}_\alpha b^\sigma_\beta = \mathrm{D}_\beta b^\sigma_\alpha$. Ceci termine la preuve. ■

Le tenseur $\kappa_{\alpha\beta}$ est souvent considéré en mécanique comme une approximation du tenseur de changement de courbure $\rho_{\alpha\beta}$. On l'utilise ici en raison de sa dépendance simple en θ_α , et de son rôle dans les équations tridimensionnelles.

On définit enfin un dernier opérateur 2D :

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) := \tfrac{1}{2}(b^\sigma_\alpha \mathrm{D}_\sigma u_\beta - b^\sigma_\beta \mathrm{D}_\alpha u_\sigma). \tag{3.9}$$

Proposition 3.2 *On a l'égalité suivante entre opérateurs* 2D *:*

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \mathrm{Ab}(\gamma)_{\alpha\beta} - \mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta}. \tag{3.10}$$

Preuve. Si on fait agir le membre de droite de l'équation (3.10) sur une 1-forme $\boldsymbol{u}$, on trouve

$$\begin{aligned}\big[\,\mathrm{Ab}(\gamma)_{\alpha\beta} - \mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta}\big](\boldsymbol{u}) &= \tfrac{1}{2}[b^\sigma_\alpha\gamma_{\beta\sigma} - b^\sigma_\beta\gamma_{\alpha\sigma} - b^\sigma_\alpha\omega_{\beta\sigma} - b^\sigma_\beta\omega_{\alpha\sigma}]\\ &= \tfrac{1}{4}[b^\sigma_\alpha\mathrm{D}_\beta u_\sigma + b^\sigma_\alpha\mathrm{D}_\sigma u_\beta - b^\sigma_\beta\mathrm{D}_\alpha u_\sigma - b^\sigma_\beta\mathrm{D}_\sigma u_\alpha + c_{\alpha\beta}u_3\\ &\qquad - c_{\beta\alpha}u_3 - b^\sigma_\alpha\mathrm{D}_\beta u_\sigma + b^\sigma_\alpha\mathrm{D}_\sigma u_\beta - b^\sigma_\beta\mathrm{D}_\alpha u_\sigma + b^\sigma_\beta\mathrm{D}_\sigma u_\alpha]\\ &= \tfrac{1}{2}[b^\sigma_\alpha\mathrm{D}_\sigma u_\beta - b^\sigma_\beta\mathrm{D}_\alpha u_\sigma]\\ &= \Lambda_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}),\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Voici quelques propriétés des opérateurs que nous venons de définir :

Proposition 3.3 *Pour tout* $\ell \in \mathbb{N}$ *, on a*

$$(b^\ell)^\alpha_\beta\,\mathrm{Sb}(\omega)^\beta_\alpha = 0 \tag{3.11a}$$

$$(b^\ell)^\alpha_\beta\Lambda^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = 0 \tag{3.11b}$$

$$(b^\ell)^\alpha_\beta\,\mathrm{Sb}(\gamma)^\beta_\alpha = (b^{\ell+1})^\alpha_\beta\gamma^\beta_\alpha. \tag{3.11c}$$

Preuve. On calcule

$$\begin{aligned}(b^\ell)^\alpha_\beta\,\mathrm{Sb}(\omega)^\beta_\alpha &= \tfrac{1}{2}(b^\ell)^\alpha_\beta(b^{\beta\gamma}\omega_{\alpha\gamma} + b^\gamma_\alpha\omega^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma})\\ &= \tfrac{1}{2}[(b^{\ell+1})^{\alpha\gamma}\omega_{\alpha\gamma} + (b^{\ell+1})^{\beta\gamma}\omega_{\beta\gamma}].\end{aligned} \tag{3.12}$$

Le tenseur $b^{\alpha\beta}$ est symétrique. Il en est donc de même du tenseur $(b^\ell)^{\alpha\beta}$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. D'autre part, le tenseur ω est antisymétrique. On en déduit que

$$(b^{\ell+1})^{\alpha\gamma}\omega_{\alpha\gamma} = -(b^{\ell+1})^{\alpha\gamma}\omega_{\gamma\alpha} = -(b^{\ell+1})^{\gamma\alpha}\omega_{\gamma\alpha}.$$

Le dernier terme de l'équation (3.12) est donc nul, ce qui prouve (3.11a).

L'équation (3.11b) est évidente d'après (3.10), en utilisant (3.11a) et le fait que $\mathrm{Ab}(\gamma)_{\alpha\beta}$ est antisymétrique, avec le même type de manipulation que ci-dessus.

Enfin, on a

$$\begin{aligned}(b^\ell)^\alpha_\beta\, \mathrm{Sb}(\gamma)^\beta_\alpha &= \tfrac{1}{2}(b^\ell)^\alpha_\beta[b^{\beta\sigma}\gamma_{\sigma\alpha} + b^\sigma_\alpha\gamma^\beta_\sigma]\\ &= (b^{\ell+1})^\alpha_\beta\gamma^\beta_\alpha,\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la proposition. ∎

Les opérateurs $\mathrm{Sb}(\omega)\,,\mathrm{Sb}(\gamma)\,,\mathrm{Ab}(\gamma)$ et Λ interviennent dans la suite lors du développement des équations tridimensionnelles. On se sert notamment des deux formes (3.9) et (3.10) de l'opérateur Λ selon la situation.

3.2 Tenseur des déformations surfaciques

Le tenseur des déformations surfaciques $\gamma_{\alpha\beta}(h)$ induit un opérateur noté $\gamma_{\alpha\beta}[\varepsilon]$ agissant sur l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(I,\Gamma(T_1S_0\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$. Dans l'expression de l'opérateur $\boldsymbol{L}(\varepsilon)$ et $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$, ce tenseur est composé avec l'opérateur $\boldsymbol{\mu}[\varepsilon]$.

Définition 3.4 Dans la suite, on note

$$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}[\varepsilon] := \gamma_{\alpha\beta}[\varepsilon]\circ\boldsymbol{\mu}[\varepsilon]$$

ce qui définit un opérateur qui agit sur $\mathscr{C}^\infty\big(I,\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ et à valeurs dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(I,\Gamma(T_2S_0)\big)$. ∎

Le terme $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}[\varepsilon](\boldsymbol{w})$ est donc le tenseur des déformations surfaciques après changement d'échelle, associé au déplacement *shifté* $\boldsymbol{w}$.

Dans toute la suite $\boldsymbol{w}\in\mathscr{C}^\infty\big(I,\Gamma(T_1S_0\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ ne dépend pas de ε. Le but de cette sous-section est de déterminer le développement en série entière du terme $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}[\varepsilon](\boldsymbol{w})$.

Dans la suite, on note $\mathrm{D}[\varepsilon]$ la dérivée covariante D^h après changement d'échelle. L'équation (2.13) après changement d'échelle montre qu'on a

$$\mathrm{D}_\alpha[\varepsilon]\mu^\sigma_\beta[\varepsilon]w_\sigma = \mu^\delta_\beta[\varepsilon]\mathrm{D}_\alpha(\mu^{-1})^\nu_\delta[\varepsilon]\mu^\sigma_\nu[\varepsilon]w_\sigma = \mu^\delta_\beta[\varepsilon]\mathrm{D}_\alpha w_\delta. \tag{3.13}$$

Compte tenu de l'expression de la deuxième forme fondamentale, on a d'autre part

$$b_{\alpha\beta}[\varepsilon]w_3 = b_{\alpha\beta}w_3 - \varepsilon x_3 c_{\alpha\beta}w_3.$$

Mais par définition, compte tenu de l'expression de $\boldsymbol{\mu}[\varepsilon]$, on a

$$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{D}_\alpha[\varepsilon]\mu^\sigma_\beta[\varepsilon]w_\sigma + \mathrm{D}_\beta[\varepsilon]\mu^\sigma_\alpha[\varepsilon]w_\sigma\big) - b_{\alpha\beta}[\varepsilon]w_3,$$

on a donc, en utilisant l'équation (3.13) et la notation 2.7

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) &= \tfrac{1}{2}\big(\mu^\delta_\beta[\varepsilon]\mathrm{D}_\alpha w_\delta + \mu^\delta_\alpha[\varepsilon]\mathrm{D}_\beta w_\delta\big) - b_{\alpha\beta}w_3 + \varepsilon x_3 c_{\alpha\beta}w_3 \\ &= \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{w}) + \varepsilon x_3\left[c_{\alpha\beta}w_3 - \tfrac{1}{2}b^\sigma_\alpha\mathrm{D}_\beta w_\sigma - \tfrac{1}{2}b^\sigma_\beta\mathrm{D}_\alpha w_\sigma\right].\end{aligned} \tag{3.14}$$

Pour calculer le terme entre crochets dans l'équation précédente, remarquons que d'après l'équation (3.8),

$$\mathrm{Sb}(\gamma)_{\alpha\beta} + \mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} - \kappa_{\alpha\beta}.$$

En utilisant l'expression symétrisée de $\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{w})$

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{w}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\beta w_3 + \mathrm{D}_\beta\mathrm{D}_\alpha w_3) - c_{\alpha\beta}w_3 \\ + \tfrac{1}{2}(b^\sigma_\alpha\mathrm{D}_\beta w_\sigma + b^\sigma_\beta\mathrm{D}_\alpha w_\sigma) + \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha b^\sigma_\beta w_\sigma + \mathrm{D}_\beta b^\sigma_\alpha w_\sigma),\end{aligned}$$

et grâce à l'équation (3.7), on trouve finalement

$$\mathrm{Sb}(\gamma)_{\alpha\beta}(\boldsymbol{w}) + \mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta}(\boldsymbol{w}) = -c_{\alpha\beta}w_3 + \tfrac{1}{2}b^\sigma_\alpha\mathrm{D}_\beta w_\sigma + \tfrac{1}{2}b^\sigma_\beta\mathrm{D}_\alpha w_\sigma.$$

On en déduit l'expression suivante :

$$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{w}) - \varepsilon x_3\big[\,\mathrm{Sb}(\gamma)_{\alpha\beta}(\boldsymbol{w}) + \mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta}(\boldsymbol{w})\big]. \tag{3.15}$$

Dans les expressions (3.14) et (3.15), les dépendances en ε sont complètement explicites, et les coefficients des développements sont des opérateurs 2D.

D'autre part, il est nécessaire de calculer l'expression du champ de tenseurs

$$\tilde{\gamma}^\alpha_\beta[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = a^{\alpha\sigma}[\varepsilon]\tilde{\gamma}_{\sigma\beta}[\varepsilon](\boldsymbol{w}).$$

En faisant alors le produit de Cauchy des deux séries entières convergentes, et en utilisant les équations (2.2) et (3.15), on trouve

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}^\alpha_\beta[\varepsilon](\boldsymbol{w}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{k=0}^{n}\big(g^{\alpha\sigma}[\varepsilon]\big)^k\big(\tilde{\gamma}_{\sigma\beta}[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{k=0}^{n}(k+1)x_3^k(b^k)^{\alpha\sigma}\big(\tilde{\gamma}_{\sigma\beta}[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^{n-k},\end{aligned}$$

où les notations $\big(g^{\alpha\sigma}[\varepsilon]\big)^n$ et $\big(\tilde{\gamma}_{\sigma\beta}[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^n$ sont employées pour désigner les coefficients de ε^n dans les développements de $a^{\alpha\beta}[\varepsilon]$ et $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}[\varepsilon](\boldsymbol{w})$ (ces développements ne contiennent que des termes en puissances positives de ε). Notant alors de même $\left(\tilde{\gamma}_\beta^\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w})\right)^n$ le coefficient de ε^n dans le développement de $\tilde{\gamma}_\beta^\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w})$, on déduit de l'expression (3.15) les équations suivantes, avec $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\left(\tilde{\gamma}_\beta^\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w})\right)^0 = \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{w}), \\
&\left(\tilde{\gamma}_\beta^\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w})\right)^n = (n+1)x_3^n(b^n)_\sigma^\alpha\gamma_\beta^\sigma(\boldsymbol{w}) - nx_3^n(b^{n-1})_\sigma^\alpha\left(\mathrm{Sb}(\gamma)_\beta^\sigma + \mathrm{Sb}(\omega)_\beta^\sigma\right)(\boldsymbol{w}).
\end{aligned}$$

Mais pour $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}
(n+1)&(b^n)_\sigma^\alpha\gamma_\beta^\sigma(\boldsymbol{w}) - n(b^{n-1})_\sigma^\alpha\,\mathrm{Sb}(\gamma)_\beta^\sigma(\boldsymbol{w}) \\
&= (n+1)(b^n)_\sigma^\alpha\gamma_\beta^\sigma(\boldsymbol{w}) - \tfrac{1}{2}n(b^n)_\sigma^\alpha\gamma_\beta^\sigma(\boldsymbol{w}) - \tfrac{1}{2}n(b^{n-1})_\sigma^\alpha b_\beta^\nu\gamma_\nu^\sigma(\boldsymbol{w}) \\
&= (b^n)_\sigma^\alpha\gamma_\beta^\sigma(\boldsymbol{w}) + n(b^{n-1})_\sigma^\alpha\left(\tfrac{1}{2}b_\delta^\sigma\gamma_\beta^\delta(\boldsymbol{w}) - \tfrac{1}{2}b_\beta^\delta\gamma_\delta^\sigma(\boldsymbol{w})\right) \\
&= (b^n)_\sigma^\alpha\gamma_\beta^\sigma(\boldsymbol{w}) + n(b^{n-1})_\sigma^\alpha\,\mathrm{Ab}(\gamma)_{\cdot\beta}^{\sigma\cdot}(\boldsymbol{w}).
\end{aligned}$$

Puisqu'on a $\Lambda_{\alpha\beta} = \mathrm{Ab}(\gamma)_{\alpha\beta} - \mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta}$, on en déduit, avec la convention $(b^k)_\alpha^\beta = 0$ pour $k < 0$, l'équation pour tout $n \geq 0$

$$\left(\tilde{\gamma}_\beta^\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w})\right)^n = x_3^n(b^n)_\delta^\alpha\gamma_\beta^\delta(\boldsymbol{w}) + n\,x_3^n(b^{n-1})_\delta^\alpha\Lambda_{\cdot\beta}^{\delta\cdot}(\boldsymbol{w}). \tag{3.16}$$

Cette équation donne le développement suivant :

$$\tilde{\gamma}_\beta^\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{w}) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n x_3^n(b^n)_\delta^\alpha\gamma_\beta^\delta(\boldsymbol{w}) + \sum_{n=1}^{\infty}n\varepsilon^n x_3^n(b^{n-1})_\delta^\alpha\Lambda_{\cdot\beta}^{\delta\cdot}(\boldsymbol{w}). \tag{3.17}$$

D'après la propriété (3.11b) de l'opérateur Λ , la formule suivante est alors valable :

$$\tilde{\gamma}_\alpha^\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n x_3^n(b^n)_\beta^\alpha\gamma_\alpha^\beta(\boldsymbol{w}). \tag{3.18}$$

3.3 Tenseur des déformations transverses

Rappelons que le tourbillon transverse sur la coque après changement d'échelle s'écrit

$$\theta_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \mathrm{D}_\sigma[\varepsilon]w_3 + b_\sigma^\beta[\varepsilon]w_\beta,$$

pour $\boldsymbol{w} \in \mathscr{C}^\infty(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$. Supposons toujours $\boldsymbol{w}$ indépendant de ε . En utilisant l'équation (2.5) après changement d'échelle, on trouve alors

$$\begin{aligned}
\theta_\sigma[\varepsilon] \circ \boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) &= \mathrm{D}_\sigma w_3[\varepsilon] + (\mu^{-1})_\alpha^\beta[\varepsilon]b_\sigma^\alpha\mu_\beta^\delta[\varepsilon]w_\delta \\
&= \mathrm{D}_\sigma w_3 + b_\sigma^\alpha w_\alpha,
\end{aligned}$$

d'où l'équation très simple

$$\theta_\sigma[\varepsilon] \circ \boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \theta_\sigma(\boldsymbol{w}). \tag{3.19}$$

L'introduction du déplacement *shifté* simplifie ici les calculs de manière évidente.

Définition 3.5 La *contrainte normale de cisaillement* associée au déplacement *shifté* $\boldsymbol{w} \in \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ est définie par l'équation

$$N_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = 2\gamma_{\sigma 3}[\varepsilon] \circ \boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}). \tag{3.20}$$

■

Pour $\boldsymbol{u} \in \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ on a par définition après changement d'échelle

$$\begin{aligned} 2\gamma_{\sigma 3}[\varepsilon](\boldsymbol{u}) &= \varepsilon^{-1}\partial_3 u_\sigma + \mathrm{D}_\sigma[\varepsilon] u_3 + 2b_\sigma^\alpha[\varepsilon] u_\alpha \\ &= \varepsilon^{-1}\partial_3 u_\sigma + b_\sigma^\alpha[\varepsilon] u_\alpha + \theta_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

d'où l'équation

$$N_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \varepsilon^{-1}\partial_3\big(\mu_\sigma^\alpha[\varepsilon] w_\alpha\big) + (\mu^{-1})_\alpha^\beta[\varepsilon] b_\sigma^\alpha \mu_\beta^\delta[\varepsilon] w_\delta + \theta_\sigma(\boldsymbol{w}),$$

en utilisant le résultat précédent. On trouve donc

$$\begin{aligned} N_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w}) &= \varepsilon^{-1}\mu_\sigma^\alpha[\varepsilon]\partial_3 w_\alpha + \varepsilon^{-1} w_\alpha \partial_3\big(\mu_\sigma^\alpha[\varepsilon]\big) + b_\sigma^\alpha w_\alpha + \theta_\sigma(\boldsymbol{w}) \\ &= \varepsilon^{-1}\partial_3 w_\sigma - x_3 b_\sigma^\alpha \partial_3 w_\alpha - w_\alpha b_\sigma^\alpha + b_\sigma^\alpha w_\alpha + \theta_\sigma(\boldsymbol{w}), \end{aligned}$$

d'où l'équation

$$N_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \varepsilon^{-1}\partial_3 w_\sigma - x_3 b_\sigma^\alpha \partial_3 w_\alpha + \theta_\sigma(\boldsymbol{w}). \tag{3.21}$$

Remarquons que ce développement commence par un terme en ε^{-1}.

Calculons maintenant le développement en série entière en ε du champ de tenseurs $\mathrm{D}_\alpha[\varepsilon]\theta_\beta[\varepsilon] \circ \boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w})$.

Pour cela, on utilise la formule (3.13) appliquée à $\theta_\sigma[\varepsilon] \circ \boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w})$. Posons comme intermédiaire de calcul

$$\tilde{\theta}_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w}) := (\mu^{-1})_\sigma^\alpha[\varepsilon]\theta_\alpha[\varepsilon] \circ \boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}).$$

Les équations précédentes montre que le coefficients de ε^n dans le développement de ce champ de tenseurs s'écrit

$$\big(\tilde{\theta}_\beta[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^n = x_3^n (b^n)_\beta^\alpha \theta_\alpha(\boldsymbol{w}). \tag{3.22}$$

Or d'après la formule (3.13), on a

$$\mathrm{D}_\alpha[\varepsilon]\theta_\beta[\varepsilon] \circ \boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \mathrm{D}_\alpha \tilde{\theta}_\beta[\varepsilon](\boldsymbol{w}) - \varepsilon x_3 b_\beta^\delta \mathrm{D}_\alpha \tilde{\theta}_\delta[\varepsilon](\boldsymbol{w}). \tag{3.23}$$

En utilisant l'équation (3.22), on trouve finalement que

$$\mathrm{D}_\alpha[\varepsilon]\theta_\beta[\varepsilon] \circ \boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \mathrm{D}_\alpha\theta_\beta(\boldsymbol{w}) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n x_3^n \left[\mathrm{D}_\alpha (b^n)_\beta^\gamma \theta_\gamma(\boldsymbol{w}) - b_\beta^\delta \mathrm{D}_\alpha (b^{n-1})_\delta^\gamma \theta_\gamma(\boldsymbol{w})\right]. \tag{3.24}$$

4 Développements des équations

Dans cette section, on donne l'expression des développements en série entière en ε des opérateurs $\boldsymbol{L}(\varepsilon)$ et $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$. La dernière partie de cette section conclut le développement des équations en donnant les hypothèses sur le second membre des équations de l'élasticité.

4.1 Réécriture

L'équation (3.8) et les propriétés (3.11a) et (3.11c) montrent que, en tant qu'opérateurs 2D, on a l'égalité suivante :

$$\rho_\alpha^\alpha = \kappa_\alpha^\alpha + \mathrm{Sb}(\gamma)_\alpha^\alpha = \mathrm{D}^\alpha\theta_\alpha + b_\beta^\alpha\gamma_\alpha^\beta.$$

Cette relation est également vraie pour les opérateurs associés sur la coque, c'est-à-dire qu'on a la relation suivante :

$$\rho_\alpha^\alpha[\varepsilon] = \mathrm{D}^\alpha[\varepsilon]\theta_\alpha[\varepsilon] + b_\beta^\alpha[\varepsilon]\gamma_\alpha^\beta[\varepsilon].$$

Soit alors $\boldsymbol{w} \in \mathscr{C}^\infty\big(I, T_1S_0 \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ indépendant de ε. En remarquant que $\mathrm{D}_\sigma[\varepsilon]w_3 = \mathrm{D}_\sigma w_3 = \partial_\sigma w_3$ dans un système de coordonnées, et de même

$$\mathrm{D}_\sigma[\varepsilon]\tilde{\gamma}_\nu^\nu[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \mathrm{D}_\sigma\tilde{\gamma}_\nu^\nu[\varepsilon](\boldsymbol{w}),$$

l'équation précédente ainsi que les définitions 3.4 et 3.5 montrent qu'on a

$$\begin{cases} L_\sigma(\varepsilon)(\boldsymbol{w}) = \varepsilon^{-1}\mu\partial_3 N_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w}) + \varepsilon^{-1}\lambda\partial_3(\mathrm{D}_\sigma w_3) - \mu b_\beta^\beta[\varepsilon]N_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w}) \\ \qquad\qquad + \lambda\mathrm{D}_\sigma\tilde{\gamma}_\nu^\nu[\varepsilon](\boldsymbol{w}) + 2\mu\mathrm{D}_\beta[\varepsilon]\tilde{\gamma}_\sigma^\beta[\varepsilon](\boldsymbol{w}), \\ L_3(\varepsilon)(\boldsymbol{w}) = \varepsilon^{-2}(\lambda+2\mu)\partial_{33}w_3 + \varepsilon^{-1}(\lambda+\mu)\partial_3\tilde{\gamma}_\alpha^\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w}) - \varepsilon^{-1}\mu b_\alpha^\alpha[\varepsilon]\partial_3 w_3 \\ \qquad\qquad + \mu\mathrm{D}^\alpha[\varepsilon]\theta_\alpha[\varepsilon]\circ\boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) + \mu b_\beta^\alpha[\varepsilon]\tilde{\gamma}_\alpha^\beta[\varepsilon](\boldsymbol{w}), \end{cases} \tag{4.1}$$

et

$$\begin{cases} B_\sigma(\varepsilon)(\boldsymbol{w}) = \mu N_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big|_{\Gamma_\pm}, \\ B_3(\varepsilon)(\boldsymbol{w}) = \varepsilon^{-1}(\lambda+2\mu)\partial_3 w_3 + \lambda\tilde{\gamma}_\alpha^\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big|_{\Gamma_\pm}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Les identités de la section précédente permettent de développer ces équations.

4.2 Développement des équations transverses

Commençons par développer les opérateurs $L_3(\varepsilon)(\boldsymbol{w})$ et $B_3(\varepsilon)(\boldsymbol{w})$ pour $\boldsymbol{w}$ un élément de l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(I,\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ indépendant de ε.

On a tout d'abord

$$b^\alpha_\alpha[\varepsilon]\partial_3 w_3 = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n x_3^n (b^{n+1})^\alpha_\alpha \partial_3 w_3. \tag{4.3}$$

De même, en utilisant l'équation (3.18) et le fait que ∂_3 commute avec les opérateurs 2D, on trouve en particulier que

$$\partial_3\tilde{\gamma}^\alpha_\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n (b^n)^\alpha_\beta \gamma^\beta_\alpha\big(\partial_3(x_3^n\boldsymbol{w})\big). \tag{4.4}$$

Enfin, on a pour tout $n \geq 0$

$$\big(b^\alpha_\beta[\varepsilon]\tilde{\gamma}^\beta_\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^n = \sum_{k=0}^{n} x_3^k (b^{k+1})^\alpha_\beta \big(\tilde{\gamma}^\beta_\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^{n-k}.$$

Si on remplace dans cette équation les termes $\big(\tilde{\gamma}^\beta_\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^{n-k}$ par leurs expressions (3.16), on s'aperçoit que les termes faisant intervenir l'opérateur $\Lambda_{\alpha\beta}$ vont s'annuler en vertu de la propriété (3.11b). On en déduit que

$$\begin{aligned}
\big(b^\alpha_\beta[\varepsilon]\tilde{\gamma}^\beta_\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^n &= \sum_{k=0}^{n} x_3^k (b^{k+1})^\alpha_\beta x_3^{n-k}(b^{n-k})^\beta_\delta \gamma^\delta_\alpha(\boldsymbol{w}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} x_3^n (b^{n+1})^\alpha_\delta \gamma^\delta_\alpha(\boldsymbol{w}) \\
&= (n+1)x_3^n (b^{n+1})^\alpha_\delta \gamma^\delta_\alpha(\boldsymbol{w}).
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$b^\alpha_\beta[\varepsilon]\gamma^\beta_\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\varepsilon^n x_3^n (b^{n+1})^\alpha_\beta \gamma^\beta_\alpha(\boldsymbol{w}). \tag{4.5}$$

Pour développer l'équation transverse à l'intérieur de Ω, il reste à trouver le développement de

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^\alpha[\varepsilon]\theta_\alpha[\varepsilon]\circ\boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) &= g^{\alpha\beta}[\varepsilon]\mathrm{D}_\alpha[\varepsilon]\theta_\beta[\varepsilon]\circ\boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) \\
&= (\mu^{-1})^\alpha_\gamma[\varepsilon](\mu^{-1})^\beta_\delta[\varepsilon]a^{\gamma\delta}\mathrm{D}_\alpha[\varepsilon]\theta_\beta[\varepsilon]\circ\boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}).
\end{aligned}$$

L'équation (3.23) s'écrit encore

$$\mathrm{D}_\alpha[\varepsilon]\theta_\beta[\varepsilon]\circ\boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \mu^\sigma_\beta[\varepsilon]\mathrm{D}_\alpha\tilde{\theta}_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w}),$$

et on trouve donc

$$\mathrm{D}^\alpha[\varepsilon]\theta_\alpha[\varepsilon]\circ\boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = (\mu^{-1})^\alpha_\gamma[\varepsilon]a^{\gamma\delta}\mathrm{D}_\alpha\tilde{\theta}_\delta[\varepsilon](\boldsymbol{w}).$$

En développant alors les termes de cette expression, on trouve que

$$\big(\mathrm{D}^\alpha[\varepsilon]\theta_\alpha[\varepsilon]\circ\boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^n = \sum_{k=0}^{n} x_3^k(b^k)^\alpha_\gamma a^{\gamma\delta}\mathrm{D}_\alpha\big(\tilde{\theta}_\delta[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^{n-k},$$

et en utilisant l'équation (3.22) on trouve

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{D}^\alpha[\varepsilon]\theta_\alpha[\varepsilon]\circ\boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^n &= \sum_{k=0}^{n} x_3^k(b^k)^\alpha_\gamma a^{\gamma\delta}\mathrm{D}_\alpha x_3^{n-k}(b^{n-k})^\beta_\delta\theta_\beta(\boldsymbol{w})\\ &= \sum_{k=0}^{n} x_3^n(b^k)^\alpha_\gamma a^{\gamma\delta}\mathrm{D}_\alpha(b^{n-k})^\beta_\delta\theta_\beta(\boldsymbol{w}),\end{aligned}$$

d'où la formule

$$\mathrm{D}^\alpha[\varepsilon]\theta_\alpha[\varepsilon]\circ\boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{\ell=0}^{n}(b^\ell)^\delta_\alpha\mathrm{D}^\alpha(b^{n-\ell})^\beta_\delta\theta_\beta(x_3^n\boldsymbol{w}). \tag{4.6}$$

Notons qu'on peut trouver cette formule par une autre méthode en utilisant directement l'équation (3.24).

En utilisant alors les équations (4.3), (4.4), (4.5), et (4.6), le développement complet du terme $L_3(\varepsilon)(\boldsymbol{w})$ s'écrit :

$$\begin{aligned}L_3(\varepsilon)(\boldsymbol{w}) = \varepsilon^{-2}(\lambda+2\mu)\partial_{33}w_3 - \varepsilon^{-1}\mu\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n x_3^n(b^{n+1})^\alpha_\alpha\partial_3 w_3\\ + \varepsilon^{-1}(\lambda+\mu)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n(b^n)^\alpha_\beta\gamma^\beta_\alpha\big(\partial_3(x_3^n\boldsymbol{w})\big) + \mu\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n(n+1)(b^{n+1})^\alpha_\beta\gamma^\beta_\alpha(x_3^n\boldsymbol{w})\\ + \mu\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{\ell=0}^{n}(b^\ell)^\delta_\alpha\mathrm{D}^\alpha(b^{n-\ell})^\beta_\delta\theta_\beta(x_3^n\boldsymbol{w}).\end{aligned} \tag{4.7}$$

De même, l'opérateur $B_3(\varepsilon)$ s'écrit

$$B_3(\varepsilon)(\boldsymbol{w}) = \varepsilon^{-1}(\lambda+2\mu)\partial_3 w_3\big|_{\Gamma_\pm} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n(b^n)^\alpha_\beta\gamma^\beta_\alpha(x_3^n\boldsymbol{w})\big|_{\Gamma_\pm}. \tag{4.8}$$

4.3 Développement des équations surfaciques

La seule quantité présentant une difficulté dans le développement de l'opérateur surfacique à l'intérieur (voir l'équation (4.1)) est l'expression $\mathrm{D}_\beta[\varepsilon]\tilde{\gamma}^\beta_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})$. D'après le corollaire 2.3 après changement d'échelle, ce terme s'écrit encore

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_\alpha[\varepsilon]\tilde{\gamma}^\alpha_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w}) &= \mathrm{D}_\alpha\tilde{\gamma}^\alpha_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w}) - (\mu^{-1})^\delta_\nu[\varepsilon]\tilde{\gamma}^\alpha_\delta[\varepsilon](\boldsymbol{w})\mathrm{D}_\alpha\mu^\nu_\sigma[\varepsilon] \\ &\quad + (\mu^{-1})^\alpha_\nu[\varepsilon]\tilde{\gamma}^\delta_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\mathrm{D}_\alpha\mu^\nu_\delta[\varepsilon] \\ &= \mathrm{D}_\alpha\tilde{\gamma}^\alpha_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w}) + \varepsilon x_3(\mu^{-1})^\delta_\nu[\varepsilon]\tilde{\gamma}^\alpha_\delta[\varepsilon](\boldsymbol{w})\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma \\ &\quad - \varepsilon x_3(\mu^{-1})^\alpha_\nu[\varepsilon]\tilde{\gamma}^\delta_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\delta.\end{aligned}$$

En identifiant les puissances de ε , on trouve alors que pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{D}_\alpha[\varepsilon]\tilde{\gamma}^\alpha_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^n &= \mathrm{D}_\alpha\big(\tilde{\gamma}^\alpha_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^n + \sum_{k=0}^{n-1} x_3^{k+1}(b^k)^\delta_\nu\big(\tilde{\gamma}^\alpha_\delta[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^{n-k-1}\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} x_3^{k+1}(b^k)^\alpha_\nu\big(\tilde{\gamma}^\delta_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^{n-k-1}\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\delta \\ &= \mathrm{D}_\alpha\big(\tilde{\gamma}^\alpha_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^n + \sum_{k=1}^{n} x_3^{k}(b^{k-1})^\delta_\nu\big(\tilde{\gamma}^\alpha_\delta[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^{n-k}\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n} x_3^{k}(b^{k-1})^\alpha_\nu\big(\tilde{\gamma}^\delta_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^{n-k}\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\delta.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Cette équation permet de trouver l'expression de l'opérateur $L_\alpha[\varepsilon](\boldsymbol{w})$.

D'après l'équation (3.21), le développement du terme $N_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})$ ne comporte que deux termes $N^0_\sigma(\boldsymbol{w}) = \partial_3 w_\sigma$ et $N^1_\sigma(\boldsymbol{w}) = \theta_\sigma(\boldsymbol{w}) - x_3 b^\alpha_\sigma\partial_3 w_\alpha$. On a donc en tant que série formelle opérateur

$$N_\sigma[\varepsilon] = \varepsilon^{-1}N^0_\sigma + N^1_\sigma.$$

D'après les équations (4.1) on trouve donc

$$
\begin{aligned}
L_\sigma(\varepsilon)(\boldsymbol{w}) &= \varepsilon^{-2}\mu\partial_{33}w_\sigma + \varepsilon^{-1}\big(\mu\partial_3 N^1_\sigma(\boldsymbol{w}) + \lambda\partial_3\mathrm{D}_\sigma w_3 - \mu b^\beta_\beta\partial_3 w_\sigma\big)\\
&\quad - \mu x_3 c^\beta_\beta\partial_3 w_\sigma - \mu b^\beta_\beta N^1_\sigma(\boldsymbol{w}) + \lambda\mathrm{D}_\sigma\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{w}) + 2\mu\mathrm{D}_\alpha\gamma^\alpha_\sigma(\boldsymbol{w})\\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\big[-\mu x_3^{n+1}(b^{n+2})^\alpha_\alpha\partial_3 w_\sigma - \mu x_3^n(b^{n+1})^\alpha_\alpha N^1_\sigma(\boldsymbol{w})\big]\\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\Big[2\mu\mathrm{D}_\alpha\big(\tilde\gamma^\alpha_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^n + 2\mu\sum_{k=1}^{n}x_3^k(b^{k-1})^\delta_\nu\big(\tilde\gamma^\alpha_\delta[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^{n-k}\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma\\
&\qquad - 2\mu\sum_{k=1}^{n}x_3^k(b^{k-1})^\alpha_\nu\big(\tilde\gamma^\delta_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^{n-k}\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\delta + \lambda\mathrm{D}_\sigma(b^n)^\alpha_\beta\gamma^\beta_\alpha(x_3^n\boldsymbol{w})\Big].
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Dans cette expression, les termes $\big(\tilde\gamma^\delta_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^k$ sont donnés par l'équation (3.16), et le terme $N^1_\sigma(\boldsymbol{w})$ est donné ci-dessus. Dans la suite, on ne détaille pas plus le développement de l'opérateur $L_\sigma(\varepsilon)$, et on remplace les valeurs des tenseurs $\big(\tilde\gamma^\alpha_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^n$ au fur et à mesure de la résolution lorsque c'est nécessaire (voir le chapitre III).

Enfin, l'opérateur $B_\sigma(\varepsilon)$ s'écrit simplement

$$
B_\sigma(\varepsilon)(\boldsymbol{w}) = \mu N_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w}), \tag{4.11}
$$

et l'équation (3.21) donne l'expression voulue.

4.4 Récapitulation

Le théorème ci-dessous récapitule les expressions des opérateurs $\boldsymbol{L}^k$ et $\boldsymbol{B}^k$ du théorème 2.9.

Théorème 4.1 *Les opérateurs* $\boldsymbol{L}^k$ *et* $\boldsymbol{B}^k$ *introduits dans le théorème* 2.9 *ont les expressions suivantes : pour* $k=0$, *on a* $\boldsymbol{L}^0 = \boldsymbol{\ell}\circ\partial_{33}$ *et* $\boldsymbol{B}^0 = \boldsymbol{\ell}\circ\partial_3$, *où* $\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{w}) = \big(\mu w_\alpha, (\lambda+2\mu)w_3\big)$, *de plus*

$$
\begin{aligned}
L^1_\sigma(\boldsymbol{w}) &= -\mu b^\alpha_\alpha\partial_3 w_\sigma + (\lambda+\mu)\mathrm{D}_\sigma\partial_3 w_3 - x_3\mu b^\alpha_\sigma\partial_{33}w_\alpha,\\
L^1_3(\boldsymbol{w}) &= -\mu b^\alpha_\alpha\partial_3 w_3 + (\lambda+\mu)\gamma^\alpha_\alpha(\partial_3\boldsymbol{w}),
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

et

$$L^2_\sigma(\boldsymbol{w}) = -\mu x_3 c^\alpha_\alpha \partial_3 w_\sigma + \mu x_3 b^\alpha_\alpha b^\beta_\sigma \partial_3 w_\beta - \mu b^\alpha_\alpha \mathrm{D}_\sigma w_3 - \mu b^\beta_\beta b^\alpha_\sigma w_\alpha + \lambda \mathrm{D}_\sigma \gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{w}) + 2\mu \mathrm{D}_\alpha \gamma^\alpha_\sigma(\boldsymbol{w}),$$

$$L^2_3(\boldsymbol{w}) = -\mu x_3 c^\alpha_\alpha \partial_3 w_3 + (\lambda+\mu) b^\beta_\alpha \gamma^\alpha_\beta\big(\partial_3(x_3\boldsymbol{w})\big) + \mu b^\beta_\alpha \gamma^\alpha_\beta(\boldsymbol{w}) + \mu \mathrm{D}^\alpha \theta_\alpha(\boldsymbol{w}). \tag{4.13}$$

De plus, pour tout $n \geq 3$ *, on a*

$$\begin{aligned} L^n_\sigma(\boldsymbol{w}) = {} & -\mu x_3^{n-1}(b^n)^\alpha_\alpha \partial_3 w_\sigma - \mu x_3^{n-2}(b^{n-1})^\alpha_\alpha N^1_\sigma(\boldsymbol{w}) + \lambda \mathrm{D}_\sigma (b^{n-2})^\alpha_\beta \gamma^\beta_\alpha(x_3^{n-2}\boldsymbol{w}) \\ & + 2\mu \mathrm{D}_\alpha \big(\tilde{\gamma}^\alpha_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^{n-2} + 2\mu \sum_{k=1}^{n-2} x_3^k (b^{k-1})^\delta_\nu \big(\tilde{\gamma}^\alpha_\delta[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^{n-2-k} \mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma \\ & - 2\mu \sum_{k=1}^{n-2} x_3^k (b^{k-1})^\alpha_\nu \big(\tilde{\gamma}^\delta_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^{n-2-k} \mathrm{D}_\alpha b^\nu_\delta, \end{aligned} \tag{4.14}$$

et

$$\begin{aligned} L^n_3(\boldsymbol{w}) = {} & -\mu x_3^{n-1}(b^n)^\alpha_\alpha \partial_3 w_3 + (\lambda+\mu)(b^{n-1})^\alpha_\beta \gamma^\beta_\alpha\big(\partial_3(x_3^{n-1}\boldsymbol{w})\big) \\ & + \mu(n-1)(b^{n-1})^\alpha_\beta \gamma^\beta_\alpha(x_3^{n-2}\boldsymbol{w}) + \mu \sum_{\ell=0}^{n-2} (b^\ell)^\delta_\alpha \mathrm{D}^\alpha (b^{n-2-\ell})^\beta_\delta \theta_\beta(x_3^{n-2}\boldsymbol{w}), \end{aligned} \tag{4.15}$$

avec pour tout $k \geq 0$

$$\big(\tilde{\gamma}^\alpha_\beta[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^k = x_3^k (b^k)^\alpha_\delta \gamma^\delta_\beta(\boldsymbol{w}) + k\, x_3^k (b^{k-1})^\alpha_\delta \Lambda^{\delta\,\cdot}_{\ \cdot\,\beta}(\boldsymbol{w}), \tag{4.16}$$

et $N^1_\sigma(\boldsymbol{w}) = \theta_\sigma(\boldsymbol{w}) - x_3 b^\alpha_\sigma \partial_3 w_\alpha$ *. Pour l'opérateur sur les faces supérieures et inférieures, on a*

$$B_\sigma(\varepsilon)(\boldsymbol{w}) = \varepsilon^{-1}\mu \partial_3 w_\sigma\big|_{\Gamma_\pm} + \mu\theta_\sigma(\boldsymbol{w})\big|_{\Gamma_\pm} - \mu x_3 b^\alpha_\sigma \partial_3 w_\alpha\big|_{\Gamma_\pm}. \tag{4.17}$$

et pour tout $n \geq 1$ *,*

$$B^n_3(\boldsymbol{w}) = \lambda (b^{n-1})^\alpha_\beta \gamma^\beta_\alpha(x_3^{n-1}\boldsymbol{w})\big|_{\Gamma_\pm}. \tag{4.18}$$

Preuve. Ce théorème est une conséquence directe des équations (4.7) et (4.10) en calculant les premiers termes $\boldsymbol{L}^1$ et $\boldsymbol{L}^2$. ∎

4.5 Hypothèses sur le second membre

Les équations de l'élasticité tridimensionnelles sur une coque (voir les équations (4.19) et (4.20) du chapitre I) font intervenir le champ de 1-formes $\boldsymbol{f}$ décrivant les forces volumiques appliquées à l'intérieur de la coque. Par hypothèse, $\boldsymbol{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω^ε et dépend des variables (y_α, h) dans un système de coordonnées normales. On suppose de plus que $\boldsymbol{f}$ dépend de ε, et on note dans la suite $\boldsymbol{f}^\varepsilon$ le champ de forces volumiques. On désigne alors par $\boldsymbol{f}^\varepsilon(\varepsilon)$ le champ de 1-forme $\boldsymbol{f}^\varepsilon$ après changement d'échelle.

On fait alors l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.2 *Le champ de 1-forme $\boldsymbol{f}^\varepsilon$ après changement d'échelle admet un développement asymptotique*

$$\boldsymbol{f}^\varepsilon(\varepsilon) \simeq \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon^k \boldsymbol{f}^k.$$

où les $\boldsymbol{f}^k \in \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ sont indépendants de ε.

Cette hypothèse signifie que pour tout $N \in \mathbb{N}$, et pour $\|.\|$ une norme quelconque d'espace fonctionnel indépendante de ε, il existe une constante C_N indépendante de ε, telle que

$$\|\boldsymbol{f}^\varepsilon(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \boldsymbol{f}^k\| \le C_N \varepsilon^{N+1}.$$

L'hypothèse 4.2 est réalisée par exemple dans le cas où $\boldsymbol{f}^\varepsilon$ est la restriction sur l'ouvert Ω^ε d'un champ de 1-forme $\mathscr{C}^\infty$ défini sur $\mathbb{R}^3$. Ceci revient à supposer que $\boldsymbol{f}^\varepsilon = \boldsymbol{f}$ ne dépend pas de ε sur Ω^ε. Dans ce cas, le développement de Taylor de $\boldsymbol{f}$ en h dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon), \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ (voir le corollaire 1.5 du chapitre II),

$$\boldsymbol{f}(x_\alpha, h) \simeq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{h^k}{k!} (\partial_3^\varepsilon)^k \boldsymbol{f}(0),$$

où $(\partial_3^\varepsilon)^k \boldsymbol{f}(0)$ ne dépend pas de ε, fournit un développement asymptotique de $\boldsymbol{f}(\varepsilon)$:

$$\boldsymbol{f}(\varepsilon)(x_\alpha, x_3) \simeq \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon^k \frac{x_3^k}{k!} (\partial_3^\varepsilon)^k \boldsymbol{f}(0).$$

Toutefois, l'hypothèse 4.2 recouvre des cas plus généraux que le précédent.

L'hypothèse précédente permet d'associer naturellement au problème de l'élasticité tridimensionnelle sur une coque un développement en série du second membre.

Chapitre III

Résolution en séries formelles

Dans ce chapitre, on introduit la notion de *solution en série formelle* des équations de l'élasticité tridimensionnelle sur une coque mince en omettant les conditions aux limites sur le bord latéral. On définit donc un problème posé dans l'algèbre des *séries formelles* en ε dont les coefficients sont des champs de 1-formes sur S_0 dépendant de la coordonnée normale x_3 après changement d'échelle. Ce problème provient des développements des équations effectués dans le chapitre précédent. Dans un premier temps, on introduit la notion de série formelle ainsi que celle de solution en série formelle du problème 3D. On montre ensuite un théorème de structure qui permet de ramener l'étude de la solution 3D à l'étude d'un nouveau problème 2D posé sous forme de séries formelles appelé *problème réduit.* Ceci revient en fait à résoudre en x_3 les équations 3D. Une des raisons pour lesquelles il est difficile de dégager des équations bidimensionnelles simples pour l'élasticité sur une coque est que le problème réduit n'est pas unique, et qu'il peut être posé sous différentes formes, toutes équivalentes. On exhibe ici une écriture du problème réduit faisant intervenir des séries formelles *canoniques* vérifiant des équations fonctionnelles sur la variété $\Omega =: S \times (-1, 1)$. On donne dans la dernière section de ce chapitre les expressions exactes des opérateurs intervenant jusqu'au rang 2 dans les développements en séries formelles du problème réduit. Les calculs effectués se rapprochent de ceux figurant dans John [33] dans un esprit plus systématique, mais dans un cadre linéaire. L'étude des différents modèles bidimensionnels de coques est faites dans le chapitre suivant.

1 Développements en séries formelles

Dans le chapitre II, on a montré que les opérateurs $\boldsymbol{L}(\varepsilon)$ et $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$ admettent des développement en séries entières en ε (voir le théorème 2.9 du chapitre II). Ces développements induisent naturellement des développements en séries formelles en ε . Ceci permet d'introduire la notion de solution en série formelle associée à ces opérateurs. A la fin de cette section, on donne les équations de récurrence vérifiées par ces solutions.

1.1 Séries formelles

On rappelle que si E est une algèbre, une série formelle $a[\varepsilon]$ en ε à coefficients dans E est la donnée d'un entier n_0 appelé *puissance de démarrage de la série formelle* et d'une suite $\{a^k\}_{k\geq 0}$ d'éléments de E . On note cette série formelle $a[\varepsilon] = \varepsilon^{n_0}\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k a^k$. L'ensemble des séries formelles sur E est alors muni d'une structure d'algèbre dont l'addition est simplement l'addition terme à terme des composantes, et dont le produit est le *produit de Cauchy* de deux séries formelles défini par la formule suivante, où $a[\varepsilon] = \varepsilon^{k_0}\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k a^k$ et $b[\varepsilon] = \varepsilon^{\ell_0}\sum_{\ell\geq 0}\varepsilon^\ell b^\ell$ sont des séries formelles sur E :

$$a[\varepsilon]b[\varepsilon] = \varepsilon^{k_0+\ell_0}\sum_{n\in\mathbb{N}}\varepsilon^n\Big(\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}\Big).$$

Soit maintenant E et F deux espaces de fonctions. Si $A[\varepsilon] = \varepsilon^{k_0}\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A^k$ est une série formelle en ε à coefficients opérateurs continus de E dans F, et si $b[\varepsilon] = \varepsilon^{\ell_0}\sum_{\ell\geq 0}\varepsilon^\ell b^\ell$ et $c[\varepsilon] = \varepsilon^{n_0}\sum_{n\geq 0}\varepsilon^n c^n$ sont des séries formelles à coefficients respectivement dans E et F , alors on peut définir le produit de Cauchy de $A[\varepsilon]$ et $b[\varepsilon]$, et la notation

$$A[\varepsilon]b[\varepsilon] = c[\varepsilon]$$

signifie que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \sum_{p=0}^{n}A^p b^{n-p} = c^{n-n_0+k_0+\ell_0}.$$

avec la convention que $c^k = 0$ pour $k<0$. Si les séries formelles $A[\varepsilon]$ et $b[\varepsilon]$ ont la même puissance de démarrage k_0 , on peut aussi définir le *produit tensoriel* des séries formelles $A[\varepsilon]$ et $b[\varepsilon]$ par l'équation

$$A[\varepsilon]\otimes b[\varepsilon] = \varepsilon^{k_0}\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k c^k \quad \text{avec} \quad \forall k\geq 0,\quad c^k = A^k b^k.$$

Il s'agit donc simplement du produit terme à terme des séries formelles $A[\varepsilon]$ et $b[\varepsilon]$.

Avec les notations du chapitre précédent, on note $\big(\boldsymbol{L}(\varepsilon),\boldsymbol{B}(\varepsilon)\big)$ l'opérateur tridimensionnel après changement d'échelle. Le théorème 2.9 du chapitre II montre que cet opérateur admet un développement en séries entières en ε , et donc on peut lui associer naturellement un développement en séries formelles en ε à coefficients opérateurs sur la variété $\Omega = S \times (-1,1)$. Dans la suite, on note $\boldsymbol{L}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{B}[\varepsilon]$ les séries formelles associées respectivement aux opérateurs $\boldsymbol{L}(\varepsilon)$ et $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$. On a donc

$$\boldsymbol{L}[\varepsilon] = \varepsilon^{-2} \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{L}^k \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B}[\varepsilon] = \varepsilon^{-1} \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{B}^k \tag{1.1}$$

dans des algèbres de séries formelles en ε à coefficients opérateurs sur la variété Ω . Les opérateurs $\boldsymbol{L}^k$ et $\boldsymbol{B}^k$ sont donnés dans le théorème 4.1 du chapitre précédent. Les deux séries formelles de l'équation (1.1) ont des puissances de démarrage négatives.

1.2 Solution en série formelle

L'équation (1.1) permet de définir la notion de solution en série formelle en ε du problème tridimensionnel sans conditions aux limites sur le bord latéral.

Définition 1.1 Soit $\boldsymbol{f}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{f}^k$ une série formelle en ε à coefficients dans

$$\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big).$$

On appelle *solution* 3D *en série formelle* toute série formelle $\boldsymbol{w}[\varepsilon] = \sum_k \varepsilon^k \boldsymbol{w}^k$ à coefficients dans $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ telle que les équations suivantes soient satisfaites :

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}[\varepsilon]\boldsymbol{w}[\varepsilon] = -\boldsymbol{f}[\varepsilon], \\ \boldsymbol{B}[\varepsilon]\boldsymbol{w}[\varepsilon] = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

où la première équation est valable dans $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ et la seconde dans $\Gamma(T_1\Gamma_\pm) \times \mathscr{C}^\infty(\Gamma_\pm)$. ■

Dans la définition précédente on impose au second membre $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ et à la solution $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ d'avoir des puissances de démarrage égale à 0 . Par linéarité, le problème précédent à un sens si la puissance de démarrage de $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ est non nulle, et une solution en série formelle est alors une série formelle de même puissance de démarrage que $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$.

Avec la définition précédente, si on note $\boldsymbol{f}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{f}^k$, alors la série formelle $\boldsymbol{w}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{w}^k$ est une solution en série formelle des équations tridimensionnelles si et seulement si l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \boldsymbol{L}^\ell(\boldsymbol{w}^{n-\ell}) = -\boldsymbol{f}^{n-2} \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \boldsymbol{B}^\ell(\boldsymbol{w}^{n-\ell}) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \end{cases} \tag{1.3}$$

Pour $\ell < 0$, on a bien sur $\boldsymbol{f}^\ell = 0$. Le but de ce chapitre est l'étude des solutions de ce système.

1.3 Premiers termes

Rappelons que si E est le coefficient de Poisson du matériau et ν le module d'Young, on a les relations

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad \text{et} \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \tag{1.4}$$

et inversement

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{1.5}$$

Le fait que $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ équivaut à $E > 0$ et $0 < \nu < 1/2$. En accord avec les notations figurant dans [33], on pose

$$p = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \quad \text{et} \quad q = \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}. \tag{1.6}$$

On a donc $p+q = 1$. Ces coefficients s'expriment en fonction du coefficient ν grâce aux formules

$$p = \frac{\nu}{1-\nu} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-2\nu}{1-\nu}.$$

Dans cette sous-section, $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ est une solution 3D en série formelle, et on étudie les équations (1.3) aux rangs $n = 0$ et $n = 1$. Ceci donne des résultats sur les termes $\boldsymbol{w}^0$ et $\boldsymbol{w}^1$.

D'après le chapitre II, on a

$$\boldsymbol{L}^0 = \boldsymbol{\ell} \circ \partial_{33} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B}^0 = \boldsymbol{\ell} \circ \partial_3,$$

où l'opérateur $\boldsymbol{\ell}$ est défini par $\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{w}) = \big(\mu w_\alpha, (\lambda+2\mu)w_3\big)$ et est donc inversible avec $\boldsymbol{\ell}^{-1}(\boldsymbol{w}) = \big(\frac{1}{\mu}w_\alpha, \frac{1}{\lambda+2\mu}w_3\big)$.

Pour $n = 0$, les équations (1.3) se réduisent à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{L}^0(\boldsymbol{w}^0) & = & 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{B}^0(\boldsymbol{w}^0) & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \end{array} \right. \tag{1.7}$$

Les composantes transverses de ces équations s'écrivent encore

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\lambda+2\mu)\partial_{33}w_3^0 & = & 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ (\lambda+2\mu)\partial_3 w_3^0 & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \end{array} \right.$$

En intégrant ces équations, on a immédiatement

$$\int_{-1}^{x_3} \partial_{33} w_3^0 \, \mathrm{d}x_3 = 0 = \partial_3 w_3^0(x_3),$$

d'où

$$w_3^0 = z_3^0(x_\alpha) \tag{1.8}$$

où z_3^0 est une fonction ne dépendant pas de la troisième variable x_3. De même, les composantes surfaciques des équations (1.7) s'écrivent

$$\begin{cases} \mu\partial_{33} w_\sigma^0 &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \mu\partial_3 w_\sigma^0 &= 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \end{cases}$$

Comme précédemment, ceci implique que dans un système de coordonnées normales, on a

$$w_\sigma^0(x_\alpha, x_3) = z_\sigma^0(x_\alpha). \tag{1.9}$$

De plus, les composantes z_α définissent une 1-forme sur la surface S_0 en vertu du lemme 3.6 du chapitre I et du lemme 1.3 du chapitre II. Cette 1-forme surfacique ne dépend pas de x_3. La relation précédente s'écrit donc simplement $\boldsymbol{w}^0 = \boldsymbol{z}^0$ et est intrinsèque : c'est une égalité dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ où $\boldsymbol{z}^0$ est vu comme élément de cet espace en utilisant le plongement canonique

$$\mathscr{I} : \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0) \hookrightarrow \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big). \tag{1.10}$$

Passons maintenant au rang $n = 1$. Les équations (1.3) s'écrivent

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}^0(\boldsymbol{w}^1) &= -\boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{w}^0) \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{B}^0(\boldsymbol{w}^1) &= -\boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{w}^0) \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm, \end{cases} \tag{1.11}$$

et rappelons que d'après l'équation (4.12) du chapitre II, on a

$$\begin{aligned} L_\sigma^1(\boldsymbol{w}) &= -\mu b_\alpha^\alpha \partial_3 w_\sigma + (\lambda+\mu)\mathrm{D}_\sigma \partial_3 w_3 - x_3 \mu b_\sigma^\alpha \partial_{33} w_\alpha, \\ L_3^1(\boldsymbol{w}) &= -\mu b_\alpha^\alpha \partial_3 w_3 + (\lambda+\mu)\gamma_\alpha^\alpha(\partial_3 \boldsymbol{w}). \end{aligned} \tag{1.12}$$

De plus, les équations (4.17) et (4.18) du chapitre II montrent que

$$\begin{aligned} B_\sigma^1(\boldsymbol{w}) &= \mu\theta_\sigma(\boldsymbol{w})\big|_{\Gamma_\pm} - \mu x_3 b_\sigma^\alpha \partial_3 w_\alpha\big|_{\Gamma_\pm}, \\ B_3^1(\boldsymbol{w}) &= \lambda\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{w})\big|_{\Gamma_\pm}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Compte tenu du fait que $\boldsymbol{w}^0 = \boldsymbol{z}^0$ ne dépend pas de x_3, on a $\partial_3 \boldsymbol{w}^0 = 0$. On voit donc que $\boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{w}^0) = 0$,

$$B^1_\sigma(\boldsymbol{w}^0) = \mu\theta_\sigma(\boldsymbol{z}^0)\big|_{\Gamma_\pm} \quad \text{et} \quad B^1_3(\boldsymbol{w}^0) = \lambda\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}^0)\big|_{\Gamma_\pm}.$$

Les composantes transverses des équations (1.11) deviennent donc

$$\begin{cases} (\lambda+2\mu)\partial_{33}w^1_3 &= 0 \qquad\qquad \text{dans} \quad \Omega, \\ (\lambda+2\mu)\partial_3 w^1_3 &= -\lambda\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}^0) \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \end{cases}$$

En divisant par $\lambda + 2\mu > 0$, on trouve encore (voir l'équation (1.6))

$$\begin{cases} \partial_{33}w^1_3 &= 0 \qquad\qquad \text{dans} \quad \Omega, \\ \partial_3 w^1_3 &= -p\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}^0) \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \end{cases}$$

Ces équations définissent un problème de Neumann, dont la condition de compatibilité s'écrit

$$\big[-p\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}^0)\big]^{+1}_{-1} = 0.$$

Or cette égalité est toujours vérifiée car $\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}^0)$ ne dépend pas de x_3. On en déduit que

$$\partial_3 w^1_3(x_3) = \partial_3 w^1_3(-1) = -p\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}^0),$$

et puisque le dernier terme ne dépend pas de x_3,

$$w^1_3 = z^1_3 - x_3 p\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}^0) \tag{1.14}$$

où comme précédemment, la fonction z^1_3 ne dépend pas de x_3. La fonction z^1_3, tout comme la fonction z^0_3, est une constante d'intégration en x_3. Ces deux fonctions dépendent en particulier de la primitive en x_3 que l'on prend de la fonction $-p\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}^0)$. Si on prend, par exemple, $-(x_3+1)p\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}^0)$ au lieu de $-x_3p\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}^0)$, alors ces constantes changent. Dans la suite, on prendra de façon systématique des primitives de fonctions en x_3 qui s'annulent sur la surface moyenne (soit en $x_3 = 0$).

D'autre part, les composantes surfaciques des équations (1.11) s'écrivent

$$\begin{cases} \mu\partial_{33}w^1_\sigma &= 0 \qquad\qquad \text{dans} \quad \Omega, \\ \mu\partial_3 w^1_\sigma &= -\theta_\sigma(\boldsymbol{z}^0) \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \end{cases}$$

On en déduit comme précédemment que

$$w^1_\sigma = z^1_\sigma - x_3\theta_\sigma(\boldsymbol{z}^0) \tag{1.15}$$

où z_σ^1 ne dépend pas de x_3 et définit une 1-forme sur la surface S_0.

On trouve donc les équations

$$\boldsymbol{w}^0 = \boldsymbol{z}^0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{w}^1 = \boldsymbol{z}^1 + \boldsymbol{V}^1(\boldsymbol{z}^0), \tag{1.16}$$

où $\boldsymbol{z}^0$ et $\boldsymbol{z}^1$ sont des éléments de $\Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$, et où $\boldsymbol{V}^1$ est l'opérateur

$$\boldsymbol{V}^1 : \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0) \to \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big),$$

défini par la relation

$$\boldsymbol{V}^1(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} -x_3\theta_\sigma(\boldsymbol{z}), \\ -x_3 p \gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}). \end{cases} \tag{1.17}$$

En utilisant les expressions des opérateurs θ_σ et $\gamma_{\alpha\beta}$, on a encore

$$\boldsymbol{V}^1(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} -x_3(\mathrm{D}_\sigma z_3 + b_\sigma^\alpha z_\alpha), \\ -x_3 p(\mathrm{D}^\alpha z_\alpha - b_\alpha^\alpha z_3). \end{cases}$$

L'équation (1.16) montre que les premiers termes d'une solution en série formelle $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ se calculent à partir de termes $\boldsymbol{z}^0$ et $\boldsymbol{z}^1$. Pour cette raison, on pose la définition suivante :

Définition 1.2 On appelle *générateur* 2D tout élément $\boldsymbol{z} \in \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$. ■

Un générateur 2D est donc un élément de $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ indépendant de x_3. Il se représente dans un système de coordonnées locales par un couple (z_α, z_3) d'une 1-forme et d'une fonction sur S_0.

2 Structure des solutions en série formelle

Dans cette section, on poursuit l'étude du développement d'une solution 3D en série formelle (voir la définition 1.1). On montre que la connaissance de ce développement se ramène à la résolution d'une nouvelle équation dans une algèbre de séries formelles, mais posée sur la surface moyenne S_0. A partir d'une solution de ce nouveau problème, on peut alors construire une solution tridimensionnelle. On donne ici les résultats théoriques. Le calcul des termes du développement font l'objet de la section suivante.

2.1 Opérateurs solutions

Soit $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ une série formelle solution 3D. Elle vérifie donc les équations (1.3) qui s'écrivent encore

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \partial_{33}\boldsymbol{w}^k = -\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} \boldsymbol{\ell}^{-1}\boldsymbol{L}^{\ell}(\boldsymbol{w}^{k-\ell}) - \boldsymbol{\ell}^{-1}\boldsymbol{f}^{k-2} \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \partial_3\boldsymbol{w}^k = -\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} \boldsymbol{\ell}^{-1}\boldsymbol{B}^{\ell}(\boldsymbol{w}^{k-\ell}) \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\pm}. \end{cases} \tag{2.1}$$

La sous-section précédente montre que les deux premiers termes de la série formelle $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ se calculent à l'aide de générateurs 2D. Cette réduction d'une dimension et le remplacement d'inconnues 3D par des inconnues 2D constitue le point principal de ce chapitre. La démarche générale est résumée ci-dessous.

Supposons k fixé, et supposons qu'il existe $k+1$ générateurs 2D distincts, notés $\boldsymbol{z}^j$ pour $j = 0, \ldots, k$, tels que pour tout $j \leq k$, les termes $\boldsymbol{w}^j$ dépendent des générateurs $\boldsymbol{z}^0, \ldots, \boldsymbol{z}^j$ et des éléments $\boldsymbol{f}^0, \ldots, \boldsymbol{f}^{j-2}$. L'équation (2.1) écrite au rang $k+1$ montre que $\boldsymbol{w}^{k+1}$ est solution d'un problème de Neumann sur l'intervalle I, ce qui implique une condition de compatibilité sur les seconds membres. Cette condition de compatibilité détermine une équation liant les termes $\boldsymbol{z}^j$ pour $j = 0, \ldots, k$ et les termes $\boldsymbol{f}^j$ pour $j = 0, \ldots, k-1$. Le terme $\boldsymbol{w}^{k+1}$ est alors la somme d'un terme dépendant des $\boldsymbol{z}^j$, pour $j = 0, \ldots, k$, d'un terme dépendant des $\boldsymbol{f}^j$ pour $j = 0, \ldots, k-1$, et d'un élément du noyau du problème de Neumann qui est constitué précisément des générateurs 2D. On appelle alors cet élément $\boldsymbol{z}^{k+1}$, et il est clair que l'on montre ainsi par récurrence qu'il existe une famille $\{\boldsymbol{z}^k\}$ de générateurs 2D tels que pour tout k, le terme $\boldsymbol{w}^k$ dépende des termes $\boldsymbol{z}^j$ pour $j = 0, \ldots, k$ et des termes $\boldsymbol{f}^j$ pour $j = 0, \ldots, k-2$. De plus, la famille $\{\boldsymbol{z}^k\}$ de générateurs 2D vérifie une collection d'équations provenant des conditions de compatibilités successives.

Le but de toute cette section est de montrer le théorème de structure qui fait l'objet de la sous-section 2.2 ci-dessous. Le résultat de ce théorème est tout d'abord que la relation liant la famille de 1-formes $\{\boldsymbol{w}^k\}$ aux familles $\{\boldsymbol{z}^k\}$ et $\{\boldsymbol{f}^k\}$ peut être écrite sous forme de séries formelles, c'est-à-dire qu'il existe des séries formelles $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ telles que

$$\boldsymbol{w}[\varepsilon] = \boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon], \tag{2.2}$$

où les coefficients $\boldsymbol{V}^k$ sont des opérateurs définis sur l'espace des générateurs 2D et à valeurs dans les 1-formes 3D. Les coefficients $\boldsymbol{Q}^k$ sont des opérateurs sur les 1-formes 3D. Les calculs de la sous-section précédente montrent qu'on peut prendre $\boldsymbol{V}^0 = \mathscr{I}$ et $\boldsymbol{V}^1 = \boldsymbol{V}^1$, et pour $\boldsymbol{Q}^0$ et $\boldsymbol{Q}^1$ les opérateurs nuls.

D'autre part, on montrera aussi que les conditions de compatibilité s'écrivent sous forme de séries formelles, soit

$$\boldsymbol{A}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \boldsymbol{G}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon] \tag{2.3}$$

où cette fois, $\boldsymbol{A}[\varepsilon]$ est une série formelle dont les coefficients sont des opérateurs envoyant des générateurs 2D sur des générateurs 2D[1], et $\boldsymbol{G}[\varepsilon]$ est une série formelle dont les coefficients envoient des 1-formes 3D sur des générateurs 2D. La série formelle $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ est ainsi une solution 3D si et seulement si il existe une série formelle $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ à coefficients générateurs 2D satisfaisant les équations (2.2) et (2.3).

Dans les calculs précédents, les conditions de compatibilité au rang 0 et 1 étaient trivialement vérifiées. Elles ne déterminent des opérateurs $\boldsymbol{A}^k$ et $\boldsymbol{G}^k$ qu'à partir du rang $k = 2$. Dans le cas des plaques (voir [17] et [16]), les conditions de compatibilité se divisent en deux équations en séries formelles liant les séries formelles $z_\alpha[\varepsilon]\mathrm{d}y^\alpha$ et $f_\alpha[\varepsilon]\mathrm{d}y^\alpha$ d'une part et les séries formelles $z_3[\varepsilon]$ et $f_3[\varepsilon]$ d'autre part : on a

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}[\varepsilon]\big(z_\alpha[\varepsilon]\mathrm{d}y^\alpha\big) = \boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}[\varepsilon]\big(f_\alpha[\varepsilon]\mathrm{d}y^\alpha\big) \quad \text{et} \quad A_{\mathrm{b}}[\varepsilon]z_3[\varepsilon] = G_{\mathrm{b}}[\varepsilon]f_3[\varepsilon],$$

où le premier terme $\boldsymbol{A}^0_{\mathrm{m}}$ est l'opérateur de membrane sur la plaque (qui envoie donc des champs de 1-formes sur S_0 sur des champs de 1-formes sur S_0) et A^0_{b} est l'opérateur de flexion qui est à un coefficient multiplicatif près le bilaplacien sur la surface moyenne de la plaque.

Cette structure de dépendance en série formelle est due au fait que le problème initial (1.2) est posé sous forme de série formelle, ce qui implique la forme particulière des équations (2.1). Le passage du problème initial (1.2) aux équations (2.2) et (2.3) est en fait la résolution en x_3 des équations 3D.

Dans la suite de cette sous-section, on montre l'existence de séries formelles opérateurs qu'on utilise ensuite pour montrer le théorème de structure. Ces opérateurs permettent de transformer les équations 3D en équations 2D.

Théorème 2.1
(i) *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *, il existe de manière unique :*

- *un opérateur* $\boldsymbol{V}^k : \Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0) \to \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ *polynomial en* x_3 *à coefficients opérateurs* 2D *(voir la définition* 2.6 *du chapitre* II*) s'annulant sur* S_0 *pour* $k \geq 1$ *,*
- *un opérateur* 2D $\boldsymbol{A}^k : \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0) \to \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$ *,*

tels que les séries formelles $\boldsymbol{V}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{V}^k$ *et* $\boldsymbol{A}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{A}^k$ *satisfassent*

[1] Il s'agit donc d'un cas particulier d'opérateur 2D (voir la définition 2.6 du chapitre II)

les équations

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{L}[\varepsilon]\boldsymbol{V}[\varepsilon](\boldsymbol{z}) = -\mathscr{I}\circ\boldsymbol{A}[\varepsilon](\boldsymbol{z}),\\
\boldsymbol{B}[\varepsilon]\boldsymbol{V}[\varepsilon](\boldsymbol{z}) = 0,
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

pour tout générateur 2D $\boldsymbol{z}$, *avec* $\mathscr{I}$ *l'injection canonique définie par l'équation* (1.10). *La première équation est donc valable dans l'algèbre des séries formelles à coefficients dans l'espace*

$$
\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big),
$$

et la deuxième dans l'algèbre des séries formelles à coefficients dans $\Gamma(T_1\Gamma_\pm)\times\mathscr{C}^\infty(\Gamma_\pm)$. *De plus,* $\boldsymbol{V}^0$ *s'identifie au plongement canonique* $\mathscr{I}$ *de l'équation* (1.10), *et* $\boldsymbol{V}^1$ *est l'opérateur défini par l'équation* (1.17).

(ii) *Pour tout* $k\in\mathbb{N}$, *il existe de manière unique :*

- *un opérateur* $\boldsymbol{Q}^k : \mathscr{C}^\infty\big(I,\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)\to\mathscr{C}^\infty\big(I,\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ *composition d'opérateurs* 2D *et d'intégrations en* x_3, *et s'annulant sur la surface moyenne* S_0,
- *un opérateur* $\boldsymbol{G}^k : \mathscr{C}^\infty\big(I,\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)\to\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)$ *composition d'opérateurs* 2D *et d'intégrations en* x_3 *sur l'intervalle* I, *la dernière étant la moyenne sur* I,

tels que les séries formelles $\boldsymbol{G}[\varepsilon]=\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\boldsymbol{G}^k$ *et* $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]=\sum_{k\geq 2}\varepsilon^k\boldsymbol{Q}^k$ *satisfassent les équations*

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{L}[\varepsilon]\boldsymbol{Q}[\varepsilon](\boldsymbol{f}) = \mathscr{I}\circ\boldsymbol{G}[\varepsilon](\boldsymbol{f})-\boldsymbol{f},\\
\boldsymbol{B}[\varepsilon]\boldsymbol{Q}[\varepsilon](\boldsymbol{f}) = 0,
\end{cases}
\tag{2.5}
$$

pour tout champ de 1 -formes 3D $\boldsymbol{f}$. *La première équation est une égalité dans l'algèbre des séries formelles à coefficients dans l'espace*

$$
\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big),
$$

et la deuxième est valable dans l'algèbre des séries formelles à coefficients opérateurs dans l'espace $\Gamma(T_1\Gamma_\pm)\times\mathscr{C}^\infty(\Gamma_\pm)$. *De plus, les opérateurs* $\boldsymbol{Q}^0$ *et* $\boldsymbol{Q}^1$ *sont les opérateurs nuls, et on a*

$$
\boldsymbol{G}^0(\boldsymbol{f}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{f}(x_3)\,\mathrm{d}x_3.
\tag{2.6}
$$

Preuve. Il suffit de montrer l'existence de séries formelles opérateurs $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$, $\boldsymbol{A}[\varepsilon]$, $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{G}[\varepsilon]$ satisfaisant les conditions du théorème et vérifiant les relations

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}[\varepsilon]\boldsymbol{V}[\varepsilon] = -\mathscr{I} \circ \boldsymbol{A}[\varepsilon], \\ \boldsymbol{B}[\varepsilon]\boldsymbol{V}[\varepsilon] = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

et

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}[\varepsilon]\boldsymbol{Q}[\varepsilon] = \mathscr{I} \circ \boldsymbol{G}[\varepsilon] - \mathbf{Id}, \\ \boldsymbol{B}[\varepsilon]\boldsymbol{Q}[\varepsilon] = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

dans les espaces de séries formelles adéquats. On montre les deux parties du théorème séparément.

1. Montrons donc tout d'abord l'existence des séries formelles $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{A}[\varepsilon]$ vérifiant l'équation (2.4). Celle-ci signifie, en utilisant l'équation (1.1), que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{L}^k \boldsymbol{V}^{n-k} = -\mathscr{I} \boldsymbol{A}^{n-2}, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{B}^k \boldsymbol{V}^{n-k} = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Ces équations s'écrivent encore

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \partial_{33} \boldsymbol{V}^n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\ell}^{-1} \boldsymbol{L}^k \boldsymbol{V}^{n-k} - \boldsymbol{\ell}^{-1} \mathscr{I} \boldsymbol{A}^{n-2}, \\ \partial_3 \boldsymbol{V}^n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\ell}^{-1} \boldsymbol{B}^k \boldsymbol{V}^{n-k}. \end{cases} \tag{2.10}$$

En posant $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-2} = 0$, la sous-section 1.3 montre que l'équation est vérifiée pour $n = 0$ et 1 avec les opérateurs $\boldsymbol{V}^0$ et $\boldsymbol{V}^1$ donnés dans l'énoncé du théorème.

Soit $n \geq 0$, et supposons donc les opérateurs $\boldsymbol{V}^\ell$ et $\boldsymbol{A}^{\ell-2}$ déterminés pour $\ell = 0, \dots, n$, les opérateurs $\boldsymbol{V}^\ell$ étant polynomiaux en x_3 . Soit $\boldsymbol{z} \in \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$, et considérons l'équation

$$\begin{cases} \partial_{33} \boldsymbol{v} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \boldsymbol{\ell}^{-1} \boldsymbol{L}^k \boldsymbol{V}^{n+1-k} \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\ell}^{-1} \mathscr{I} \boldsymbol{A}^{n-1} \boldsymbol{z} \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \partial_3 \boldsymbol{v} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \boldsymbol{\ell}^{-1} \boldsymbol{B}^k \boldsymbol{V}^{n+1-k} \boldsymbol{z} \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \end{cases} \tag{2.11}$$

où les inconnues sont ici $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{z}$. Ce problème est un problème de Neumann, dont la résolution est soumise à la condition de compatibilité

$$\int_{-1}^{1} \partial_{33}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x_3 = \big[\partial_3\boldsymbol{v}\big]_{-1}^{+1},$$

qui s'écrit encore après composition par $\boldsymbol{\ell}$ et par définition de $\mathscr{I}$,

$$2\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{z} = -\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-1}^{1}\big(\boldsymbol{L}^k\boldsymbol{V}^{n+1-k}\boldsymbol{z}\big)(x_3)\,\mathrm{d}x_3 \\ + \sum_{k=1}^{n+1}\big(\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{V}^{n+1-k}\boldsymbol{z}\big)(+1) - \sum_{k=1}^{n+1}\big(\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{V}^{n+1-k}\boldsymbol{z}\big)(-1). \quad (2.12)$$

L'équation précédente permet de définir l'opérateur $\boldsymbol{A}^{n-1}$ vérifiant les conditions de l'énoncé. L'unique solution $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}^{n+1}\boldsymbol{z}$ s'annulant sur la surface moyenne (soit en $x_3 = 0$) de l'équation (2.11) permet alors de définir l'opérateur $\boldsymbol{V}^{n+1}$ qui est l'opérateur de résolution du problème de Neumann associé. Par hypothèse de récurrence, les équations à l'intérieur du membre de droite de l'équation (2.11) sont polynomiales en x_3 . On en déduit que l'opérateur $\boldsymbol{V}^{n+1}$ est polynomial en x_3 à coefficients opérateurs 2D.

2. L'équation (2.8) signifie que les séries formelles $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{G}[\varepsilon]$ vérifient les équations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{L}^{n-k}\boldsymbol{Q}^k = \mathscr{I}\boldsymbol{G}^{n-2} - \delta_n^2\,\mathbf{Id}, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{B}^{n-k}\boldsymbol{Q}^k = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

où δ_n^2 est le symbole de Kronecker, $\delta_n^2 = 1$ si $n = 2$ et $\delta_n^2 = 0$ si $n \neq 2$. En posant $\boldsymbol{Q}^0 = \boldsymbol{Q}^1 = 0$ et $\boldsymbol{G}^{-2} = \boldsymbol{G}^{-1} = 0$, les équations précédentes sont trivialement vérifiées pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit $\boldsymbol{f}$ une 1-forme tridimensionnelle. Pour $n = 2$, le problème est celui de trouver $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{G}^0\boldsymbol{f}$ solutions de l'équation

$$\begin{cases} \partial_{33}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\ell}^{-1}\mathscr{I}\boldsymbol{G}^0\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\ell}^{-1}\boldsymbol{f} \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \partial_3\boldsymbol{q} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \end{cases}$$

Ce problème de Neumann possède une solution si et seulement si la condition de compatibilité suivante est vérifiée :

$$2\boldsymbol{G}^0\boldsymbol{f} = \int_{-1}^{1}\boldsymbol{f}(x_3)\,\mathrm{d}x_3.$$

Cette équation montre l'existence de l'opérateur $\boldsymbol{G}^0$ ainsi que son expression annoncée. L'opérateur $\boldsymbol{Q}^2$ est alors l'unique opérateur de résolution du problème précédent s'annulant sur la surface moyenne : on a

$$\boldsymbol{Q}^2(\boldsymbol{f}) = \int_0^{x_3} \Big(\int_{-1}^{u} \boldsymbol{\ell}^{-1}\big(\mathscr{I}\boldsymbol{G}^0\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}\big)(t)\,\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}u. \tag{2.14}$$

Supposons maintenant que les opérateurs $\boldsymbol{Q}^\ell$ et $\boldsymbol{G}^{\ell-2}$ soient déterminés pour $\ell = 0,\dots,n$, où $n \geq 3$ est un entier. Soit $\boldsymbol{f}$ une 1-forme tridimensionnelle. Considérons le problème

$$\begin{cases} \partial_{33}\boldsymbol{q} = -\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \boldsymbol{\ell}^{-1}\boldsymbol{L}^{n+1-k}\boldsymbol{Q}^k\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\ell}^{-1}\mathscr{I}\boldsymbol{G}^{n-1}\boldsymbol{f} \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \partial_3\boldsymbol{q} = -\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \boldsymbol{\ell}^{-1}\boldsymbol{B}^{n+1-k}\boldsymbol{Q}^k\boldsymbol{f} \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm, \end{cases} \tag{2.15}$$

où les inconnues sont $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{G}^{n-1}\boldsymbol{f}$. Ce problème possède une solution si la condition de compatibilité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{G}^{n-1}\boldsymbol{f} = \sum_{k=2}^{n+1} \int_{-1}^{1} \big(\boldsymbol{L}^{n+1-k}\boldsymbol{Q}^k\boldsymbol{f}\big)(x_3)\,\mathrm{d}x_3 \\ - \sum_{k=2}^{n+1} \big(\boldsymbol{B}^{n+1-k}\boldsymbol{Q}^k\boldsymbol{f}\big)(+1) + \sum_{k=2}^{n+1} \big(\boldsymbol{B}^{n+1-k}\boldsymbol{Q}^k\boldsymbol{f}\big)(-1). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Cette équation détermine l'opérateur $\boldsymbol{G}^{n-1}$ possédant les propriétés annoncées. L'opérateur $\boldsymbol{Q}^{n+1}$ est alors l'unique opérateur de résolution du problème précédent s'annulant sur la surface moyenne. ■

Les séries formelles du théorème 2.1 possèdent des propriétés de dépendance en x_3 et d'ordres de dérivation qui sont données dans la proposition 2.4 ci-dessous.

Auparavant, considérons un opérateur 2D quelconque. Il agit sur un élément $\boldsymbol{z} = (z_\alpha, z_3)$ de $\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)$. La notion de degré de dérivation de cet opérateur en z_α ou z_3 est invariante par changement de carte, et peut être déterminé comme l'ordre de dérivation usuel de l'opérateur écrit dans un système de coordonnées quelconque.

Notation 2.2 Si A est un opérateur 2D à valeurs dans l'espace $\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)$, on note $a_i(j)$ l'ordre de dérivation en z_j de la composante i de l'opérateur et on représente ceci sous la forme

$$\deg A = \begin{pmatrix} a_\sigma(\alpha) & a_\sigma(3) \\ a_3(\alpha) & a_3(3) \end{pmatrix}.$$

On introduit une relation d'ordre sur les degrés de dérivations : si la matrice $a_i(j)$ représente les ordres de dérivation de l'opérateur A et $b_i(j)$ ceux de l'opérateur

B , alors
$$\deg A \leq \deg B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i,j \quad a_i(j) \leq b_i(j).$$
De plus, on fait la convention qu'un opérateur d'ordre de dérivation négatif est l'opérateur nul et qu'inversement, l'opérateur nul a pour ordre de dérivation $-\infty$.
■

Cette notation est aussi valable pour des opérateurs agissant sur les générateurs 2D, et à valeurs dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ des champs de 1-formes 3D. Par exemple d'après le théorème précédent, on a

$$\deg \boldsymbol{V}^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \deg \boldsymbol{V}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

De même, on peut étendre la notation précédente aux opérateurs agissant directement sur l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$, en prenant garde que les ordres de dérivation concernés sont des ordres de dérivation *surfaciques* et non en la variable transverse. Les opérateurs $\boldsymbol{Q}^0$ et $\boldsymbol{Q}^1$ étant nuls, leurs ordres sont alors égaux à $-\infty$.

Remarque 2.3 Soit $\boldsymbol{A}$ un opérateur 2D à valeurs dans l'espace $\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)$. L'opérateur $\boldsymbol{A}$ se décompose alors en deux opérateurs notés

$$A_\sigma : \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0) \to \Gamma(T_1S_0) \quad \text{et} \quad A_3 : \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0) \to \mathscr{C}^\infty(S_0).$$

Il est important de remarquer que la notation A_σ définit bien un opérateur *intrinsèque.*
■

La même remarque est valable pour les opérateurs agissant sur les générateurs 2D et à valeurs dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$. Cette notation est employée dans toute la suite. On a ainsi d'après l'équation (1.17)

$$V_\sigma^1 = -x_3\theta_\sigma \quad \text{et} \quad V_3^1 = -x_3 p\gamma_\alpha^\alpha.$$

On montre maintenant la proposition suivante :

Proposition 2.4 *Avec les notations du théorème* 2.1*, les opérateurs* $\boldsymbol{V}^k$ *sont polynomiaux de degré* k *en* x_3 *pour tout* $k \geq 0$ *. De plus, avec la notation précédente pour les ordres des opérateurs, on a pour tout* $p \geq 0$ *les majorations*

$$\deg \boldsymbol{V}^{2p} \leq \begin{pmatrix} 2p & 2p-1 \\ 2p-1 & 2p \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \deg \boldsymbol{V}^{2p+1} \leq \begin{pmatrix} 2p & 2p+1 \\ 2p+1 & 2p \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

$$\deg \boldsymbol{Q}^{2p} \leq \begin{pmatrix} 2p-2 & 2p-3 \\ 2p-3 & 2p-2 \end{pmatrix} \quad et \quad \deg \boldsymbol{Q}^{2p+1} \leq \begin{pmatrix} 2p-2 & 2p-1 \\ 2p-1 & 2p-2 \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

$$\deg \boldsymbol{A}^{2p} \leq \begin{pmatrix} 2p+2 & 2p+1 \\ 2p+1 & 2p+2 \end{pmatrix} \quad et \quad \deg \boldsymbol{A}^{2p+1} \leq \begin{pmatrix} 2p+2 & 2p+3 \\ 2p+3 & 2p+2 \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

$$\deg \boldsymbol{G}^{2p} \leq \begin{pmatrix} 2p & 2p-1 \\ 2p-1 & 2p \end{pmatrix} \quad et \quad \deg \boldsymbol{G}^{2p+1} \leq \begin{pmatrix} 2p & 2p+1 \\ 2p+1 & 2p \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Preuve. Dans la suite on note $p_i^n(j)$ (resp. $a_i^n(j)$) l'ordre de dérivation de z_j dans $V_i^n(\boldsymbol{z})$ (resp. dans $A_i^n(\boldsymbol{z})$) pour j un indice surfacique ou $j=3$. De même, on note $q_i^n(j)$ (resp. $g_i^n(j)$) l'ordre de dérivation de f_j dans $Q_i^n(\boldsymbol{f})$ (resp. dans $G_i^n(\boldsymbol{f})$).

Exhibons tout d'abord des équations de récurrence liant les ordres des opérateurs. Les opérateurs $\boldsymbol{V}^n$ et $\boldsymbol{A}^n$ vérifient les équations (2.10) et (2.12). Compte tenu des expressions (4.15) et (4.18) du chapitre II pour les opérateurs $\boldsymbol{L}^k$ et $\boldsymbol{B}^k$ en composantes transverses, on a les deux relations de récurrence pour tout $n \geq 1$:

$$p_3^n(j) \leq \max_{0\leq \ell \leq n-1} \big(p_\sigma^{n-1-\ell}(j)+1\,,\, p_3^{n-1-\ell}(j)\,,\, p_3^{n-2-\ell}(j)+2\,,\, p_\sigma^{n-2-\ell}(j)+1\,, a_3^{n-2}(j)\big),$$

et

$$a_3^{n-2}(j) \leq \max_{0\leq \ell \leq n-1} \big(p_\sigma^{n-1-\ell}(j)+1\,,\, p_3^{n-1-\ell}(j)\,,\, p_3^{n-2-\ell}(j)+2\,,\, p_\sigma^{n-2-\ell}(j)+1\,\big), \tag{2.22}$$

avec la convention que les ordres des opérateurs de rangs négatifs sont égaux à $-\infty$. On en déduit donc

$$p_3^n(j) \leq \max_{0\leq \ell \leq n-1} \big(p_\sigma^{n-1-\ell}(j)+1\,,\, p_3^{n-1-\ell}(j)\,,\, p_3^{n-2-\ell}(j)+2\,,\, p_\sigma^{n-2-\ell}(j)+1\,\big). \tag{2.23}$$

D'autre part, d'après les équations (4.14), (4.16) et (4.17) du chapitre II donnant les expressions des opérateurs en composantes surfaciques, on a pour tout $n \geq 1$:

$$p_\sigma^n(j) \leq \max_{0\leq \ell \leq n-2} \big(p_\sigma^{n-1}(j)\,,\, p_3^{n-1}(j)+1\,,\, p_\sigma^{n-2-\ell}(j)+2\,,\, p_3^{n-2-\ell}(j)+1\,,\, a_\sigma^{n-2}(j)\big),$$

et

$$a_\sigma^{n-2}(j) \leq \max_{0\leq \ell \leq n-2} \big(p_\sigma^{n-1}(j)\,,\, p_3^{n-1}(j)+1\,,\, p_\sigma^{n-2-\ell}(j)+2\,,\, p_3^{n-2-\ell}(j)+1\big). \tag{2.24}$$

On en déduit donc que

$$p_\sigma^n(j) \leq \max_{0\leq \ell \leq n-2} \big(p_\sigma^{n-1}(j)\,,\, p_3^{n-1}(j)+1\,,\, p_\sigma^{n-2-\ell}(j)+2\,,\, p_3^{n-2-\ell}(j)+1\big). \tag{2.25}$$

Les deux équations (2.23) et (2.25) montrent en particulier que $p_\sigma^n(j) \geq p_\sigma^{n-1}(j)$ et $p_3^n(j) \geq p_3^{n-1}(j)$ pour tout n et pour tout j. On en déduit donc que

$$p_3^n(j) \leq \max\big(p_\sigma^{n-1}(j)+1\,,\, p_3^{n-1}(j)\,,\, p_3^{n-2}(j)+2\big) \tag{2.26}$$

et

$$p_\sigma^n(j) \leq \max\big(p_3^{n-1}(j)+1\,,\, p_\sigma^{n-1}(j)\,,\, p_\sigma^{n-2}(j)+2\big). \tag{2.27}$$

Fixons alors $j=3$. D'après les expressions des opérateurs $\boldsymbol{V}^0$ et $\boldsymbol{V}^1$, les valeurs initiales $p_3^0(3)$ et $p_\sigma^0(\sigma)$ sont égales à 0, tandis que $p_\sigma^0(3)$ et $p_3^0(\sigma)$ sont égaux à $-\infty$ car les opérateurs correspondant sont nuls. De même $p_3^1(3)=0$, $p_\sigma^1(3)=1$, $p_3^1(\sigma)=1$ et $p_\sigma^1(3)=0$. On montre alors par récurrence que $\forall p \geq 0$,

$$\begin{matrix} p_3^{2p+1}(3) \leq 2p \\ p_3^{2p}(3) \leq 2p \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} p_\sigma^{2p+1}(3) \leq 2p+1 \\ p_\sigma^{2p+2}(3) \leq 2p+1 \end{matrix}. \tag{2.28}$$

En effet, le résultat est vrai pour $p=0$ d'après ce qu'on a vu, car les équations de récurrence donnent l'estimation

$$p_\sigma^2(3) \leq \max\big(p_3^1(3)+1\,,\, p_\sigma^1(3)\,,\, p_\sigma^0(3)+2\big) = 1,$$

compte tenu de la relation $p_\sigma^0(3) = -\infty$. Supposons le résultat vrai pour $i \leq p$. Les équations (2.26) et (2.27) montrent que

$$\begin{aligned} p_3^{2p+2}(3) &\leq \max\big(p_\sigma^{2p+1}(3)+1\,,\, p_3^{2p+1}(3)\,,\, p_3^{2p}(3)+2\big) \\ &\leq \max\big(2p+2\,,\, 2p\,,\, 2p+2\big) = 2p+2, \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} p_3^{2p+3}(3) &\leq \max\big(p_\sigma^{2p+2}(3)+1\,,\, p_3^{2p+2}(3)\,,\, p_3^{2p}(3)+2\big) \\ &\leq \max\big(2p+2\,,\, 2p+2\,,\, 2p+2\big) = 2p+2. \end{aligned}$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} p_\sigma^{2p+3}(3) &\leq \max\big(p_3^{2p+2}(3)+1\,,\, p_\sigma^{2p+2}(3)\,,\, p_\sigma^{2p+1}(3)+2\big) \\ &\leq \max\big(2p+3\,,\, 2p+1\,,\, 2p+3\big) = 2p+3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_\sigma^{2p+4}(3) &\leq \max\big(p_3^{2p+3}(3)+1\,,\, p_\sigma^{2p+3}(3)\,,\, p_\sigma^{2p+2}(3)+2\big) \\ &\leq \max\big(2p+3\,,\, 2p+3\,,\, 2p+3\big) = 2p+3, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat au rang $p+1$. De plus, on remarque que les équations (2.26) et (2.27) sont les mêmes si on permute σ et 3. Comme les conditions initiales ont les mêmes symétries, on en déduit que l'on peut recopier la formule (2.28) simplement en permutant les indices surfaciques et l'indice transverse 3. On trouve donc que pour tout $p \geq 0$ on a

$$\begin{array}{ccc} p_\sigma^{2p+1}(\alpha) \leq 2p & & p_3^{2p+1}(\alpha) \leq 2p+1 \\ & \text{et} & \\ p_\sigma^{2p}(\alpha) \leq 2p & & p_3^{2p+2}(\alpha) \leq 2p+1 \end{array}.$$

Ceci termine de montrer l'équation (2.18) pour les opérateurs $\boldsymbol{V}^\ell$.

Les équations (2.22) et (2.24) montrent alors le résultat pour les majorations des coefficients $a_i^n(j)$ à partir des majorations des coefficients $p_i^n(j)$.

Les équations (2.15) et (2.16) montrent que les coefficients $q_i^n(j)$ et $g_i^n(j)$ satisfont les mêmes équations de récurrence que que $p_i^n(j)$ et $a_i^n(j)$. Néanmoins les valeurs initiales ne sont pas les mêmes : puisque les opérateurs $\boldsymbol{Q}^0$ et $\boldsymbol{Q}^1$ sont les opérateurs nuls, les coefficients $q_i^0(j)$ et $q_i^1(j)$ sont égaux à $-\infty$, et l'équation (2.14) montre que les ordres de dérivation $q_\sigma^2(\sigma)$ et $q_3^2(3)$ de l'opérateur $\boldsymbol{Q}^2$ sont nuls et que les coefficients $q_\sigma^2(3)$ et $q_3^2(\sigma)$ sont égaux à $-\infty$. On en déduit alors que les majorations concernant les coefficients $q_i^n(j)$ sont les mêmes que celles concernant les coefficients $p_i^{n-2}(j)$. De même, les majorations sur les coefficients $g_i^n(j)$ sont les mêmes que celles sur les coefficients $a_i^{n-2}(j)$. Ceci termine la démonstration des majorations des degrés des opérateurs.

Enfin, il reste à montrer que les opérateurs $\boldsymbol{V}^\ell$ sont polynomiaux de degré ℓ en x_3 pour tout $\ell \geq 0$. Rappelons que les opérateurs $\boldsymbol{V}^\ell$ vérifient les équations

$$\begin{cases} \partial_{33}\boldsymbol{V}^{n+1}\boldsymbol{z} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \boldsymbol{\ell}^{-1}\boldsymbol{L}^k\boldsymbol{V}^{n+1-k}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\ell}^{-1}\mathscr{I}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{z} \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \partial_3\boldsymbol{V}^{n+1}\boldsymbol{z} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \boldsymbol{\ell}^{-1}\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{V}^{n+1-k}\boldsymbol{z} \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \end{cases}$$

pour tout $n \geq 0$ et pour tout $\boldsymbol{z} \in \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$. On montre alors le résultat par récurrence : il est clair que les opérateurs $\boldsymbol{V}^0$ et $\boldsymbol{V}^1$ sont de degrés 0 et 1 en x_3. Supposons que pour $\ell = 0, \dots, n$, les opérateurs $\boldsymbol{V}^\ell$ sont polynomiaux de degrés ℓ en x_3. Les équations (4.12)-(4.15) du chapitre II montrent que pour $k \geq 2$, les opérateurs $\boldsymbol{L}^k$ sont polynomiaux de degrés $k-1$ en x_3, et que les coefficients de x_3^{k-1} dans l'expression $\boldsymbol{L}^k\boldsymbol{w}$ comportent une dérivée ∂_3 agissant sur $\boldsymbol{w}$. Dans l'équation, tous les termes du membre de gauche de l'équation à l'intérieur sont donc polynomiaux de degré $n-1$ en x_3 excepté peut-être le terme $\boldsymbol{L}^1\boldsymbol{V}^n\boldsymbol{z}$. Or l'équation (4.12) du chapitre II montre que

$$\boldsymbol{L}^1\boldsymbol{v} = \begin{cases} -\mu b_\alpha^\alpha \partial_3 v_\sigma + (\lambda+\mu)\mathrm{D}_\sigma\partial_3 v_3 - x_3\mu b_\sigma^\alpha \partial_{33} v_\alpha, \\ -\mu b_\alpha^\alpha \partial_3 v_3 + (\lambda+\mu)\gamma_\alpha^\alpha(\partial_3\boldsymbol{v}), \end{cases}$$

pour $\boldsymbol{v}$ une 1-forme quelconque. Dans l'expression $\boldsymbol{L}^1\boldsymbol{V}^n\boldsymbol{z}$, les termes se factorisant par $\partial_3\boldsymbol{V}^n\boldsymbol{z}$ sont alors polynomiaux de degrés $n-1$ en x_3 et le terme comportant une dérivée double en x_3 aussi. On en déduit donc que $\boldsymbol{L}^1\boldsymbol{V}^n\boldsymbol{z}$ est polynomial en x_3 de degré $n-1$. En intégrant deux fois en x_3, on en déduit que $\boldsymbol{V}^{n+1}$ est polynomial en x_3 de degré $n+1$. Ceci termine la preuve de la proposition. ■

2.2 Théorème de structure

Le but de cette sous-section est de montrer le théorème de réduction suivant :

Théorème 2.5 *Le quadruplet de séries formelles* $\big(\boldsymbol{V}[\varepsilon], \boldsymbol{Q}[\varepsilon], \boldsymbol{A}[\varepsilon], \boldsymbol{G}[\varepsilon]\big)$ *possède les propriétés suivantes :*

(i) *Si* $\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{z}^k$ *est une série formelle à coefficients générateurs* 2D *satisfaisant l'équation*

$$\boldsymbol{A}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \boldsymbol{G}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon], \tag{2.29}$$

alors la série formelle $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ *définie par*

$$\boldsymbol{w}[\varepsilon] = \boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon], \tag{2.30}$$

est une solution 3D *en série formelle du problème* (1.2)*.*

(ii) *Réciproquement, si* $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ *est une solution* 3D *en série formelle du problème* (1.2)*, alors la série formelle* $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ *à coefficients générateurs* 2D *définie par l'équation*

$$\boldsymbol{z}[\varepsilon] := \boldsymbol{w}[\varepsilon]\,\big|_{x_3=0}\,, \tag{2.31}$$

satisfait les équations (2.29) *et* (2.30)*.*

Preuve. (i) Soit $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ une série formelle à coefficients dans $\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)$, et soit $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ une série formelle à coefficients 1-formes tridimensionnelles. Les équations (2.7) et (2.8) montrent que

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}[\varepsilon]\boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = -\mathscr{I}\boldsymbol{A}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon], \\ \boldsymbol{B}[\varepsilon]\boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}[\varepsilon]\boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon] = \mathscr{I}\boldsymbol{G}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon] - \boldsymbol{f}[\varepsilon], \\ \boldsymbol{B}[\varepsilon]\boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon] = 0. \end{cases}$$

Par sommation de ces égalités, on en déduit que la série formelle $\boldsymbol{w}[\varepsilon] = \boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ définit bien une solution 3D en série formelle si la condition (2.29) est vérifiée. On en déduit donc le résultat.

(ii) Réciproquement, si $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ est une solution 3D en série formelle, alors la famille de 1-formes associée vérifie les équations (2.1). On montre alors par récurrence l'existence d'une série formelle $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ à coefficients générateurs 2D satisfaisant les équations (2.30) et (2.29), en utilisant les opérateurs de résolution des problèmes de Neumann successifs exhibés dans le théorème 2.1. Le fait que les opérateurs $\boldsymbol{V}^k$ pour $k \geq 1$ et $\boldsymbol{Q}^k$ pour tout $k \geq 0$ s'annulent sur la surface moyenne montre alors que la série formelle $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ est la restriction de $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ à la surface moyenne S_0 qui s'identifie à l'ensemble des point de $S \times I$ dont la coordonnées x_3 est nulle. La série formelle $\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \boldsymbol{w}[\varepsilon]\big|_{x_3=0}$ vérifie donc bien les équations (2.29) et (2.30), ce qui termine la preuve du théorème. ■

Définition 2.6 Le quadruplet de séries formelles

$$\big(\boldsymbol{V}[\varepsilon], \boldsymbol{Q}[\varepsilon], \boldsymbol{A}[\varepsilon], \boldsymbol{G}[\varepsilon]\big)$$

fourni par le théorème 2.1 s'appelle la *réduction canonique* des équations de l'élasticité sur une coque. ■

La réduction canonique vérifie donc les propriétés (i) et (ii) du théorème 2.5, et satisfait les majorations de degrés de la proposition 2.4. Néanmoins, il existe d'autres quadruplets de séries formelles possédant les mêmes propriétés. Ceci est dû au fait que les équations (2.29) et (2.30) sont des équations en séries formelles, et donc des collections d'équations pouvant s'écrire sous différentes formes.

On appelle donc plus généralement *réduction admissible* tout quadruplet

$$\big(\widehat{\boldsymbol{V}}[\varepsilon], \widehat{\boldsymbol{Q}}[\varepsilon], \widehat{\boldsymbol{A}}[\varepsilon], \widehat{\boldsymbol{G}}[\varepsilon]\big)$$

de séries formelles satisfaisant les propriétés (i) et (ii) du théorème 2.5, et possédant les caractéristiques suivantes : les opérateurs $\widehat{\boldsymbol{V}}^k$ sont polynomiaux en x_3 de degré k et s'annulent sur la surface moyenne pour $k \geq 1$, les opérateurs $\widehat{\boldsymbol{Q}}^k$ s'annulent sur la surface moyenne pour tout k, et les ordres de dérivation des opérateurs satisfont les relations

$$\deg \widehat{\boldsymbol{V}}^{2p} \leq \begin{pmatrix} 2p & 2p-1 \\ 2p-1 & 2p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \deg \widehat{\boldsymbol{V}}^{2p+1} \leq \begin{pmatrix} 2p & 2p+1 \\ 2p+1 & 2p \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

$$\deg \widehat{\boldsymbol{Q}}^{2p} \leq \begin{pmatrix} 2p-2 & 2p-3 \\ 2p-3 & 2p-2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \deg \widehat{\boldsymbol{Q}}^{2p+1} \leq \begin{pmatrix} 2p-2 & 2p-1 \\ 2p-1 & 2p-2 \end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

$$\deg \widehat{\boldsymbol{A}}^{2p} \leq \begin{pmatrix} 2p+2 & 2p+1 \\ 2p+1 & 2p+2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \deg \widehat{\boldsymbol{A}}^{2p+1} \leq \begin{pmatrix} 2p+2 & 2p+3 \\ 2p+3 & 2p+2 \end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

$$\deg \widehat{\boldsymbol{G}}^{2p} \leq \begin{pmatrix} 2p & 2p-1 \\ 2p-1 & 2p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \deg \widehat{\boldsymbol{G}}^{2p+1} \leq \begin{pmatrix} 2p & 2p+1 \\ 2p+1 & 2p \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Il est facile de montrer que pour toute réduction admissible, on a $\widehat{\boldsymbol{V}}^0 = \mathscr{I}$, $\widehat{\boldsymbol{V}}^1 = \boldsymbol{V}^1$ et

$$\forall \boldsymbol{f}, \qquad \widehat{\boldsymbol{G}}^0(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{G}^0(\boldsymbol{f}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{f}(x_3)\,\mathrm{d}x_3. \tag{2.36}$$

En revanche, il n'y a pas unicité des opérateurs au delà des premiers ordres. En particulier, on verra qu'il y a plusieurs choix possibles pour les opérateurs $\widehat{\boldsymbol{V}}^2$ et $\widehat{\boldsymbol{Q}}^2$ (voir les formules (3.14), (3.15), (3.18) et (3.17) ci-dessous), ce qui montre qu'il existe bien différentes réductions admissibles. On peut mener les calculs de différentes manières conduisant à des réductions distinctes. Néanmoins, on travaillera toujours avec la réduction canonique, dont les expressions des opérateurs jusqu'aux ordres 2 sont données dans la section suivante.

Pour différentes réductions admissibles, il y a unicité de la série formelle $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ à coefficients générateurs 2D associée à une solution 3D par la propriété (ii) du théorème 2.5. Plus généralement, on pourrait définir les *classes de réductions admissibles* liées à un opérateur de projection

$$\boldsymbol{w}[\varepsilon] \mapsto \boldsymbol{z}[\varepsilon]$$

différent de l'opérateur défini en (2.31), et tel que la restriction de cet opérateur aux séries formelles à coefficients générateurs 2D soit l'identité. Soit en effet une famille d'opérateurs

$$\boldsymbol{P}^k : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$$

tel que pour tout $k \geq 0$, on ait

$$\boldsymbol{P}^k \circ \mathscr{I} = \mathbf{Id}_{2\mathrm{D}} : \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0) \to \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0), \tag{2.37}$$

où $\mathbf{Id}_{2\mathrm{D}}$ est l'opérateur identité dans l'espace des générateurs 2D. On peut alors définir un opérateur de projection associé à la série formelle $\boldsymbol{P}[\varepsilon]$ agissant sur l'algèbre des séries formelles à coefficients dans $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ par la relation

$$\boldsymbol{w}[\varepsilon] \mapsto \boldsymbol{z}[\varepsilon] := \boldsymbol{P}[\varepsilon] \otimes \boldsymbol{w}[\varepsilon],$$

où le produit tensoriel de deux séries formelles est simplement le produit terme à terme des coefficients des séries formelles (voir la sous-section 1.1).

On définit alors la *classe de réductions admissibles* associée à $\boldsymbol{P}[\varepsilon]$ comme l'ensemble des quadruplets $\big(\widehat{\boldsymbol{V}}[\varepsilon], \widehat{\boldsymbol{Q}}[\varepsilon], \widehat{\boldsymbol{A}}[\varepsilon], \widehat{\boldsymbol{G}}[\varepsilon]\big)$ satisfaisant la propriété (i) du théorème 2.5 ainsi que la propriété (ii) avec la projection $\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \boldsymbol{P}[\varepsilon] \otimes \boldsymbol{w}[\varepsilon]$ au lieu de l'équation (2.31), et on suppose de plus que les réductions admissibles de cette même classe possèdent les mêmes caractéristiques que les séries formelles du théorème 2.1, excepté les propriétés d'annulation sur la surface moyenne des opérateurs $\widehat{\boldsymbol{V}}^k$ et $\widehat{\boldsymbol{Q}}^k$ qui sont remplacées par les relations :

$$\boldsymbol{P}[\varepsilon] \otimes \widehat{\boldsymbol{V}}[\varepsilon] = \mathbf{Id}_{2\mathrm{D}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{P}[\varepsilon] \otimes \widehat{\boldsymbol{Q}}[\varepsilon] = \mathbf{0}.$$

Pour toute série formelle $\boldsymbol{P}[\varepsilon]$ satisfaisant la propriété (2.37), il existe une classe de réductions admissibles associée. Dans la démonstration du théorème 2.1, on peut en effet prendre comme solution des problèmes de Neumann successifs des solutions $\boldsymbol{v}$ vérifiant $\boldsymbol{P}^k\boldsymbol{v} = 0$ (voir l'équation (2.11)) pour définir les opérateurs $\boldsymbol{V}^k$, et de même pour les opérateurs $\boldsymbol{Q}^k$. On a ainsi dans toute classe de réduction admissible l'existence d'une réduction canonique vérifiant de plus les équations (2.4) et (2.5). On montre aisément que pour toute classe de réduction admissible, on a $\widehat{\boldsymbol{V}}^0 = \mathscr{I}$.

La classe considérée dans le théorème 2.5 consiste à prendre, pour tout $k \geq 0$, $\boldsymbol{P}^k = \boldsymbol{P}^0$ la restriction à la surface moyenne S_0, et les relations précédentes traduisent le fait que $\widehat{\boldsymbol{V}}^0 = \mathscr{I}$ et que les opérateurs $\widehat{\boldsymbol{V}}^k$ pour $k \geq 1$ et $\widehat{\boldsymbol{Q}}^k$ pour tout $k \geq 0$ s'annulent sur la surface moyenne. Dans le cas des plaques (voir [17] et [19]), on prend pour tout $k \geq 0$, $\boldsymbol{P}^k = \boldsymbol{G}^0$ l'opérateur de moyenne sur l'intervalle I défini par la formule (2.36). Les opérateurs $\widehat{\boldsymbol{V}}^k$ pour $k \geq 1$ et $\widehat{\boldsymbol{Q}}^k$ pour tout k sont alors de moyenne nulle sur I.

Enfin, remarquons qu'au sein d'une même classe de réductions admissibles, les générateurs 2D $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ associés à une solution 3D $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ sont les mêmes. Seuls changent les opérateurs intervenant dans les équations (2.29) et (2.30).

3 Etude du développement

Le but de cette section est de calculer les premiers termes des séries formelles du théorème 2.1. On connaît déjà l'opérateur $\boldsymbol{V}^0$ qui s'identifie au plongement canonique $\mathscr{I}$ et l'opérateur $\boldsymbol{V}^1$ donné par l'équation (1.17). L'opérateur $\boldsymbol{G}^0$ est donné par l'équation (2.6). Enfin, les opérateurs $\boldsymbol{Q}^0$ et $\boldsymbol{Q}^1$ sont les opérateurs nuls, tandis que $\boldsymbol{Q}^2$ est donné par l'équation (2.14).

A partir des équations fonctionnelles (2.10) et (2.15), on détermine maintenant les opérateurs $\boldsymbol{V}^\ell$ et $\boldsymbol{Q}^\ell$ pour $\ell = 2$ et 3, $\boldsymbol{A}^0$, $\boldsymbol{A}^\ell$ et $\boldsymbol{G}^\ell$ pour $\ell = 1$ et 2.

Nous verrons que similairement aux plaques, l'expression de l'opérateur $\boldsymbol{A}^0$ fait intervenir le coefficient de Lamé homogénéisé $\widetilde{\lambda}$ défini par

$$\widetilde{\lambda} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}, \tag{3.1}$$

où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont les coefficients de Lamé intervenant dans le tenseur de rigidité 3D. A ce coefficient est associé le tenseur de rigidité bidimensionnel sur la surface moyenne

$$M^{\alpha\beta\sigma\delta} = \widetilde{\lambda} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\delta} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta} a^{\beta\sigma}), \tag{3.2}$$

qui intervient dans la définition des opérateurs 2D de membrane et de flexion analogues à ceux des plaques (voir [17] pour le cas des plaques et [12, 14] pour le cas des coques).

En utilisant le coefficients de Poisson E du matériau et le module d'Young ν (voir les équations (1.4)), on a la relation

$$\widetilde{\lambda} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}.$$

De plus, le coefficient homogénéisé s'écrit en fonction des coefficients p et q grâce aux équations

$$\widetilde{\lambda} = 2\mu p = \lambda q.$$

3.1 Opérateur de membrane

Dans cette sous-section on détermine les opérateurs $\boldsymbol{A}^0$ et $\boldsymbol{V}^2$.

Pour $n = 2$ les équations (2.9) s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{L}^0\boldsymbol{V}^2 + \boldsymbol{L}^1\boldsymbol{V}^1 + \boldsymbol{L}^2\boldsymbol{V}^0 & = & -\mathscr{I}\boldsymbol{A}^0, \\ \boldsymbol{B}^0\boldsymbol{V}^2 + \boldsymbol{B}^1\boldsymbol{V}^1 + \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{V}^0 & = & 0. \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Rappelons que d'après l'équation (4.13) du chapitre II, on a

$$\begin{aligned} L^2_\sigma(\boldsymbol{w}) = {} & -\mu x_3 c^\alpha_\alpha \partial_3 w_\sigma + \mu x_3 b^\alpha_\alpha b^\beta_\sigma \partial_3 w_\beta - \mu b^\alpha_\alpha \mathrm{D}_\sigma w_3 - \mu b^\beta_\beta b^\alpha_\sigma w_\alpha + \lambda \mathrm{D}_\sigma \gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{w}) \\ & + 2\mu \mathrm{D}_\alpha \gamma^\alpha_\sigma(\boldsymbol{w}), \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$L^2_3(\boldsymbol{w}) = -\mu x_3 c^\alpha_\alpha \partial_3 w_3 + (\lambda+\mu) b^\beta_\alpha \gamma^\alpha_\beta\big(\partial_3(x_3\boldsymbol{w})\big) + \mu b^\beta_\alpha \gamma^\alpha_\beta(\boldsymbol{w}) + \mu \mathrm{D}^\alpha \theta_\alpha(\boldsymbol{w}).$$

De plus, les équations (4.17) et (4.18) du chapitre II montrent que

$$\begin{array}{rcl} B^2_\sigma(\boldsymbol{w}) & = & 0, \\ B^2_3(\boldsymbol{w}) & = & x_3 \lambda b^\alpha_\beta \gamma^\beta_\alpha(\boldsymbol{w})\big|_{\Gamma_\pm}. \end{array} \tag{3.5}$$

Rappelons qu'on a $\theta_\sigma(\boldsymbol{w}) = \mathrm{D}_\sigma w_3 + b_\sigma^\alpha w_\alpha$ et $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha w_\beta + \mathrm{D}_\beta w_\alpha) - b_{\alpha\beta} w_3$. En utilisant les équations (1.12) et (1.17) donnant les expressions des opérateurs $\boldsymbol{L}^1$ et $\boldsymbol{V}^1$, on calcule alors que pour $\boldsymbol{z}$ un générateur 2D, on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_\sigma^1(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z}) & = & \mu b_\alpha^\alpha \theta_\sigma(\boldsymbol{z}) - (\lambda+\mu) p \mathrm{D}_\sigma \gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}), \\ L_3^1(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z}) & = & (\lambda+2\mu) p b_\alpha^\alpha \gamma_\beta^\beta(\boldsymbol{z}) - (\lambda+\mu)\mathrm{D}^\alpha \theta_\alpha(\boldsymbol{z}), \end{array}\right. \tag{3.6}$$

en utilisant le fait que $\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z}) = x_3 b_\alpha^\alpha \gamma_\beta^\beta(\boldsymbol{z}) - x_3 \mathrm{D}^\alpha \theta_\alpha(\boldsymbol{z})$. De plus, d'après l'équation (1.13), on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} B_\sigma^1(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z}) & = & -x_3 \mu p \mathrm{D}_\sigma \gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm}, \\ B_3^1(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z}) & = & x_3 \lambda p b_\alpha^\alpha \gamma_\beta^\beta(\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm} - x_3 \lambda \mathrm{D}^\alpha \theta_\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm}. \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Enfin, d'après les équations (3.4) et (3.5), on trouve

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_\sigma^2(\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z}) & = & -\mu b_\alpha^\alpha \theta_\sigma(\boldsymbol{z}) + \lambda \mathrm{D}_\sigma \gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) + 2\mu \mathrm{D}_\alpha \gamma_\sigma^\alpha(\boldsymbol{z}), \\ L_3^2(\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z}) & = & (\lambda+2\mu) b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{z}) + \mu \mathrm{D}^\alpha \theta_\alpha(\boldsymbol{z}), \end{array}\right. \tag{3.8}$$

et d'après l'équation (3.5), on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} B_\sigma^2(\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z}) & = & 0, \\ B_3^2(\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z}) & = & x_3 \lambda b_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta(\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm}. \end{array}\right. \tag{3.9}$$

En groupant les calculs précédent et en utilisant l'expression de $\boldsymbol{L}^0$ et de $\boldsymbol{B}^0$, on trouve que la composante transverse de l'équation (3.3) s'écrit encore, pour tout $\boldsymbol{z}$ générateur 2D

$$\left\{\begin{array}{l} (\lambda+2\mu)\partial_{33} V_3^2 \boldsymbol{z} + (\lambda+2\mu) p b_\alpha^\alpha \gamma_\beta^\beta(\boldsymbol{z}) + (\lambda+2\mu) b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{z}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \lambda \mathrm{D}^\alpha \theta_\alpha(\boldsymbol{z}) = -A_3^0 \boldsymbol{z} \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ (\lambda+2\mu)\partial_3 V_3^2 \boldsymbol{z} + x_3 \lambda p b_\alpha^\alpha \gamma_\beta^\beta(\boldsymbol{z}) - x_3 \lambda \mathrm{D}^\alpha \theta_\alpha(\boldsymbol{z}) + x_3 \lambda b_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta(\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \end{array}\right. \tag{3.10}$$

La formule (2.12) obtenue en écrivant la condition de compatibilité du problème de Neumann constitué par les équations précédentes montre alors que

$$2A_3^0 \boldsymbol{z} = -4\mu p b_\alpha^\alpha \gamma_\beta^\beta(\boldsymbol{z}) - 4\mu b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{z}).$$

Or on a $2\mu p = \widetilde{\lambda}$, et on en déduit donc que

$$A_3^0 = -\widetilde{\lambda} b_\alpha^\alpha \gamma_\beta^\beta - 2\mu b_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta.$$

De même, les composantes surfaciques des équations (3.3) s'écrivent

$$\begin{cases} \mu\partial_{33}V_\sigma^2\boldsymbol{z} - \mu p \mathrm{D}_\sigma\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) + \lambda(1-p)\mathrm{D}_\sigma\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) + 2\mu\mathrm{D}_\alpha\gamma_\sigma^\alpha(\boldsymbol{z}) = -A_\sigma^2\boldsymbol{z} \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \mu\partial_3 V_\sigma^2\boldsymbol{z} - x_3\mu p\mathrm{D}_\sigma\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \end{cases} \tag{3.11}$$

La condition de compatibilité de ce problème montre alors que

$$2A_\sigma^0 = -2\lambda(1-p)\mathrm{D}_\sigma\gamma_\alpha^\alpha - 4\mu\mathrm{D}_\alpha\gamma_\sigma^\alpha.$$

soit encore, grâce à l'équation $\lambda(1-p) = \widetilde{\lambda}$,

$$A_\sigma^0 = -\widetilde{\lambda}\mathrm{D}_\sigma\gamma_\alpha^\alpha - 2\mu\mathrm{D}_\alpha\gamma_\sigma^\alpha.$$

En raison de l'importance du rôle de cet opérateur, on pose la

Définition 3.1 On appelle *opérateur de membrane* l'opérateur 2D noté $\boldsymbol{M}$, à valeurs dans $\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)$, défini par

$$\begin{cases} M_\sigma := -\widetilde{\lambda}\mathrm{D}_\sigma\gamma_\alpha^\alpha - 2\mu\mathrm{D}_\alpha\gamma_\sigma^\alpha, \\ M_3 := -\widetilde{\lambda}b_\alpha^\alpha\gamma_\beta^\beta - 2\mu b_\beta^\alpha\gamma_\alpha^\beta. \end{cases} \tag{3.12}$$

■

L'opérateur de membrane est le premier opérateur qui apparaît dans la "théorie des coques" dont le but général est d'approcher la solution des équations de l'élasticité tridimensionnelle par la solution d'un problème bidimensionnel posé sur la surface moyenne. On peut le retrouver par des raisonnements mécaniques et énergétiques sous les hypothèses de Kirchhoff-Love (voir par exemple [30] ainsi que [34]). Mais on le retrouve aussi comme premier terme du développement formel effectué dans [33], et il est aussi la composante d'ordre 0 de tous les modèles du type Koiter (voir [35] et [6] ainsi que le chapitre IV).

L'opérateur 2D de membrane, $\boldsymbol{M}$, est associé à la forme bilinéaire

$$a_0(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}') = \int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\gamma_{\sigma\delta}(\boldsymbol{z}')\,\mathrm{d}S, \tag{3.13}$$

où $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{z}'$ sont des couples de champs de 1-formes surfaciques sur S_0 et de fonctions sur S_0 et où le tenseur $M^{\alpha\beta\sigma\delta}$ est défini par l'équation (3.2).

Lorsque $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{z}'$ sont suffisamment régulières et vérifient des conditions de Dirichlet $z_\alpha = z'_\alpha = 0$ sur ∂S, alors on passe de l'équation (3.12) à l'équation (3.13) par intégration par partie.

En fait, les calculs précédents montrent qu'il y a unicité du premier terme de la série formelle $\widehat{\boldsymbol{A}}[\varepsilon]$ d'une réduction admissible. On a le résultat suivant :

Proposition 3.2 *L'opérateur* $\boldsymbol{A}^0$ *premier terme de la série formelle* $\boldsymbol{A}[\varepsilon]$ *intervenant dans la réduction canonique est égal à l'opérateur de membrane, soit* $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{M}$ *. De plus, si* $\big(\widehat{\boldsymbol{V}}[\varepsilon], \widehat{\boldsymbol{Q}}[\varepsilon], \widehat{\boldsymbol{A}}[\varepsilon], \widehat{\boldsymbol{G}}[\varepsilon]\big)$ *est une réduction admissible, alors on a encore* $\widehat{\boldsymbol{A}}^0 = \boldsymbol{M}$ *.*

Remarque 3.3 En utilisant la notation 2.2, les ordres de l'opérateur $\boldsymbol{M}$ sont

$$\deg \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces ordres sont inférieurs aux ordres maximaux qui apparaissent dans le théorème 2.5 car l'opérateur M_3 n'est pas d'ordre 2 en z_3. ∎

Notons d'autre part que pour toute réduction admissible, la première équation du problème réduit (2.29) s'écrit nécessairement

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{z}^0) = \boldsymbol{G}^0(\boldsymbol{f}^0),$$

où $\boldsymbol{z}^0$ et $\boldsymbol{f}^0$ sont les premiers termes des séries formelles $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$.

Calculons maintenant à l'aide des équations (3.10) et (3.11) l'expression de l'opérateur $\boldsymbol{V}^2$, et commençons par la composante transverse. On utilise le fait que $A_3^0 = M_3$ et on rappelle que $\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha\theta_\beta + \mathrm{D}_\beta\theta_\alpha)$. On intègre alors l'équation à l'intérieur de (3.10) entre -1 et x_3 en utilisant la condition sur Γ_-, et on trouve

$$\begin{aligned}(\lambda{+}2\mu)\partial_3 V_3^2\boldsymbol{z} + (x_3{+}1)(\lambda{+}2\mu)pb_\alpha^\alpha\gamma_\beta^\beta(\boldsymbol{z}) + (x_3{+}1)(\lambda{+}2\mu)b_\alpha^\beta\gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{z}) - (x_3{+}1)\lambda\kappa_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z})\\ + (x_3+1)M_3^0\boldsymbol{z} - \lambda pb_\alpha^\alpha\gamma_\beta^\beta(\boldsymbol{z}) + \lambda\kappa_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) - \lambda b_\beta^\alpha\gamma_\alpha^\beta(\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega,\end{aligned}$$

d'où en utilisant le fait que $M_3(\boldsymbol{z}) = -2\mu pb_\alpha^\alpha\gamma_\beta^\beta(\boldsymbol{z}) - 2\mu b_\alpha^\beta\gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{z})$,

$$(\lambda + 2\mu)\partial_3 V_3^2\boldsymbol{z} = \big[x_3\lambda\kappa_\alpha^\alpha - x_3\lambda pb_\alpha^\alpha\gamma_\beta^\beta - x_3\lambda b_\beta^\alpha\gamma_\alpha^\beta\big](\boldsymbol{z}).$$

On trouve donc que la composante transverse de l'opérateur $\boldsymbol{V}^2$ s'écrit

$$V_3^2 = \frac{x_3^2}{2}\left[p\kappa_\alpha^\alpha + \frac{p}{2\mu}M_3\right]. \tag{3.14}$$

D'autre part, compte tenu du fait que

$$A_\sigma^0(\boldsymbol{z}) = M_\sigma^0(\boldsymbol{z}) = -\lambda(1-p)\mathrm{D}_\sigma\gamma_\alpha^\alpha - 2\mu\mathrm{D}_\alpha\gamma_\sigma^\alpha,$$

l'équation (3.11) s'écrit encore

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mu\partial_{33}V_\sigma^2\boldsymbol{z} - \mu p\mathrm{D}_\sigma\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) & = & 0 \quad \text{dans} \quad \Omega,\\ \mu\partial_3 V_\sigma^2\boldsymbol{z} - x_3\mu p\mathrm{D}_\sigma\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \end{array}\right.$$

En intégrant les équations à l'intérieur entre -1 et x_3 et en utilisant la condition sur Γ_- , on trouve alors aisément que

$$\partial_3 V^2_\sigma \boldsymbol{z} = x_3 p \mathrm{D}_\sigma \gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z})$$

d'où

$$V^2_\sigma = \frac{x_3^2}{2}\, p \mathrm{D}_\sigma \gamma^\alpha_\alpha. \tag{3.15}$$

En définitive, l'opérateur $\boldsymbol{V}^2$ de la réduction canonique s'écrit

$$\boldsymbol{V}^2(\boldsymbol{z}) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x_3^2}{2} p \mathrm{D}_\sigma \gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}), \\ \dfrac{x_3^2}{2}\big(p\kappa^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}) + \dfrac{p}{2\mu} M_3(\boldsymbol{z})\big). \end{array} \right. \tag{3.16}$$

Remarque 3.4 Rappelons que l'opérateur $\boldsymbol{Q}^2$ s'écrit (voir l'équation (2.14))

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Q^2_3 \boldsymbol{f} & = & \frac{p}{\lambda}\int_0^{x_3} \big(\int_{-1}^u (G^0_3(\boldsymbol{f}) - f_3)(t)\,\mathrm{d}t\big)\,\mathrm{d}u, \\ Q^2_\sigma \boldsymbol{f} & = & \frac{1}{\mu}\int_0^{x_3} \big(\int_{-1}^u (G^0_\sigma(\boldsymbol{f}) - f_\sigma)(t)\,\mathrm{d}t\big)\,\mathrm{d}u. \end{array} \right.$$

Néanmoins, on pourrait définir l'opérateur $\widehat{\boldsymbol{Q}}^2$ par l'équation plus simple

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \widehat{Q}^2_3 \boldsymbol{f} & = & -\frac{p}{\lambda}\int_0^{x_3} \big(\int_{-1}^u f_3(t)\,\mathrm{d}t\big)\,\mathrm{d}u, \\ \widehat{Q}^2_\sigma \boldsymbol{f} & = & -\frac{1}{\mu}\int_0^{x_3} \big(\int_{-1}^u f_\sigma(t)\,\mathrm{d}t\big)\,\mathrm{d}u. \end{array} \right. \tag{3.17}$$

Si les premiers termes des séries formelles $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ vérifient $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{z}^0) = \boldsymbol{G}^0(\boldsymbol{f}^0)$, alors on voit que si on pose

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \widehat{V}^2_3 & = & \frac{x_3^2}{2}\Big[p\kappa^\alpha_\alpha + \frac{p}{2\mu}M_3\Big] + \frac{p}{\lambda}\Big(\frac{x_3^2}{2} + x_3\Big) M_3, \\ \widehat{V}^2_\sigma & = & \frac{x_3^2}{2}\, p\mathrm{D}_\sigma\gamma^\alpha_\alpha + \frac{1}{\mu}\Big(\frac{x_3^2}{2} + x_3\Big) M_\sigma, \end{array} \right. \tag{3.18}$$

les termes

$$\boldsymbol{V}^2(\boldsymbol{z}^0) + \boldsymbol{Q}^2(\boldsymbol{f}^0) \quad \text{et} \quad \widehat{\boldsymbol{V}}^2(\boldsymbol{z}^0) + \widehat{\boldsymbol{Q}}^2(\boldsymbol{f}^0)$$

sont identiques. Ceci signifie donc que les opérateurs $\widehat{V}^2_3$ et $\widehat{Q}^2_3$ font partie d'une réduction admissible différente de la réduction canonique. Ainsi, on voit qu'il n'y a plus unicité des opérateurs vérifiant le théorème 2.5. Néanmoins, on utilise toujours dans la suite les opérateurs de la réduction canonique. ■

Dans la suite de cette section, nous étudions successivement les opérateur $\boldsymbol{A}^1$ et $\boldsymbol{V}^3$ (sous-section 3.2), puis l'opérateur $\boldsymbol{A}^2$ (sous-section 3.3). Enfin, nous étudions les opérateurs $\boldsymbol{G}^1$, $\boldsymbol{Q}^3$ et $\boldsymbol{G}^2$ dans la sous-section 3.4.

3.2 Opérateur réduit au rang un

Le but est maintenant de déterminer les opérateurs $\boldsymbol{A}^1$ et $\boldsymbol{G}^1$ de la réduction canonique.

Pour $n = 3$, les équations (2.9) s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{L}^0\boldsymbol{V}^3 + \boldsymbol{L}^1\boldsymbol{V}^2 + \boldsymbol{L}^2\boldsymbol{V}^1 + \boldsymbol{L}^3\boldsymbol{V}^0 & = & -\mathscr{I}\boldsymbol{A}^1, \\ \boldsymbol{B}^0\boldsymbol{V}^3 + \boldsymbol{B}^1\boldsymbol{V}^2 + \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{V}^1 + \boldsymbol{B}^3\boldsymbol{V}^0 & = & 0. \end{array}\right. \tag{3.19}$$

La formule (4.16) du chapitre II pour $k = 1$ montre que

$$\big(\tilde{\gamma}^\alpha_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^1 = x_3 b^\alpha_\delta \gamma^\delta_\sigma(\boldsymbol{w}) + x_3 \Lambda^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\sigma}(\boldsymbol{w}), \tag{3.20}$$

où on rappelle qu'on a

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) = \tfrac{1}{2}\big(b^\sigma_\alpha \mathrm{D}_\sigma v_\beta - b^\sigma_\beta \mathrm{D}_\alpha v_\sigma\big) = \mathrm{Ab}(\gamma)_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) - \mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}), \tag{3.21}$$

où

$$\mathrm{Ab}(\gamma)_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(b^\sigma_\alpha \gamma_{\beta\sigma} - b^\sigma_\beta \gamma_{\alpha\sigma}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(b^\sigma_\alpha \omega_{\beta\sigma} + b^\sigma_\beta \omega_{\alpha\sigma}).$$

L'équation (4.14) du chapitre II montre alors, en utilisant le fait que $N^1_\sigma(\boldsymbol{w}) = \theta_\sigma(\boldsymbol{w}) - x_3 b^\alpha_\sigma \partial_3 w_\alpha$, qu'on a

$$\begin{aligned} L^3_\sigma(\boldsymbol{w}) = & -\mu x_3^2 (b^3)^\alpha_\alpha \partial_3 w_\sigma - \mu x_3 c^\alpha_\alpha \theta_\sigma(\boldsymbol{w}) + \mu x_3^2 c^\alpha_\alpha b^\alpha_\sigma \partial_3 w_\alpha + \lambda \mathrm{D}_\sigma b^\alpha_\beta \gamma^\beta_\alpha(x_3\boldsymbol{w}) \\ & + 2\mu x_3 \mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta \gamma^\delta_\sigma(\boldsymbol{w}) + 2\mu x_3 \mathrm{D}_\alpha \Lambda^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\sigma}(\boldsymbol{w}) + 2\mu x_3 \gamma^\alpha_\nu(\boldsymbol{w}) \mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma - 2\mu x_3 \gamma^\delta_\sigma(\boldsymbol{w}) \mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta, \end{aligned} \tag{3.22}$$

tandis que la composante transverse de l'opérateur $\boldsymbol{L}^3$ s'écrit d'après l'équation (4.15) du chapitre II,

$$\begin{aligned} L^3_3(\boldsymbol{w}) = & -\mu x_3^2 (b^3)^\alpha_\alpha \partial_3 w_3 + (\lambda+\mu) c^\alpha_\beta \gamma^\beta_\alpha\big(\partial_3(x_3^2\boldsymbol{w})\big) + 2\mu c^\alpha_\beta \gamma^\beta_\alpha(x_3\boldsymbol{w}) + \mu \mathrm{D}^\alpha b^\beta_\alpha \theta_\beta(x_3\boldsymbol{w}) \\ & + \mu b^\delta_\alpha \mathrm{D}^\alpha \theta_\delta(x_3\boldsymbol{w}). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Enfin, les équations (4.17) et (4.18) du chapitre II montrent que

$$\begin{array}{rcl} B^3_\sigma(\boldsymbol{w}) & = & 0, \\ B^3_3(\boldsymbol{w}) & = & \lambda c^\alpha_\beta \gamma^\beta_\alpha(x_3^2\boldsymbol{w})\big|_{\Gamma_\pm}. \end{array} \tag{3.24}$$

Soit alors $\boldsymbol{z}$ un générateur 2D. D'après les équations (1.12) et (3.16) donnant les expressions des opérateurs $\boldsymbol{L}^1$ et $\boldsymbol{V}^2$, on calcule que

$$\begin{cases} L^1_\sigma(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z}) = -x_3\mu p b^\alpha_\alpha \mathrm{D}_\sigma\gamma^\delta_\delta(\boldsymbol{z}) + x_3(\lambda+\mu)p\mathrm{D}_\sigma\kappa^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}) + x_3(\lambda+\mu)\frac{p}{2\mu}\mathrm{D}_\sigma M_3(\boldsymbol{z}) \\ \qquad\qquad - x_3\mu p b^\alpha_\sigma \mathrm{D}_\alpha\gamma^\delta_\delta(\boldsymbol{z}), \\ L^1_3(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z}) = -x_3(\lambda+2\mu)p b^\alpha_\alpha\kappa^\delta_\delta(\boldsymbol{z}) - x_3(\lambda+2\mu)\frac{p}{2\mu}b^\alpha_\alpha M_3(\boldsymbol{z}) \\ \qquad\qquad + x_3(\lambda+\mu)p\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma^\delta_\delta(\boldsymbol{z}). \end{cases} \tag{3.25}$$

De même, en utilisant l'équation (1.13), on trouve

$$\begin{cases} B^1_\sigma(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z}) = \frac{x_3^2}{2}\mu p\mathrm{D}_\sigma\kappa^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm} + \frac{x_3^2}{2}\frac{p}{2}\mathrm{D}_\sigma M_3(\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm} - \frac{x_3^2}{2}\mu p b^\alpha_\sigma\mathrm{D}_\alpha\gamma^\nu_\nu(\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm}, \\ B^1_3(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z}) = \frac{x_3^2}{2}\lambda p\mathrm{D}^\sigma\mathrm{D}_\sigma\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm} - \frac{x_3^2}{2}\lambda p b^\nu_\nu\kappa^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm} - \frac{x_3^2}{2}\lambda\frac{p}{2\mu}b^\alpha_\alpha M_3(\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm}. \end{cases} \tag{3.26}$$

D'autre part, l'équation (3.4) de l'opérateur $\boldsymbol{L}^2$ et l'expression (1.17) de l'opérateur $\boldsymbol{V}^1$ montrent que

$$\begin{aligned} L^2_\sigma(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z}) &= \mu x_3 c^\alpha_\alpha\theta_\sigma(\boldsymbol{z}) - \mu x_3 b^\alpha_\alpha b^\beta_\sigma\theta_\beta(\boldsymbol{z}) + \mu x_3 p b^\alpha_\alpha\mathrm{D}_\sigma\gamma^\nu_\nu(\boldsymbol{z}) + \mu x_3 b^\beta_\beta b^\alpha_\sigma\theta_\alpha(\boldsymbol{z}) \\ &- x_3\lambda\mathrm{D}_\sigma\kappa^\alpha_\alpha(\boldsymbol{z}) + \lambda p x_3\mathrm{D}_\sigma b^\alpha_\alpha\gamma^\nu_\nu(\boldsymbol{z}) - 2\mu x_3\mathrm{D}_\alpha\kappa^\alpha_\sigma(\boldsymbol{z}) + 2\mu p x_3\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\sigma\gamma^\nu_\nu(\boldsymbol{z}) \end{aligned} \tag{3.27}$$

et

$$\begin{aligned} L^2_3(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z}) &= \mu p x_3 c^\alpha_\alpha\gamma^\nu_\nu(\boldsymbol{z}) - (2\lambda+3\mu)x_3 b^\beta_\alpha\kappa^\alpha_\beta(\boldsymbol{z}) + (2\lambda+3\mu)p x_3 c^\alpha_\alpha\gamma^\nu_\nu(\boldsymbol{z}) \\ &- x_3\mu p\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma^\nu_\nu(\boldsymbol{z}) - x_3\mu\mathrm{D}^\alpha b^\nu_\alpha\theta_\nu(\boldsymbol{z}). \end{aligned} \tag{3.28}$$

De même, on grâce à l'équation (3.5), on trouve que

$$\begin{cases} B^2_\sigma(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z}) = 0, \\ B^2_3(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z}) = -x_3^2\lambda b^\alpha_\beta\kappa^\beta_\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm} + x_3^2\lambda p c^\alpha_\alpha\gamma^\nu_\nu(\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm}. \end{cases} \tag{3.29}$$

Enfin, les équations (3.22) et (3.23) montrent que

$$\begin{aligned} L^3_\sigma(\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z}) &= -\mu x_3 c^\alpha_\alpha\theta_\sigma(\boldsymbol{z}) + x_3\lambda\mathrm{D}_\sigma b^\alpha_\beta\gamma^\beta_\alpha(\boldsymbol{z}) + 2\mu x_3\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta\gamma^\delta_\sigma(\boldsymbol{z}) + 2\mu x_3\mathrm{D}_\alpha\Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma}(\boldsymbol{z}) \\ &+ 2\mu x_3\gamma^\alpha_\nu(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma - 2\mu x_3\gamma^\delta_\sigma(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta, \end{aligned} \tag{3.30}$$

et

$$L_3^3(\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z}) = 2(\lambda+2\mu)x_3c_\beta^\alpha\gamma_\alpha^\beta(\boldsymbol{z}) + \mu x_3\mathrm{D}^\alpha b_\alpha^\beta\theta_\beta(\boldsymbol{z}) + \mu x_3 b_\alpha^\delta\mathrm{D}^\alpha\theta_\delta(\boldsymbol{z}), \tag{3.31}$$

tandis que l'équation (3.24) montre que

$$\left\{\begin{array}{rcl} B_\sigma^3(\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z}) & = & 0, \\ B_3^3(\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z}) & = & x_3^2\lambda c_\alpha^\beta\gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm}. \end{array}\right. \tag{3.32}$$

D'après l'équation (2.12), l'opérateur $\boldsymbol{A}^1$ est défini par la formule

$$2\boldsymbol{A}^1\boldsymbol{z} = -\int_{-1}^1 \Big(\boldsymbol{L}^1\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z} + \boldsymbol{L}^2\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z} + \boldsymbol{L}^3\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z}\Big)\mathrm{d}x_3 \\ + \Big[\boldsymbol{B}^1\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}^3\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z}\Big]_{-1}^{+1},$$

pour tout générateur 2D $\boldsymbol{z}$. Or tous les termes figurant dans les expressions $\boldsymbol{L}^1\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{L}^3\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z}$ sont des facteurs de x_3. On en déduit donc que l'intégrale du membre de droite de l'équation s'annule. De même, les termes de bords s'annulent aussi car ceux-ci sont des facteurs de x_3^2. Ainsi, on en déduit l'équation

$$\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{0}. \tag{3.33}$$

Calculons maintenant l'expression de l'opérateur $\boldsymbol{V}^3$. Avant cela, on remarque que le but de ce chapitre est de donner l'expression de l'opérateur $\boldsymbol{A}^2$ de la réduction canonique. Or dans le calcul de cet opérateur, la formule (2.12) montre que $\boldsymbol{V}^3$ n'intervient qu'à travers le calcul du terme

$$-\int_{-1}^1 \boldsymbol{L}^1\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}x_3 + \Big[\boldsymbol{B}^1\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z}\Big]_{-1}^{+1}.$$

D'après l'équation (1.12) on peut écrire l'opérateur $\boldsymbol{L}^1$ sous la forme

$$\begin{array}{rcl} L_\sigma^1(\boldsymbol{w}) & = & -\mu b_\alpha^\alpha\partial_3 w_\sigma + \lambda\mathrm{D}_\sigma\partial_3 w_3 + \mu\partial_3\theta_\sigma(\boldsymbol{w}) - \mu b_\sigma^\alpha\partial_3(x_3\partial_3 w_\alpha), \\ L_3^1(\boldsymbol{w}) & = & -\mu b_\alpha^\alpha\partial_3 w_3 + (\lambda+\mu)\gamma_\alpha^\alpha(\partial_3\boldsymbol{w}). \end{array}$$

Ainsi, en utilisant l'équation (1.13) donnant l'expression de l'opérateur $\boldsymbol{B}^1$, on voit que pour tout $\boldsymbol{z}$, on a

$$-\int_{-1}^1 L_\sigma^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \Big[B_\sigma^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\Big]_{-1}^{+1} = \mu b_\alpha^\alpha[V_\sigma^3\boldsymbol{z}]_{-1}^{+1} - \lambda\mathrm{D}_\sigma[V_3^3\boldsymbol{z}]_{-1}^{+1}, \tag{3.34}$$

et

$$-\int_{-1}^{1} L_3^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \Big[B_3^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\Big]_{-1}^{+1} = 2\mu b_\alpha^\alpha [V_3^3\boldsymbol{z}]_{-1}^{+1} - \mu \mathrm{D}^\alpha [V_\alpha^3 \boldsymbol{z}]_{-1}^{+1}. \tag{3.35}$$

Ainsi, on voit qu'il est suffisant de calculer $[\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z}]_{-1}^{+1}$.

D'après les formules précédentes, les composantes surfaciques des équations (3.19) s'écrivent

$$\begin{aligned}
\mu\partial_{33}V_\sigma^3\boldsymbol{z} + x_3\big[&-\mu p b_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma\gamma_\delta^\delta + (\lambda+\mu)p\mathrm{D}_\sigma\kappa_\alpha^\alpha + (\lambda+\mu)\tfrac{p}{2\mu}\mathrm{D}_\sigma M_3 - \mu p b_\sigma^\alpha \mathrm{D}_\alpha\gamma_\delta^\delta \\
&+ \mu c_\alpha^\alpha\theta_\sigma - \mu b_\alpha^\alpha b_\sigma^\beta\theta_\beta + \mu p b_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma\gamma_\nu^\nu + \mu b_\beta^\beta b_\sigma^\alpha\theta_\alpha - \lambda\mathrm{D}_\sigma\kappa_\alpha^\alpha + \lambda p\mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha\gamma_\nu^\nu \\
&- 2\mu\mathrm{D}_\alpha\kappa_\sigma^\alpha + 2\mu p\mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\alpha\gamma_\nu^\nu - \mu c_\alpha^\alpha\theta_\sigma + \lambda\mathrm{D}_\sigma b_\beta^\alpha\gamma_\alpha^\beta + 2\mu\mathrm{D}_\alpha b_\delta^\alpha\gamma_\sigma^\delta + 2\mu\mathrm{D}_\alpha\Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma} \\
&+ 2\mu\gamma_\nu^\alpha\mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\nu - 2\mu\gamma_\sigma^\delta\mathrm{D}_\alpha b_\delta^\alpha\big](\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega,
\end{aligned}$$

$$\mu\partial_3V_\sigma^3\boldsymbol{z} + \tfrac{x_3^2}{2}\big[\mu p\mathrm{D}_\sigma\kappa_\alpha^\alpha + \tfrac{p}{2}\mathrm{D}_\sigma M_3 - \mu p b_\sigma^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma_\nu^\nu\big](\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm.$$

Compte tenu du fait que

$$2\mu\mathrm{D}_\alpha b_\delta^\alpha\gamma_\sigma^\delta = 2\mu b_\delta^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma_\sigma^\delta + 2\mu\gamma_\sigma^\alpha\mathrm{D}_\alpha b_\delta^\alpha,$$

le système précédent s'écrit encore

$$\begin{aligned}
\mu\partial_{33}V_\sigma^3\boldsymbol{z} = x_3\big[&-\mu p\mathrm{D}_\sigma\kappa_\alpha^\alpha - \tfrac{p}{2}\mathrm{D}_\sigma M_3 + \mu p b_\sigma^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma_\nu^\nu + \lambda(1-p)\mathrm{D}_\sigma\kappa_\alpha^\alpha + 2\mu\mathrm{D}_\alpha\kappa_\sigma^\alpha \\
&- \tfrac{\lambda p}{2\mu}\mathrm{D}_\sigma M_3 - \lambda p\mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha\gamma_\nu^\nu - 2\mu p\mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\alpha\gamma_\nu^\nu - \lambda\mathrm{D}_\sigma b_\beta^\alpha\gamma_\alpha^\beta - 2\mu b_\delta^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma_\sigma^\delta \\
&- 2\mu\mathrm{D}_\alpha\Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma} - 2\mu\gamma_\nu^\alpha\mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\nu\big](\boldsymbol{z}) \quad \text{dans} \quad \Omega,
\end{aligned}$$

$$\mu\partial_3V_\sigma^3\boldsymbol{z} = \tfrac{x_3^2}{2}\big[-\mu p\mathrm{D}_\sigma\kappa_\alpha^\alpha - \tfrac{p}{2}\mathrm{D}_\sigma M_3 + \mu p b_\sigma^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma_\nu^\nu\big](\boldsymbol{z}) \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm. \tag{3.36}$$

Mais on rappelle que $M_3 = -2\mu p b_\alpha^\alpha\gamma_\nu^\nu - 2\mu b_\alpha^\beta\gamma_\beta^\alpha$, et donc dans l'équation précédente on a

$$-\tfrac{\lambda p}{2\mu}\mathrm{D}_\sigma M_3 - \lambda p\mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha\gamma_\nu^\nu - \lambda\mathrm{D}_\sigma b_\beta^\alpha\gamma_\alpha^\beta = \tfrac{\lambda(1-p)}{2\mu}\mathrm{D}_\sigma M_3 = p\mathrm{D}_\sigma M_3,$$

en vertu de la formule $\lambda(1-p) = \lambda q = 2\mu p$. Les équations (3.36) s'écrivent donc encore

$$\begin{aligned}
\partial_{33}V_\sigma^3\boldsymbol{z} = x_3\big[&-p\mathrm{D}_\sigma\kappa_\alpha^\alpha - \tfrac{p}{2\mu}\mathrm{D}_\sigma M_3 + p b_\sigma^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma_\nu^\nu + 2p\mathrm{D}_\sigma\kappa_\alpha^\alpha + 2\mathrm{D}_\alpha\kappa_\sigma^\alpha \\
&+ \tfrac{p}{\mu}\mathrm{D}_\sigma M_3 - 2p\mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\alpha\gamma_\nu^\nu - 2b_\delta^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma_\sigma^\delta - 2\mathrm{D}_\alpha\Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma} - 2\gamma_\nu^\alpha\mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\nu\big](\boldsymbol{z}) \quad \text{dans} \quad \Omega,
\end{aligned}$$

$$\partial_3V_\sigma^3\boldsymbol{z} = \tfrac{x_3^2}{2}\big[-p\mathrm{D}_\sigma\kappa_\alpha^\alpha - \tfrac{p}{2\mu}\mathrm{D}_\sigma M_3 + p b_\sigma^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma_\nu^\nu\big](\boldsymbol{z}) \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm.$$

En intégrant alors les équations précédentes entre -1 et x_3 et en utilisant la condition sur Γ_-, on trouve que

$$\begin{aligned}\partial_3 V^3_\sigma \boldsymbol{z} = \tfrac{x_3^2}{2}\big[-p\mathrm{D}_\sigma\kappa^\nu_\nu + pb^\alpha_\sigma\mathrm{D}_\alpha\gamma^\nu_\nu - \tfrac{p}{2\mu}\mathrm{D}_\sigma M_3\big](\boldsymbol{z}) + (\tfrac{x_3^2}{2}-\tfrac{1}{2})\big[2\mathrm{D}_\alpha\kappa^\alpha_\sigma + 2p\mathrm{D}_\sigma\kappa^\nu_\nu \\ + \tfrac{p}{\mu}\mathrm{D}_\sigma M_3 - 2p\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\sigma\gamma^\nu_\nu - 2b^\alpha_\nu\mathrm{D}_\alpha\gamma^\nu_\sigma - 2\gamma^\alpha_\nu\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma - 2\mathrm{D}_\alpha\Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma}\big](\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

On pourrait déduire de cette expression l'opérateur V^3_σ en intégrant simplement cette équation entre 0 et x_3. En intégrant entre -1 et $+1$, et en utilisant le fait que $\int_{-1}^{1}\frac{x_3^2}{2}\,\mathrm{d}x_3 = \frac{1}{3}$, on trouve finalement que pour tout $\boldsymbol{z}$, on a

$$\begin{aligned}[V^3_\sigma \boldsymbol{z}]^{+1}_{-1} = \big[-\tfrac{5}{3}p\mathrm{D}_\sigma\kappa^\nu_\nu - \tfrac{4}{3}\mathrm{D}_\alpha\kappa^\alpha_\sigma - \tfrac{5p}{6\mu}\mathrm{D}_\sigma M_3 + \tfrac{p}{3}b^\alpha_\sigma\mathrm{D}_\alpha\gamma^\nu_\nu + \tfrac{4}{3}p\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\sigma\gamma^\nu_\nu + \tfrac{4}{3}b^\alpha_\nu\mathrm{D}_\alpha\gamma^\nu_\sigma \\ + \tfrac{4}{3}\gamma^\alpha_\nu\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma + \tfrac{4}{3}\mathrm{D}_\alpha\Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma}\big](\boldsymbol{z}). \quad (3.37)\end{aligned}$$

Etudions maintenant la composante transverse de l'équation (3.19). Pour tout générateur 2D $\boldsymbol{z}$, on a d'après les équations (3.25), (3.28) et (3.31) pour l'équation à l'intérieur et (3.26), (3.29) et (3.32) pour l'équation au bord que

$$\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\partial_{33}V^3_3\boldsymbol{z} + x_3\big[&-(\lambda+2\mu)pb^\alpha_\alpha\kappa^\delta_\delta - (\lambda+2\mu)\tfrac{p}{2\mu}b^\alpha_\alpha M_3 + (\lambda+\mu)p\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma^\delta_\delta \\ &+ \mu pc^\alpha_\alpha\gamma^\nu_\nu - (2\lambda+3\mu)b^\beta_\alpha\kappa^\alpha_\beta + (2\lambda+3\mu)pc^\alpha_\alpha\gamma^\nu_\nu - \mu p\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma^\nu_\nu \\ &- \mu\mathrm{D}^\alpha b^\nu_\alpha\theta_\nu + 2(\lambda+2\mu)c^\alpha_\beta\gamma^\beta_\alpha + \mu\mathrm{D}^\alpha b^\beta_\alpha\theta_\beta \\ &+ \mu b^\delta_\alpha\mathrm{D}^\alpha\theta_\delta\big](\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\partial_3V^3_3\boldsymbol{z} + \tfrac{x_3^2}{2}\big[&\lambda p\mathrm{D}^\sigma\mathrm{D}_\sigma\gamma^\alpha_\alpha - \lambda pb^\nu_\nu\kappa^\alpha_\alpha - \lambda\tfrac{p}{2\mu}b^\alpha_\alpha M_3 - 2\lambda b^\alpha_\beta\kappa^\beta_\alpha \\ &+ 2\lambda pc^\alpha_\alpha\gamma^\nu_\nu + 2\lambda c^\beta_\alpha\gamma^\alpha_\beta\big](\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm.\end{aligned}$$

Après simplifications, ces équations s'écrivent encore

$$\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\partial_{33}V^3_3\boldsymbol{z} = x_3\big[&-\lambda p\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma^\delta_\delta + (\lambda+2\mu)pb^\alpha_\alpha\kappa^\delta_\delta + (\lambda+2\mu)\tfrac{p}{2\mu}b^\alpha_\alpha M_3 \\ &+ 2(\lambda+\mu)b^\beta_\alpha\kappa^\alpha_\beta - 2(\lambda+2\mu)pc^\alpha_\alpha\gamma^\nu_\nu \\ &- 2(\lambda+2\mu)c^\alpha_\beta\gamma^\beta_\alpha\big](\boldsymbol{z}) \quad \text{dans} \quad \Omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\partial_3V^3_3\boldsymbol{z} = \tfrac{x_3^2}{2}\big[&-\lambda p\mathrm{D}^\sigma\mathrm{D}_\sigma\gamma^\alpha_\alpha + \lambda pb^\nu_\nu\kappa^\alpha_\alpha + \lambda\tfrac{p}{2\mu}b^\alpha_\alpha M_3 + 2\lambda b^\alpha_\beta\kappa^\beta_\alpha \\ &- 2\lambda pc^\alpha_\alpha\gamma^\nu_\nu - 2\lambda c^\beta_\alpha\gamma^\alpha_\beta\big](\boldsymbol{z}) \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm.\end{aligned}$$

En intégrant l'équation à l'intérieur entre -1 et x_3 et en utilisant la condition sur

Γ_- , on trouve que

$$\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\partial_3 V_3^3 \boldsymbol{z} = \tfrac{x_3^2}{2}\big[&-\lambda p \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\sigma \gamma_\alpha^\alpha + \lambda p b_\nu^\nu \kappa_\alpha^\alpha + \lambda \tfrac{p}{2\mu} b_\alpha^\alpha M_3 + 2\lambda b_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta - 2\lambda p c_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu \\ &- 2\lambda c_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha\big](\boldsymbol{z}) + (\tfrac{x_3^2}{2} - \tfrac{1}{2})\big[2\mu p b_\alpha^\alpha \kappa_\delta^\delta + p b_\alpha^\alpha M_3 + 2\mu b_\alpha^\beta \kappa_\beta^\alpha \\ &- 4\mu p c_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu - 4\mu c_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta\big](\boldsymbol{z}),\end{aligned}$$

d'où l'expression

$$\begin{aligned}\partial_3 V_3^3 \boldsymbol{z} = \tfrac{x_3^2}{2}\big[&- p^2 \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\beta^\beta + p^2 b_\alpha^\alpha \kappa_\beta^\beta + 2p b_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta - 2p^2 c_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu - 2p c_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta + \tfrac{p^2}{2\mu} b_\alpha^\alpha M_3\big](\boldsymbol{z}) \\ &+ (\tfrac{x_3^2}{2} - \tfrac{1}{2})\big[pq b_\alpha^\alpha \kappa_\nu^\nu + q b_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta - 2pq c_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu - 2q c_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta + \tfrac{p^2}{\lambda} b_\alpha^\alpha M_3\big](\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

Par intégration entre -1 et $+1$ on déduit de l'équation précédente que

$$\begin{aligned}[V_3^3 \boldsymbol{z}]_{-1}^{+1} = \big[&- \tfrac{1}{3} p^2 \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\nu^\nu + \tfrac{1}{3} p^2 b_\alpha^\alpha \kappa_\beta^\beta + \tfrac{2}{3} p b_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta - \tfrac{2}{3} p^2 c_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu - \tfrac{2}{3} p c_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta + \tfrac{p^2}{6\mu} b_\alpha^\alpha M_3 \\ &- \tfrac{2}{3} pq b_\alpha^\alpha \kappa_\nu^\nu - \tfrac{2}{3} q b_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta + \tfrac{4}{3} pq c_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu + \tfrac{4}{3} q c_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta - \tfrac{2p^2}{3\lambda} b_\alpha^\alpha M_3\big](\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

En définitive, on trouve donc

$$\begin{aligned}[V_3^3 \boldsymbol{z}]_{-1}^{+1} = \big[&- \tfrac{1}{3} p^2 \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\nu^\nu + \tfrac{p}{3}(p-2q) b_\alpha^\alpha \kappa_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}(p-q) b_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta - \tfrac{2}{3} p(p-2q) c_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu \\ &- \tfrac{2}{3}(p-2q) c_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta + \tfrac{p^2}{3}(\tfrac{1}{2\mu} - \tfrac{2}{\lambda}) b_\alpha^\alpha M_3\big](\boldsymbol{z}). \qquad (3.38)\end{aligned}$$

On déduit des équations précédentes que l'opérateur $\boldsymbol{V}^3$ possède les ordres de dérivation suivants, en utilisant la notation 2.2 :

$$\deg \boldsymbol{V}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (3.39)$$

Ces ordres correspondent à la majoration (2.32).

3.3 Opérateur réduit au rang deux

Le but de cette sous-section est de calculer l'opérateur $\boldsymbol{A}^2$ de la réduction canonique. Pour cela, on utilise l'équation (2.12) qui s'écrit ici pour tout $\boldsymbol{z}$ générateur 2D

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{z} = &- \int_{-1}^{1} \Big(\boldsymbol{L}^1 \boldsymbol{V}^3 \boldsymbol{z} + \boldsymbol{L}^2 \boldsymbol{V}^2 \boldsymbol{z} + \boldsymbol{L}^3 \boldsymbol{V}^1 \boldsymbol{z} + \boldsymbol{L}^4 \boldsymbol{V}^0 \boldsymbol{z}\Big) \mathrm{d}x_3 \\ &+ \Big[\boldsymbol{B}^1 \boldsymbol{V}^3 \boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}^2 \boldsymbol{V}^2 \boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}^3 \boldsymbol{V}^1 \boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}^4 \boldsymbol{V}^0 \boldsymbol{z}\Big]_{-1}^{+1}. \qquad (3.40)\end{aligned}$$

Dans la suite, on étudie successivement les composantes surfaciques et transverses de cette équation. Pour éviter la surcharge de notation, on note

$$d_\alpha^\beta := (b^3)_\alpha^\beta. \tag{3.41}$$

Composantes surfaciques : Dans l'équation (3.40), on trouve le terme

$$-\int_{-1}^{1} L_\sigma^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \Big[B_\sigma^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\Big]_{-1}^{+1}$$

qui s'écrit, d'après l'équation (3.34),

$$-\int_{-1}^{1} L_\sigma^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \Big[B_\sigma^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\Big]_{-1}^{+1} = \mu b_\alpha^\alpha[V_\sigma^3\boldsymbol{z}]_{-1}^{+1} - \lambda \mathrm{D}_\sigma[V_3^3\boldsymbol{z}]_{-1}^{+1}.$$

D'après les équations (3.37) et (3.38), on a donc pour tout générateur 2D

$$\begin{aligned}
-\textstyle\int_{-1}^{1} L_\sigma^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \big[B_\sigma^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\big]_{-1}^{+1} = \big[&- \tfrac{5}{3}\mu p b_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma \kappa_\nu^\nu - \tfrac{4}{3}\mu b_\beta^\beta \mathrm{D}_\alpha \kappa_\sigma^\alpha - \tfrac{5}{6} p b_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma M_3 \\
&+ \tfrac{p}{3}\mu b_\beta^\beta b_\sigma^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\nu^\nu + \tfrac{4}{3}\mu p b_\beta^\beta \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\alpha \gamma_\nu^\nu + \tfrac{4}{3}\mu b_\beta^\beta b_\nu^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\sigma^\nu + \tfrac{4}{3}\mu b_\beta^\beta \gamma_\nu^\alpha \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\nu \\
&+ \tfrac{4}{3}\mu b_\beta^\beta \mathrm{D}_\alpha \Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma} + \tfrac{1}{3}\lambda p^2 \mathrm{D}_\sigma \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\nu^\nu - \tfrac{1}{3}\lambda p(p-2q) \mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha \kappa_\nu^\nu \\
&- \tfrac{2}{3}\lambda(p-q) \mathrm{D}_\sigma b_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta + \tfrac{2}{3}\lambda p(p-2q) \mathrm{D}_\sigma c_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\lambda(p-2q) \mathrm{D}_\sigma c_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta \\
&- \tfrac{1}{3}\lambda p^2 (\tfrac{1}{2\mu} - \tfrac{2}{\lambda}) \mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha M_3 \big](\boldsymbol{z}).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

D'autre part, d'après les équations (3.4) et (3.16), on a

$$\begin{aligned}
L_\sigma^2(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z}) = \tfrac{x_3^2}{2}\big[&- 2\mu p c_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma \gamma_\nu^\nu + 2\mu p b_\alpha^\alpha b_\sigma^\beta \mathrm{D}_\beta \gamma_\nu^\nu - \mu p b_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma \kappa_\nu^\nu - \tfrac{p}{2} b_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma M_3 \\
&- \mu p b_\beta^\beta b_\sigma^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\nu^\nu + \lambda p \mathrm{D}_\sigma \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\nu^\nu - \lambda p \mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha \kappa_\nu^\nu - \tfrac{\lambda p}{2\mu} \mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha M_3 \\
&+ 2\mu p \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\sigma \gamma_\nu^\nu - 2\mu p \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\alpha \kappa_\nu^\nu - p \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\alpha M_3 \big](\boldsymbol{z})
\end{aligned}$$

De plus, d'après l'équation (3.5), B_σ^2 est l'opérateur nul. On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
-\textstyle\int_{-1}^{1} L_\sigma^2(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \big[B_\sigma^2(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z})\big]_{-1}^{+1} = \big[&\tfrac{2}{3}\mu p c_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma \gamma_\nu^\nu - \tfrac{2}{3}\mu p b_\alpha^\alpha b_\sigma^\beta \mathrm{D}_\beta \gamma_\nu^\nu + \tfrac{1}{3}\mu p b_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma \kappa_\nu^\nu \\
&+ \tfrac{p}{6} b_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma M_3 + \tfrac{1}{3}\mu p b_\beta^\beta b_\sigma^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\nu^\nu - \tfrac{1}{3}\lambda p \mathrm{D}_\sigma \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\nu^\nu + \tfrac{1}{3}\lambda p \mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha \kappa_\nu^\nu \\
&+ \tfrac{\lambda p}{6\mu} \mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha M_3 - \tfrac{2}{3}\mu p \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\sigma \gamma_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu p \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\alpha \kappa_\nu^\nu + \tfrac{1}{3} p \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\alpha M_3 \big](\boldsymbol{z})
\end{aligned} \tag{3.43}$$

D'après l'équation (3.22) et l'expression (1.17) de l'opérateur $\boldsymbol{V}^1$, on calcule de même en utilisant l'équation (3.21),

$$\begin{aligned}L^3_\sigma(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z}) = \tfrac{x_3^2}{2}\big[&2\mu d^\alpha_\alpha\theta_\sigma + 2\mu p c^\alpha_\alpha \mathrm{D}_\sigma\gamma^\nu_\nu - 2\lambda\mathrm{D}_\sigma b^\alpha_\beta\kappa^\beta_\alpha + 2\lambda p\mathrm{D}_\sigma c^\alpha_\alpha\gamma^\nu_\nu - 2\mu\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta\mathrm{D}_\sigma\theta^\delta\\ &- 2\mu\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta\mathrm{D}^\delta\theta_\sigma + 4\mu p\mathrm{D}_\alpha c^\alpha_\sigma\gamma^\nu_\nu - 2\mu\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\nu\mathrm{D}^\nu\theta_\sigma + 2\mu\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma\mathrm{D}^\alpha\theta_\nu\\ &- 4\mu\kappa^\alpha_\nu\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma + 4\mu p b^\alpha_\nu\gamma^\beta_\beta\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma + 2\mu(\mathrm{D}_\sigma\theta^\delta)\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta + 2\mu(\mathrm{D}^\delta\theta_\sigma)\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta\\ &- 4\mu b^\delta_\sigma\gamma^\nu_\nu\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta\big](\boldsymbol{z})\end{aligned}$$

Or on a

$$-2\mu\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta\mathrm{D}^\delta\theta_\sigma - 2\mu\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta\mathrm{D}_\sigma\theta^\delta + 2\mu(\mathrm{D}_\sigma\theta^\delta)\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta + 2\mu(\mathrm{D}^\delta\theta_\sigma)\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta = -4\mu b^\alpha_\beta\mathrm{D}_\alpha\kappa^\beta_\sigma.$$

On a donc, en intégrant entre -1 et $+1$ et en utilisant le fait que B^3_σ est l'opérateur nul,

$$\begin{aligned}-\int_{-1}^1 L^3_\sigma(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \big[B^3_\sigma(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z})\big]^{+1}_{-1} = \big[&-\tfrac{2}{3}\mu d^\alpha_\alpha\theta_\sigma - \tfrac{2}{3}\mu p c^\alpha_\alpha\mathrm{D}_\sigma\gamma^\nu_\nu + \tfrac{2}{3}\lambda\mathrm{D}_\sigma b^\alpha_\beta\kappa^\beta_\alpha\\ &- \tfrac{2}{3}\lambda p\mathrm{D}_\sigma c^\alpha_\alpha\gamma^\nu_\nu + \tfrac{4}{3}\mu b^\alpha_\beta\mathrm{D}_\alpha\kappa^\beta_\sigma - \tfrac{4}{3}\mu p\mathrm{D}_\alpha c^\alpha_\sigma\gamma^\nu_\nu + \tfrac{2}{3}\mu\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\nu\mathrm{D}^\nu\theta_\sigma - \tfrac{2}{3}\mu\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma\mathrm{D}^\alpha\theta_\nu\\ &+ \tfrac{4}{3}\mu\kappa^\alpha_\nu\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma - \tfrac{4}{3}\mu p b^\alpha_\nu\gamma^\beta_\beta\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma + \tfrac{4}{3}\mu b^\delta_\sigma\gamma^\nu_\nu\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta\big](\boldsymbol{z}).\end{aligned} \tag{3.44}$$

Enfin, l'équation (4.14) du chapitre II pour $n=4$ montre que

$$\begin{aligned}L^4_\sigma(\boldsymbol{w}) = &-\mu x_3^3(b^4)^\alpha_\alpha\partial_3 w_\sigma - \mu x_3^2 d^\alpha_\alpha\theta_\sigma(\boldsymbol{w}) + \mu x_3^3 d^\alpha_\alpha b^\beta_\sigma\partial_3 w_\beta + \lambda\mathrm{D}_\sigma c^\alpha_\beta\gamma^\beta_\alpha(x_3^2\boldsymbol{w})\\ &+ 2\mu\mathrm{D}_\alpha\big(\tilde\gamma^\alpha_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^2 + 2\mu x_3\big(\tilde\gamma^\alpha_\nu[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^1\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma + 2\mu x_3^2 b^\delta_\nu\gamma^\alpha_\delta(\boldsymbol{w})\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma\\ &- 2\mu x_3\big(\tilde\gamma^\delta_\sigma[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^1\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta - 2\mu x_3^2 b^\alpha_\nu\gamma^\delta_\sigma(\boldsymbol{w})\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\delta.\end{aligned}$$

Or l'équation (4.16) du chapitre II montre que

$$\big(\tilde\gamma^\alpha_\beta[\varepsilon](\boldsymbol{w})\big)^2 = x_3^2 c^\alpha_\delta\gamma^\delta_\beta(\boldsymbol{w}) + 2\,x_3^2 b^\alpha_\delta\Lambda^{\delta\,\cdot}_{\,\cdot\,\beta}(\boldsymbol{w}),$$

et en utilisant l'équation (3.20), on trouve finalement

$$\begin{aligned}L^4_\sigma(\boldsymbol{w}) = &-\mu x_3^3(b^4)^\alpha_\alpha\partial_3 w_\sigma - \mu x_3^2 d^\alpha_\alpha\theta_\sigma(\boldsymbol{w}) + \mu x_3^3 d^\alpha_\alpha b^\beta_\sigma\partial_3 w_\beta + \lambda\mathrm{D}_\sigma c^\alpha_\beta\gamma^\beta_\alpha(x_3^2\boldsymbol{w})\\ &+ 2x_3^2\mu\mathrm{D}_\alpha c^\alpha_\nu\gamma^\nu_\sigma(\boldsymbol{w}) + 4x_3^2\mu\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta\Lambda^{\delta\,\cdot}_{\,\cdot\,\sigma}(\boldsymbol{w}) + 2\mu x_3^2 b^\alpha_\delta\gamma^\delta_\nu(\boldsymbol{w})\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma\\ &+ 2\mu x_3^2\Lambda^{\alpha\,\cdot}_{\,\cdot\,\nu}(\boldsymbol{w})\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma + 2\mu x_3^2 b^\delta_\nu\gamma^\alpha_\delta(\boldsymbol{w})\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma - 2\mu x_3^2 b^\delta_\nu\gamma^\nu_\sigma(\boldsymbol{w})\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta\\ &- 2\mu x_3^2\Lambda^{\delta\,\cdot}_{\,\cdot\,\sigma}(\boldsymbol{w})\mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\delta - 2\mu x_3^2 b^\alpha_\nu\gamma^\delta_\sigma(\boldsymbol{w})\mathrm{D}_\alpha b^\nu_\delta.\end{aligned}$$

En intégrant alors cette équation entre -1 et 1, et compte tenu du fait que B^3_σ est l'opérateur nul, on trouve

$$
\begin{aligned}
-\int_{-1}^{1} L_{\sigma}^{4}(\boldsymbol{V}^{0}\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \big[B_{\sigma}^{4}(\boldsymbol{V}^{0}\boldsymbol{z})\big]_{-1}^{+1} = \big[&\tfrac{2}{3}\mu d_{\alpha}^{\alpha}\theta_{\sigma} - \tfrac{2}{3}\lambda \mathrm{D}_{\sigma} c_{\beta}^{\alpha}\gamma_{\alpha}^{\beta} - \tfrac{4}{3}\mu \mathrm{D}_{\alpha} c_{\nu}^{\alpha}\gamma_{\sigma}^{\nu} \\
&- \tfrac{8}{3}\mu \mathrm{D}_{\alpha} b_{\delta}^{\alpha}\Lambda^{\delta}_{\cdot\sigma} - \tfrac{4}{3}\mu b_{\delta}^{\alpha}\gamma_{\nu}^{\delta}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\nu} - \tfrac{4}{3}\mu \Lambda^{\alpha}_{\cdot\nu}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\nu} - \tfrac{4}{3}\mu b_{\nu}^{\delta}\gamma_{\delta}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\nu} \\
&+ \tfrac{4}{3}\mu b_{\nu}^{\delta}\gamma_{\sigma}^{\nu}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\delta}^{\alpha} + \tfrac{4}{3}\mu \Lambda^{\delta}_{\cdot\sigma}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\delta}^{\alpha} + \tfrac{4}{3}\mu b_{\nu}^{\alpha}\gamma_{\sigma}^{\delta}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\delta}^{\nu}\big](\boldsymbol{z}).
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

En définitive, par sommation des formules (3.42), (3.43), (3.44) et (3.45), on trouve

$$
\begin{aligned}
2A_{\sigma}^{2} = &-\tfrac{5}{3}\mu p b_{\alpha}^{\alpha}\mathrm{D}_{\sigma}\kappa_{\nu}^{\nu} - \tfrac{4}{3}\mu b_{\beta}^{\beta}\mathrm{D}_{\alpha}\kappa_{\sigma}^{\alpha} - \tfrac{5}{6}p b_{\alpha}^{\alpha}\mathrm{D}_{\sigma}M_3 + \tfrac{p}{3}\mu b_{\beta}^{\beta} b_{\sigma}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha}\gamma_{\nu}^{\nu} + \tfrac{4}{3}\mu p b_{\beta}^{\beta}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\alpha}\gamma_{\nu}^{\nu} \\
&+ \tfrac{4}{3}\mu b_{\beta}^{\beta} b_{\nu}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha}\gamma_{\sigma}^{\nu} + \tfrac{4}{3}\mu b_{\beta}^{\beta}\gamma_{\nu}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\nu} + \tfrac{4}{3}\mu b_{\beta}^{\beta}\mathrm{D}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\cdot\sigma} + \tfrac{1}{3}\lambda p^{2}\mathrm{D}_{\sigma}\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha}\gamma_{\nu}^{\nu} \\
&- \tfrac{1}{3}\lambda p(p-2q)\mathrm{D}_{\sigma} b_{\alpha}^{\alpha}\kappa_{\nu}^{\nu} - \tfrac{2}{3}\lambda(p-q)\mathrm{D}_{\sigma} b_{\beta}^{\alpha}\kappa_{\alpha}^{\beta} + \tfrac{2}{3}\lambda p(p-2q)\mathrm{D}_{\sigma} c_{\alpha}^{\alpha}\gamma_{\nu}^{\nu} \\
&+ \tfrac{2}{3}\lambda(p-2q)\mathrm{D}_{\sigma} c_{\beta}^{\alpha}\gamma_{\alpha}^{\beta} - \tfrac{1}{3}\lambda p^{2}(\tfrac{1}{2\mu} - \tfrac{2}{\lambda})\mathrm{D}_{\sigma} b_{\alpha}^{\alpha}M_3 + \tfrac{2}{3}\mu p c_{\alpha}^{\alpha}\mathrm{D}_{\sigma}\gamma_{\nu}^{\nu} - \tfrac{2}{3}\mu p b_{\alpha}^{\alpha} b_{\sigma}^{\beta}\mathrm{D}_{\beta}\gamma_{\nu}^{\nu} \\
&+ \tfrac{1}{3}\mu p b_{\alpha}^{\alpha}\mathrm{D}_{\sigma}\kappa_{\nu}^{\nu} + \tfrac{p}{6} b_{\alpha}^{\alpha}\mathrm{D}_{\sigma}M_3 + \tfrac{1}{3}\mu p b_{\beta}^{\beta} b_{\sigma}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha}\gamma_{\nu}^{\nu} - \tfrac{1}{3}\lambda p\mathrm{D}_{\sigma}\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha}\gamma_{\nu}^{\nu} + \tfrac{1}{3}\lambda p\mathrm{D}_{\sigma} b_{\alpha}^{\alpha}\kappa_{\nu}^{\nu} \\
&+ \tfrac{\lambda p}{6\mu}\mathrm{D}_{\sigma} b_{\alpha}^{\alpha}M_3 - \tfrac{2}{3}\mu p\mathrm{D}_{\alpha}\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{D}_{\sigma}\gamma_{\nu}^{\nu} + \tfrac{2}{3}\mu p\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\alpha}\kappa_{\nu}^{\nu} + \tfrac{1}{3}p\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\alpha}M_3 - \tfrac{2}{3}\mu d_{\alpha}^{\alpha}\theta_{\sigma} \\
&- \tfrac{2}{3}\mu p c_{\alpha}^{\alpha}\mathrm{D}_{\sigma}\gamma_{\nu}^{\nu} + \tfrac{2}{3}\lambda\mathrm{D}_{\sigma} b_{\beta}^{\alpha}\kappa_{\alpha}^{\beta} - \tfrac{2}{3}\lambda p\mathrm{D}_{\sigma} c_{\alpha}^{\alpha}\gamma_{\nu}^{\nu} + \tfrac{4}{3}\mu b_{\beta}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha}\kappa_{\sigma}^{\beta} - \tfrac{4}{3}\mu p\mathrm{D}_{\alpha} c_{\sigma}^{\alpha}\gamma_{\nu}^{\nu} \\
&+ \tfrac{2}{3}\mu\mathrm{D}_{\alpha} b_{\nu}^{\alpha}\mathrm{D}^{\nu}\theta_{\sigma} - \tfrac{2}{3}\mu\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\nu}\mathrm{D}^{\alpha}\theta_{\nu} + \tfrac{4}{3}\mu\kappa_{\nu}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\nu} - \tfrac{4}{3}\mu p b_{\nu}^{\alpha}\gamma_{\beta}^{\beta}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\nu} + \tfrac{4}{3}\mu b_{\sigma}^{\delta}\gamma_{\nu}^{\nu}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\delta}^{\alpha} \\
&+ \tfrac{2}{3}\mu d_{\alpha}^{\alpha}\theta_{\sigma} - \tfrac{2}{3}\lambda\mathrm{D}_{\sigma} c_{\beta}^{\alpha}\gamma_{\alpha}^{\beta} - \tfrac{4}{3}\mu\mathrm{D}_{\alpha} c_{\nu}^{\alpha}\gamma_{\sigma}^{\nu} - \tfrac{8}{3}\mu\mathrm{D}_{\alpha} b_{\delta}^{\alpha}\Lambda^{\delta}_{\cdot\sigma} - \tfrac{4}{3}\mu b_{\delta}^{\alpha}\gamma_{\nu}^{\delta}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\nu} \\
&- \tfrac{4}{3}\mu\Lambda^{\alpha}_{\cdot\nu}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\nu} - \tfrac{4}{3}\mu b_{\nu}^{\delta}\gamma_{\delta}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\nu} + \tfrac{4}{3}\mu b_{\nu}^{\delta}\gamma_{\sigma}^{\nu}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\delta}^{\alpha} + \tfrac{4}{3}\mu\Lambda^{\delta}_{\cdot\sigma}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\delta}^{\alpha} + \tfrac{4}{3}\mu b_{\nu}^{\alpha}\gamma_{\sigma}^{\delta}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\delta}^{\nu}
\end{aligned}
$$

On regroupe alors les différents termes, et en utilisant le fait que

$$
-\tfrac{4}{3}\mu\mathrm{D}_{\alpha} c_{\nu}^{\alpha}\gamma_{\sigma}^{\nu} + \tfrac{4}{3}\mu b_{\nu}^{\delta}\gamma_{\sigma}^{\nu}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\delta}^{\alpha} = -\tfrac{4}{3}\mu b_{\beta}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\delta}^{\beta}\gamma_{\sigma}^{\delta}
$$

et que de même

$$
-\tfrac{4}{3}\mu p\mathrm{D}_{\alpha} c_{\sigma}^{\alpha}\gamma_{\nu}^{\nu} + \tfrac{4}{3}\mu b_{\sigma}^{\delta}\gamma_{\nu}^{\nu}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\delta}^{\alpha} = -\tfrac{4}{3}\mu p b_{\beta}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\beta}\gamma_{\nu}^{\nu},
$$

on trouve finalement

$$
\begin{aligned}
A_{\sigma}^{2} = &-\tfrac{2}{3}\mu b_{\nu}^{\nu}\mathrm{D}_{\alpha}\kappa_{\sigma}^{\alpha} - \tfrac{2}{3}\mu p b_{\beta}^{\beta}\mathrm{D}_{\sigma}\kappa_{\nu}^{\nu} + \tfrac{1}{2}\lambda pq\mathrm{D}_{\sigma}(b_{\alpha}^{\alpha}\kappa_{\nu}^{\nu}) + \tfrac{2}{3}\lambda q\mathrm{D}_{\sigma} b_{\beta}^{\alpha}\kappa_{\alpha}^{\beta} \\
&+ \tfrac{1}{3}\mu p\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\alpha}\kappa_{\nu}^{\nu} + \tfrac{2}{3}\mu b_{\beta}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha}\kappa_{\sigma}^{\beta} + \tfrac{2}{3}\mu\kappa_{\beta}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\beta} - \tfrac{1}{3}\mu\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\beta}\mathrm{D}^{\alpha}\theta_{\beta} \\
&+ \tfrac{1}{3}\mu\mathrm{D}_{\alpha} b_{\beta}^{\alpha}\mathrm{D}^{\beta}\theta_{\sigma} - \tfrac{1}{6}\lambda pq\mathrm{D}_{\sigma}\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha}\gamma_{\nu}^{\nu} - \tfrac{1}{3}\mu p\mathrm{D}_{\alpha}\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{D}_{\sigma}\gamma_{\nu}^{\nu} - \lambda pq\mathrm{D}_{\sigma}(c_{\alpha}^{\alpha}\gamma_{\nu}^{\nu}) \\
&- \lambda q\mathrm{D}_{\sigma}(c_{\beta}^{\alpha}\gamma_{\alpha}^{\beta}) + \tfrac{2}{3}\mu p b_{\beta}^{\beta}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\alpha}\gamma_{\nu}^{\nu} - \tfrac{2}{3}\mu p b_{\beta}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\beta}\gamma_{\nu}^{\nu} - \tfrac{2}{3}\mu b_{\beta}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\delta}^{\beta}\gamma_{\sigma}^{\delta} \\
&- \tfrac{2}{3}\mu p b_{\beta}^{\alpha}\gamma_{\nu}^{\nu}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\beta} - \tfrac{4}{3}\mu b_{\nu}^{\delta}\gamma_{\delta}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\nu} + \tfrac{2}{3}\mu b_{\nu}^{\alpha}\gamma_{\sigma}^{\delta}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\delta}^{\nu} + \tfrac{2}{3}\mu b_{\beta}^{\beta}\gamma_{\nu}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\nu} \\
&+ \tfrac{2}{3}\mu b_{\nu}^{\nu} b_{\beta}^{\alpha}\mathrm{D}_{\alpha}\gamma_{\sigma}^{\beta} + \tfrac{2}{3}\mu b_{\beta}^{\beta}\mathrm{D}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\cdot\sigma} - \tfrac{4}{3}\mu\mathrm{D}_{\alpha} b_{\nu}^{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\cdot\sigma} - \tfrac{2}{3}\mu\Lambda^{\alpha}_{\cdot\nu}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\nu} \\
&+ \tfrac{2}{3}\mu\Lambda^{\beta}_{\cdot\sigma}\mathrm{D}_{\alpha} b_{\beta}^{\alpha} + \tfrac{1}{2}p^{2}\mathrm{D}_{\sigma}(b_{\alpha}^{\alpha}M_3) - \tfrac{1}{3}p b_{\nu}^{\nu}\mathrm{D}_{\sigma}M_3 + \tfrac{1}{6}p\mathrm{D}_{\alpha} b_{\sigma}^{\alpha}M_3.
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

Composante transverse : Etudions donc la composante transverse de l'équation (3.40). Dans cette équation, on trouve le terme

$$-\int_{-1}^{1} L_3^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \Big[B_3^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\Big]_{-1}^{+1}$$

qui s'écrit, d'après l'équation (3.35),

$$-\int_{-1}^{1} L_\sigma^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \Big[B_\sigma^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\Big]_{-1}^{+1} = 2\mu b_\alpha^\alpha[V_3^3\boldsymbol{z}]_{-1}^{+1} - \mu\mathrm{D}^\alpha[V_\alpha^3\boldsymbol{z}]_{-1}^{+1}.$$

En utilisant les équations (3.38) et (3.37), on trouve donc

$$\begin{aligned}-\int_{-1}^{1} L_3^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \Big[B_3^1(\boldsymbol{V}^3\boldsymbol{z})\Big]_{-1}^{+1} = \big[&-\tfrac{2}{3}\mu p^2 b_\beta^\beta\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu p(p-2q)b_\beta^\beta b_\alpha^\alpha\kappa_\nu^\nu \\ &+ \tfrac{4}{3}\mu(p-q)b_\nu^\nu b_\beta^\alpha\kappa_\alpha^\beta - \tfrac{4}{3}\mu p(p-2q)b_\beta^\beta c_\alpha^\alpha\gamma_\nu^\nu - \tfrac{4}{3}\mu(p-2q)b_\nu^\nu c_\beta^\alpha\gamma_\alpha^\beta \\ &+ \tfrac{2}{3}p^2\mu(\tfrac{1}{2\mu}-\tfrac{2}{\lambda})b_\beta^\beta b_\alpha^\alpha M_3 + \tfrac{5}{3}\mu p\mathrm{D}^\sigma\mathrm{D}_\sigma\kappa_\nu^\nu + \tfrac{4}{3}\mu\mathrm{D}^\sigma\mathrm{D}_\alpha\kappa_\sigma^\alpha + \tfrac{5}{6}p\mathrm{D}^\sigma\mathrm{D}_\sigma M_3 \\ &- \tfrac{1}{3}\mu p\mathrm{D}^\sigma b_\sigma^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma_\nu^\nu - \tfrac{4}{3}\mu p\mathrm{D}^\sigma\mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\alpha\gamma_\nu^\nu - \tfrac{4}{3}\mu\mathrm{D}^\sigma b_\nu^\alpha\mathrm{D}_\alpha\gamma_\sigma^\nu - \tfrac{4}{3}\mu\mathrm{D}^\sigma\gamma_\nu^\alpha\mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\nu \\ &- \tfrac{4}{3}\mu\mathrm{D}^\sigma\mathrm{D}_\alpha\Lambda_{\cdot\sigma}^{\alpha\cdot}\big](\boldsymbol{z}).\end{aligned} \tag{3.47}$$

D'autre part, les équations (3.4) et (3.16) montrent que

$$\begin{aligned}L_3^2(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z}) = \tfrac{x_3^2}{2}\big[&-2\mu p c_\alpha^\alpha\kappa_\nu^\nu - p c_\alpha^\alpha M_3 + 3(\lambda+\mu)p b_\alpha^\beta\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\beta\gamma_\nu^\nu - 3(\lambda+\mu)p c_\alpha^\alpha\kappa_\nu^\nu \\ &- 3(\lambda+\mu)\tfrac{p}{2\mu}c_\alpha^\alpha M_3 + \mu p b_\alpha^\beta\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\beta\gamma_\nu^\nu - \mu p c_\alpha^\alpha\kappa_\nu^\nu - \tfrac{p}{2}c_\alpha^\alpha M_3 + \mu p\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha\kappa_\nu^\nu \\ &+ \tfrac{p}{2}\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha M_3 + \mu p\mathrm{D}^\alpha b_\alpha^\beta\mathrm{D}_\beta\gamma_\nu^\nu\big](\boldsymbol{z}),\end{aligned}$$

tandis que l'équation (3.5) montre que

$$B_3^2(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z}) = \tfrac{x_3^3}{6}\big[3\lambda p b_\beta^\alpha\mathrm{D}^\beta\mathrm{D}_\alpha\gamma_\nu^\nu - 3\lambda p c_\alpha^\alpha\kappa_\nu^\nu - 3\lambda\tfrac{p}{2\mu}c_\alpha^\alpha M_3\big](\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm}.$$

Les deux équations précédentes montrent que

$$\begin{aligned}-\int_{-1}^{1} L_3^2(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \Big[B_3^2(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z})\Big]_{-1}^{+1} = \big[&\tfrac{2}{3}\mu p c_\alpha^\alpha\kappa_\nu^\nu + \tfrac{1}{3}p c_\alpha^\alpha M_3 - \mu p b_\alpha^\beta\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\beta\gamma_\nu^\nu \\ &+ \mu p c_\alpha^\alpha\kappa_\nu^\nu + \mu\tfrac{p}{2\mu}c_\alpha^\alpha M_3 - \tfrac{1}{3}\mu p b_\alpha^\beta\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\beta\gamma_\nu^\nu + \tfrac{1}{3}\mu p c_\alpha^\alpha\kappa_\nu^\nu + \tfrac{1}{6}p c_\alpha^\alpha M_3 \\ &- \tfrac{1}{3}\mu p\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha\kappa_\nu^\nu - \tfrac{1}{6}p\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\alpha M_3 - \tfrac{1}{3}\mu p\mathrm{D}^\alpha b_\alpha^\beta\mathrm{D}_\beta\gamma_\nu^\nu\big](\boldsymbol{z}),\end{aligned}$$

soit après simplifications

$$-\int_{-1}^{1} L_3^2(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \Big[B_3^2(\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z})\Big]_{-1}^{+1} = \big[-\tfrac{1}{3}\mu p \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \kappa_\nu^\nu + 2\mu p c_\alpha^\alpha \kappa_\nu^\nu + p c_\alpha^\alpha M_3 - \tfrac{4}{3}\mu p b_\alpha^\beta \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\beta \gamma_\nu^\nu - \tfrac{1}{6} p \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha M_3 - \tfrac{1}{3}\mu p \mathrm{D}^\alpha b_\alpha^\beta \mathrm{D}_\beta \gamma_\nu^\nu\big](\boldsymbol{z}). \quad (3.48)$$

En utilisant la notation (3.41), les équations (3.23) et (1.17) montrent que

$$L_3^3(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z}) = \tfrac{x_3^2}{2}\big[2\mu p d_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu - 6(\lambda+\mu) c_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta + 6(\lambda+\mu) p d_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu - 4\mu c_\alpha^\beta \kappa_\beta^\alpha + 4\mu p d_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu - 2\mu p \mathrm{D}^\alpha b_\alpha^\beta \mathrm{D}_\beta \gamma_\nu^\nu - 2\mu \mathrm{D}^\alpha c_\alpha^\beta \theta_\beta - 2\mu p b_\alpha^\delta \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\sigma \gamma_\nu^\nu - 2\mu b_\alpha^\delta \mathrm{D}^\alpha b_\delta^\nu \theta_\nu\big](\boldsymbol{z}),$$

et l'équation (3.24) montre qu'on a

$$B_3^3(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z}) = \tfrac{x_3^3}{6}\big[-6\lambda c_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta + 6\lambda p d_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu\big](\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm}.$$

On déduit des deux équations précédentes que

$$-\int_{-1}^{1} L_3^3(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \Big[B_3^3(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z})\Big]_{-1}^{+1} = \big[-\tfrac{2}{3}\mu p d_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu + 2\mu c_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta - 2\mu p d_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu + \tfrac{4}{3}\mu c_\alpha^\beta \kappa_\beta^\alpha - \tfrac{4}{3}\mu p d_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu p \mathrm{D}^\alpha b_\alpha^\beta \mathrm{D}_\beta \gamma_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu \mathrm{D}^\alpha c_\alpha^\beta \theta_\beta + \tfrac{2}{3}\mu p b_\alpha^\delta \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\sigma \gamma_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu b_\alpha^\delta \mathrm{D}^\alpha b_\delta^\nu \theta_\nu\big](\boldsymbol{z}),$$

soit après simplifications

$$-\int_{-1}^{1} L_3^3(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \Big[B_3^3(\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z})\Big]_{-1}^{+1} = \big[\tfrac{10}{3}\mu c_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta - 4\mu p d_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu p \mathrm{D}^\alpha b_\alpha^\beta \mathrm{D}_\beta \gamma_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu \mathrm{D}^\alpha c_\alpha^\beta \theta_\beta + \tfrac{2}{3}\mu p b_\alpha^\delta \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\sigma \gamma_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu b_\alpha^\delta \mathrm{D}^\alpha b_\delta^\nu \theta_\nu\big](\boldsymbol{z}). \quad (3.49)$$

Enfin, pour $n = 4$ l'équation (4.15) du chapitre II montre que

$$L_3^4(\boldsymbol{w}) = -\mu x_3^3 (b^4)_\alpha^\alpha \partial_3 w_3 + (\lambda+\mu) d_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta\big(\partial_3(x_3^3\boldsymbol{w})\big) + 3\mu d_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta(x_3^2\boldsymbol{w}) + \mu \mathrm{D}^\alpha c_\alpha^\beta \theta_\beta(x_3^2\boldsymbol{w}) + \mu b_\alpha^\delta \mathrm{D}^\alpha b_\delta^\beta \theta_\beta(x_3^2\boldsymbol{w}) + \mu c_\alpha^\beta \mathrm{D}^\alpha \theta_\beta(x_3^2\boldsymbol{w}),$$

d'où

$$L_3^4(\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z}) = \tfrac{x_3^2}{2}\big[6(\lambda+\mu) d_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta + 6\mu d_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta + 2\mu \mathrm{D}^\alpha c_\alpha^\beta \theta_\beta + 2\mu b_\alpha^\delta \mathrm{D}^\alpha b_\delta^\beta \theta_\beta + 2\mu c_\alpha^\beta \mathrm{D}^\alpha \theta_\beta\big](\boldsymbol{z}).$$

De même, l'équation (4.18) du chapitre II montre que

$$B_3^4(\boldsymbol{w}) = \lambda d_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta (x_3^3 \boldsymbol{w})\big|_{\Gamma_\pm},$$

d'où

$$B_3^4(\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z}) = \tfrac{x_3^3}{6} 6\lambda d_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta (\boldsymbol{z})\big|_{\Gamma_\pm}.$$

On trouve donc

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^{1} L_3^4(\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_3 + \Big[B_3^4(\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z})\Big]_{-1}^{+1} = \big[&- 2\mu d_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta - 2\mu d_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta \\ &- \tfrac{2}{3}\mu \mathrm{D}^\alpha c_\alpha^\beta \theta_\beta - \tfrac{2}{3}\mu b_\alpha^\delta \mathrm{D}^\alpha b_\delta^\beta \theta_\beta - \tfrac{2}{3}\mu c_\alpha^\beta \mathrm{D}^\alpha \theta_\beta\big](\boldsymbol{z}). \quad (3.50) \end{aligned}$$

En groupant les équations (3.47), (3.48), (3.49) et (3.50), on trouve que la composante transverse de l'équation (3.40) s'écrit

$$\begin{aligned} 2A_3^2 = &-\tfrac{2}{3}\mu p^2 b_\beta^\beta \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu p(p-2q) b_\beta^\beta b_\alpha^\alpha \kappa_\nu^\nu + \tfrac{4}{3}\mu(p-q) b_\nu^\nu b_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta \\ &- \tfrac{4}{3}\mu p(p-2q) b_\beta^\beta c_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu - \tfrac{4}{3}\mu(p-2q) b_\nu^\nu c_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta + \tfrac{2}{3}p^2\mu(\tfrac{1}{2\mu} - \tfrac{2}{\lambda}) b_\beta^\beta b_\alpha^\alpha M_3 + \tfrac{5}{3}\mu p \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\sigma \kappa_\nu^\nu \\ &+ \tfrac{4}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\alpha \kappa_\sigma^\alpha + \tfrac{5}{6} p \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\sigma M_3 - \tfrac{1}{3}\mu p \mathrm{D}^\sigma b_\sigma^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\nu^\nu - \tfrac{4}{3}\mu p \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\alpha \gamma_\nu^\nu - \tfrac{4}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma b_\nu^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\sigma^\nu \\ &- \tfrac{4}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma \gamma_\nu^\alpha \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\nu - \tfrac{4}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\alpha \Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma} - \tfrac{1}{3}\mu p \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \kappa_\nu^\nu + 2\mu p c_\alpha^\alpha \kappa_\nu^\nu + p c_\alpha^\alpha M_3 \\ &- \tfrac{4}{3}\mu p b_\alpha^\beta \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\beta \gamma_\nu^\nu - \tfrac{1}{6} p \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha M_3 - \tfrac{1}{3}\mu p \mathrm{D}^\alpha b_\alpha^\beta \mathrm{D}_\beta \gamma_\nu^\nu + \tfrac{10}{3}\mu c_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta - 4\mu p d_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu \\ &+ \tfrac{2}{3}\mu p \mathrm{D}^\alpha b_\alpha^\beta \mathrm{D}_\beta \gamma_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu \mathrm{D}^\alpha c_\alpha^\beta \theta_\beta + \tfrac{2}{3}\mu p b_\alpha^\delta \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\delta \gamma_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu b_\alpha^\delta \mathrm{D}^\alpha b_\delta^\nu \theta_\nu - 2\mu d_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta \\ &- 2\mu d_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta - \tfrac{2}{3}\mu \mathrm{D}^\alpha c_\alpha^\beta \theta_\beta - \tfrac{2}{3}\mu b_\alpha^\delta \mathrm{D}^\alpha b_\delta^\beta \theta_\beta - \tfrac{2}{3}\mu c_\alpha^\beta \mathrm{D}^\alpha \theta_\beta, \end{aligned}$$

soit après simplification

$$\begin{aligned} 2A_3^2 = &\tfrac{4}{3}\mu p \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\sigma \kappa_\nu^\nu + \tfrac{4}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\alpha \kappa_\sigma^\alpha + 2\mu p c_\alpha^\alpha \kappa_\nu^\nu + \tfrac{8}{3}\mu c_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta - \tfrac{2}{3}\mu p(2q-p) b_\alpha^\alpha b_\nu^\nu \kappa_\delta^\delta \\ &- \tfrac{4}{3}\mu(q-p) b_\alpha^\alpha b_\delta^\nu \kappa_\nu^\delta - \tfrac{2}{3}\mu p^2 b_\beta^\beta \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\nu^\nu - \tfrac{4}{3}\mu p \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\alpha \gamma_\nu^\nu - \tfrac{2}{3}\mu p b_\beta^\alpha \mathrm{D}^\beta \mathrm{D}_\alpha \gamma_\nu^\nu \\ &- \tfrac{4}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma \gamma_\nu^\alpha \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\nu - \tfrac{4}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma b_\nu^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\sigma^\nu - \tfrac{4}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\alpha \Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma} - \tfrac{4}{3}\mu p(p-2q) b_\nu^\nu c_\alpha^\alpha \gamma_\delta^\delta \\ &- 4\mu p d_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu - \tfrac{4}{3}\mu(p-2q) b_\nu^\nu c_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta - 4\mu d_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta + \tfrac{2}{3} p \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha M_3 \\ &- \tfrac{2}{3}\mu p^2 (\tfrac{2}{\lambda} - \tfrac{1}{2\mu}) b_\nu^\nu b_\alpha^\alpha M_3 + p c_\alpha^\alpha M_3. \end{aligned}$$

Or d'après la formule (4.15) du chapitre I et les propriétés du tenseur de courbure $\widetilde{R}_{\alpha\beta\sigma\delta}$, on a

$$\mathrm{D}^\beta \mathrm{D}_\alpha T^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}^\beta T^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta},$$

pour $T_{\alpha\beta}$ un champ de tenseur surfacique. Puisque $\Lambda_{\alpha\beta} = \mathrm{Ab}(\gamma)_{\alpha\beta} - \mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta}$ et que par définition $\mathrm{Ab}(\gamma)$ est antisymétrique, on a donc que

$$\mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\alpha \Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = -\mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}^\alpha \,\mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\sigma}.$$

On en déduit l'expression suivante pour l'opérateur A_3^2 , composante transverse de l'opérateur $\boldsymbol{A}^2$:

$$
\begin{aligned}
A_3^2 = {} & \tfrac{2}{3}\mu p \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \kappa_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\alpha \kappa_\sigma^\alpha + \mu p c_\alpha^\alpha \kappa_\nu^\nu + \tfrac{4}{3}\mu c_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta + \tfrac{1}{3}\mu p(p-2q) b_\alpha^\alpha b_\beta^\beta \kappa_\nu^\nu \\
& + \tfrac{2}{3}\mu(p-q) b_\alpha^\alpha b_\beta^\nu \kappa_\nu^\beta - \tfrac{1}{3}\mu p^2 b_\beta^\beta \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\nu^\nu - \tfrac{2}{3}\mu p \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\alpha \gamma_\nu^\nu - \tfrac{1}{3}\mu p b_\beta^\alpha \mathrm{D}^\beta \mathrm{D}_\alpha \gamma_\nu^\nu \\
& - \tfrac{2}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma \gamma_\nu^\alpha \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\nu - \tfrac{2}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma b_\nu^\alpha \mathrm{D}_\alpha \gamma_\sigma^\nu + \tfrac{2}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\alpha \operatorname{Sb}(\omega)_\sigma^\alpha + \tfrac{2}{3}\mu p(2q-p) b_\nu^\nu c_\alpha^\alpha \gamma_\beta^\beta \\
& - 2\mu p d_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu(2q-p) b_\alpha^\alpha c_\beta^\nu \gamma_\nu^\beta - 2\mu d_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta + \tfrac{1}{3} p \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha M_3 \\
& + \tfrac{1}{3}\mu p^2 (\tfrac{1}{2\mu} - \tfrac{2}{\lambda}) b_\nu^\nu b_\alpha^\alpha M_3 + \tfrac{1}{2} p c_\alpha^\alpha M_3.
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

Cet opérateur est d'ordre 4 en z_3 et 3 en z_σ . Rappelons que le tenseur $\kappa_{\alpha\beta}$ vaut $\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha\theta_\beta + \mathrm{D}_\beta\theta_\alpha)$, où $\theta_\alpha(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\alpha z_3 + b_\alpha^\beta z_\beta$.

Remarquons que les ordres de dérivations de l'opérateur $\boldsymbol{A}^2$ s'écrivent

$$\deg \boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.4 Opérateurs sur le second membre

On calcule maintenant les opérateurs $\boldsymbol{G}^1$, $\boldsymbol{Q}^3$ et $\boldsymbol{G}^2$ de la réduction canonique. Rappelons qu'on a

$$\boldsymbol{G}^0(\boldsymbol{f}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{f}(x_3)\,\mathrm{d}x_3, \tag{3.52}$$

et (voir l'équation (2.14))

$$\boldsymbol{Q}^2(\boldsymbol{f}) = \int_0^{x_3} \Big(\int_{-1}^{u} \boldsymbol{\ell}^{-1}\big(\mathscr{I}\boldsymbol{G}^0\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}\big)(t)\,\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}u. \tag{3.53}$$

En vue de simplifier les équations, on introduit l'opérateur suivant :

Définition 3.5 On définit l'opérateur

$$\boldsymbol{m} : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big),$$

tel que si $\boldsymbol{f} \in \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$, alors on a

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{\ell}^{-1}\big(\mathscr{I}\boldsymbol{G}^0(\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{f}\big), \tag{3.54}$$

avec $\boldsymbol{\ell}^{-1}(\boldsymbol{u}) = \big(\frac{1}{\mu}u_\sigma, \frac{1}{\lambda+2\mu}u_3\big)$. ∎

On a donc l'équation

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{\ell}^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x_3\right) - \boldsymbol{f}\right).$$

L'opérateur $\boldsymbol{Q}^2$ s'écrit donc simplement

$$\boldsymbol{Q}^2(\boldsymbol{f}) = \int_0^{x_3}\int_{-1}^{u}\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u. \tag{3.55}$$

Rappelons que les opérateurs $\boldsymbol{Q}^k$ et $\boldsymbol{G}^k$ vérifient pour tout k les équations (2.13), et que les opérateurs $\boldsymbol{G}^k$ sont déterminés par l'équation (2.16).

Pour $n = 3$, les équations (2.13) s'écrivent, compte tenu du fait que $\boldsymbol{Q}^0$ et $\boldsymbol{Q}^1$ sont les opérateurs nuls

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{L}^0\boldsymbol{Q}^3 + \boldsymbol{L}^1\boldsymbol{Q}^2 & = & \mathscr{I}\boldsymbol{G}^1, \\ \boldsymbol{B}^0\boldsymbol{Q}^3 + \boldsymbol{B}^1\boldsymbol{Q}^2 & = & 0. \end{array}\right. \tag{3.56}$$

Or on a d'après l'équation (1.12),

$$L^1_\sigma(\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f}) = -\textstyle\int_{-1}^{x_3}\mu b^\alpha_\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u + \int_{-1}^{x_3}(\lambda+\mu)\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u - x_3\mu b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f}), \tag{3.57}$$

et

$$L^1_3(\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f}) = -\textstyle\int_{-1}^{x_3}\mu b^\alpha_\alpha m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u + \int_{-1}^{x_3}(\lambda+\mu)\gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}u. \tag{3.58}$$

De même, d'après l'équation (1.13), on a

$$\begin{aligned} B^1_\sigma(\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f}) = {} & \textstyle\int_0^{x_3}\int_{-1}^{u}\mu\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\big|_{\Gamma_\pm} \\ & + \textstyle\int_0^{x_3}\int_{-1}^{u}\mu b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\big|_{\Gamma_\pm} - \mu x_3 b^\alpha_\sigma\int_{-1}^{x_3}m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\big|_{\Gamma_\pm}, \end{aligned} \tag{3.59}$$

et

$$B^1_3(\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f}) = \textstyle\int_0^{x_3}\int_{-1}^{u}\lambda\gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\big|_{\Gamma_\pm}. \tag{3.60}$$

Rappelons que d'après la formule (2.16), on a

$$2\boldsymbol{G}^1\boldsymbol{f} = \int_{-1}^{1}\boldsymbol{L}^1\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x_3 - \Big[\boldsymbol{B}^1\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f}\Big]_{-1}^{+1}.$$

On trouve donc pour les composantes surfaciques des équations précédentes :

$$
\begin{aligned}
2G^1_\sigma \boldsymbol{f} = &- \textstyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^{x_3} \mu b^\alpha_\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 + \int_{-1}^1 \int_{-1}^{x_3} (\lambda+\mu)\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\
&- \textstyle\int_{-1}^1 x_3 \mu b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}x_3 - \int_0^1 \int_{-1}^u \mu \mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \int_{-1}^u \mu b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\
&+ \textstyle\mu b^\alpha_\sigma \int_{-1}^1 m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u - \int_{-1}^0 \int_{-1}^u \mu \mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u - \int_{-1}^0 \int_{-1}^u \mu b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
2G^1_\sigma \boldsymbol{f} = &- \textstyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^{x_3} \mu b^\alpha_\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 + \int_{-1}^1 \int_{-1}^{x_3} \lambda \mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\
&- \textstyle\int_{-1}^1 x_3 \mu b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}x_3 - \int_{-1}^1 \int_{-1}^u \mu b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u + \int_{-1}^1 \mu b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

Or on a en intégrant par parties

$$
\begin{aligned}
\textstyle\int_{-1}^1 x_3 \mu b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}x_3 &= \textstyle\big[x_3 \int_{-1}^{x_3} \mu b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\big]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^1 \int_{-1}^{x_3} \mu b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\
&= \textstyle\int_{-1}^1 \mu b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u - \int_{-1}^1 \int_{-1}^{x_3} \mu b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3.
\end{aligned}
$$

On trouve donc finalement

$$
G^1_\sigma(\boldsymbol{f}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \Big(\int_{-1}^{x_3} \big(\lambda \mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f}) - \mu b^\alpha_\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})\big)\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}x_3. \tag{3.61}
$$

De même, pour la composante transverse, on trouve

$$
\begin{aligned}
2G^1_3(\boldsymbol{f}) = &- \textstyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^{x_3} \mu b^\alpha_\alpha m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 + \int_{-1}^1 \int_{-1}^{x_3} (\lambda+\mu)\gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\
&- \textstyle\int_0^1 \int_{-1}^u \lambda \gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u - \int_{-1}^0 \int_{-1}^u \lambda \gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}
$$

et on en déduit que

$$
G^1_3(\boldsymbol{f}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \Big(\int_{-1}^{x_3} \big(\mu \gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big) - \mu b^\alpha_\alpha m_3(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}x_3. \tag{3.62}
$$

On remarque que l'opérateur $\boldsymbol{G}^1$ se factorise à travers l'opérateur $\boldsymbol{m}$: on a $\boldsymbol{G}^1(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{R}^1\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)$, où $\boldsymbol{R}^1$ est donné à partir des équations (3.61) et (3.62). Les ordres de dérivation de l'opérateur $\boldsymbol{R}^1$ se représentent par l'équation

$$
\deg \boldsymbol{R}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Ces ordres sont exactement ceux de la majoration (2.35) pour l'opérateur $\boldsymbol{G}^1$.

Comme pour l'opérateur $\boldsymbol{V}^3$, il suffit de calculer $[\boldsymbol{Q}^3\boldsymbol{f}]_{-1}^{+1}$. D'après les équations (3.56), (3.57), (3.59) et (3.61) on trouve que que Q_σ^3 vérifie les équations

$$\begin{aligned}
\mu\partial_{33}Q_\sigma^3\boldsymbol{f} &= \textstyle\int_{-1}^{x_3}\mu b_\alpha^\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u - \int_{-1}^{x_3}(\lambda+\mu)\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u + x_3\mu b_\sigma^\alpha m_\alpha(\boldsymbol{f})\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\textstyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x_3}\big(\lambda\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})-\mu b_\alpha^\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \quad \text{dans} \quad \Omega,\\
\mu\partial_3 Q_\sigma^3\boldsymbol{f} &= -\textstyle\int_0^{x_3}\int_{-1}^{u}\mu\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u - \int_0^{x_3}\int_{-1}^{u}\mu b_\sigma^\alpha m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\\
&\quad+\mu x_3 b_\sigma^\alpha\textstyle\int_{-1}^{x_3}m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm.
\end{aligned}$$

En intégrant les équations à l'intérieur et en utilisant la condition en $x_3=-1$, on trouve

$$\begin{aligned}
\mu\partial_3 Q_\sigma^3\boldsymbol{f} &= \textstyle\int_{-1}^{x_3}\int_{-1}^{u}\mu b_\alpha^\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u - \int_{-1}^{x_3}\int_{-1}^{u}(\lambda+\mu)\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\\
&\quad+\textstyle\int_{-1}^{x_3}u\mu b_\sigma^\alpha m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u + \tfrac{1}{2}(x_3+1)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{u}\big(\lambda\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})-\mu b_\alpha^\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\\
&\quad+\textstyle\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{u}\mu\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u + \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{u}\mu b_\sigma^\alpha m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Or en intégrant par parties on trouve l'équation suivante

$$\textstyle\int_{-1}^{0}u\mu b_\sigma^\alpha m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u = \big[x_3\int_{-1}^{x_3}\mu b_\sigma^\alpha m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{x_3}\mu b_\sigma^\alpha m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u.$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
\mu\partial_3 Q_\sigma^3\boldsymbol{f} &= \textstyle\int_{-1}^{x_3}\int_{-1}^{u}\big(\mu b_\alpha^\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})-\lambda\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u - \int_0^{x_3}\int_{-1}^{u}\mu\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\\
&\quad-\tfrac{1}{2}(x_3+1)\textstyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{u}\big(\mu b_\alpha^\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})-\lambda\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u + \int_0^{x_3}\mu u b_\sigma^\alpha m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

En intégrant entre -1 et $+1$, on trouve

$$\begin{aligned}
\big[\partial_3 Q_\sigma^3\boldsymbol{f}\big]_{-1}^{+1} &= \textstyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x_3}\int_{-1}^{u}\big(b_\alpha^\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})-\frac{\lambda}{\mu}\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3\\
&\quad-\textstyle\int_{-1}^{1}\int_0^{x_3}\int_{-1}^{u}\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3\\
&\quad-\textstyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{u}\big(b_\alpha^\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})-\frac{\lambda}{\mu}\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u + \int_{-1}^{1}\int_0^{x_3}u b_\sigma^\alpha m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3.
\end{aligned}$$

Or en intégrant par parties on a l'équation

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x_3}\int_{-1}^{u}\big(b_\alpha^\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})-\frac{\lambda}{\mu}\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3\\
&\qquad\qquad-\textstyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{u}\big(b_\alpha^\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})-\frac{\lambda}{\mu}\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\\
&\qquad\qquad\qquad=\textstyle\int_{-1}^{1}x_3\int_{-1}^{x_3}\big(\frac{\lambda}{\mu}\mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})-b_\alpha^\alpha m_\sigma(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3. \quad (3.63)
\end{aligned}$$

En définitive, on trouve donc

$$
\begin{aligned}
[Q^3_\sigma \boldsymbol{f}]^{+1}_{-1} = \textstyle\int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} (\frac{\lambda}{\mu} \mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f}) - b^\alpha_\alpha m_\sigma)(\boldsymbol{f})\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x_3 \\
- \textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u \mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x_3 + \int_{-1}^1 \int_0^{x_3} u b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f})\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x_3. \quad (3.64)
\end{aligned}
$$

De même, en utilisant les équations (3.58), (3.60) et (3.62), les composantes transverses des équations (3.56) s'écrivent

$$
\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu)\partial_{33} Q^3_3 \boldsymbol{f} &= \textstyle\int_{-1}^{x_3} \mu b^\alpha_\alpha m_3(\boldsymbol{f})\, \mathrm{d}u - \int_{-1}^{x_3} (\lambda+\mu)\gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)\, \mathrm{d}u \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \textstyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^u \big(\mu\gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big) - \mu b^\alpha_\alpha m_3(\boldsymbol{f})\big)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u \quad \text{dans} \quad \Omega. \\
(\lambda + 2\mu)\partial_3 Q^3_3 \boldsymbol{f} &= - \textstyle\int_0^{x_3} \int_{-1}^u \lambda\gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big) \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm.
\end{aligned}
$$

En intégrant l'équation à l'intérieur et en utilisant la condition en -1, on trouve

$$
\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu)\partial_3 Q^3_3 \boldsymbol{f} &= \textstyle\int_{-1}^{x_3} \int_{-1}^u \mu b^\alpha_\alpha m_3(\boldsymbol{f})\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u - \int_{-1}^{x_3} \int_{-1}^u (\lambda+\mu)\gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(x_3+1) \textstyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^u \big(\mu\gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big) - \mu b^\alpha_\alpha m_3(\boldsymbol{f})\big)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u \\
&\quad + \textstyle\int_{-1}^0 \int_{-1}^u \lambda\gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big) \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

On en déduit par intégration entre -1 et $+1$ que

$$
\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu)[Q^3_3 \boldsymbol{f}]^{+1}_{-1} &= \textstyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^{x_3} \int_{-1}^u \big(\mu b^\alpha_\alpha m_3(\boldsymbol{f}) - \mu\gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)\big)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x_3 \\
&\quad + \textstyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^{x_3} \big(\mu\gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big) - \mu b^\alpha_\alpha m_3(\boldsymbol{f})\big)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x_3 \\
&\quad - \textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u \lambda\gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x_3.
\end{aligned}
$$

En utilisant une intégration par partie analogue à (3.63), on trouve en définitive

$$
\begin{aligned}
[Q^3_3 \boldsymbol{f}]^{+1}_{-1} = -\textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u p\gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x_3 \\
+ \textstyle\int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} \frac{q}{2}\big(\gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big) - b^\alpha_\alpha m_3(\boldsymbol{f})\big)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x_3. \quad (3.65)
\end{aligned}
$$

Remarquons que les ordres de dérivations de l'opérateur $\boldsymbol{Q}^3$ s'écrivent

$$
\deg \boldsymbol{Q}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Ces ordres correspondent à la majoration (2.33).

On étudie maintenant l'opérateur $\boldsymbol{G}^2$. D'après l'équation (2.16), et compte tenu du fait que $\boldsymbol{Q}^0$ et $\boldsymbol{Q}^1$ sont les opérateurs nul, il est donné par l'équation

$$
2\boldsymbol{G}^2 \boldsymbol{f} = \int_{-1}^1 \big(\boldsymbol{L}^1 \boldsymbol{Q}^3 \boldsymbol{f} + \boldsymbol{L}^2 \boldsymbol{Q}^2 \boldsymbol{f}\big) \mathrm{d}x_3 - \Big[\boldsymbol{B}^1 \boldsymbol{Q}^3 \boldsymbol{f} + \boldsymbol{B}^2 \boldsymbol{Q}^2 \boldsymbol{f}\Big]^{+1}_{-1}. \qquad (3.66)
$$

Comme pour les équations (3.34) et (3.35), on a les équations suivantes :

$$\int_{-1}^{1} L_\sigma^1(\boldsymbol{Q}^3\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}x_3 - \Big[B_\sigma^1(\boldsymbol{Q}^3\boldsymbol{f})\Big]_{-1}^{+1} = \lambda \mathrm{D}_\sigma [Q_3^3\boldsymbol{f}]_{-1}^{+1} - \mu b_\alpha^\alpha [Q_\sigma^3\boldsymbol{f}]_{-1}^{+1}, \tag{3.67}$$

et

$$\int_{-1}^{1} L_3^1(\boldsymbol{Q}^3\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}x_3 - \Big[B_3^1(\boldsymbol{Q}^3\boldsymbol{f})\Big]_{-1}^{+1} = \mu \mathrm{D}^\alpha [Q_\alpha^3\boldsymbol{f}]_{-1}^{+1} - 2\mu b_\alpha^\alpha [Q_3^3\boldsymbol{f}]_{-1}^{+1}. \tag{3.68}$$

Remarquons que les expressions des opérateurs $\boldsymbol{Q}^3$ et $\boldsymbol{Q}^2$ ainsi que les équations (3.66) montrent que l'opérateur $\boldsymbol{G}^2$ se factorise à travers l'opérateur $\boldsymbol{m}$: il existe un opérateur $\boldsymbol{R}^2$ tel que pour tout $\boldsymbol{f}$, on ait

$$\boldsymbol{G}^2\boldsymbol{f} = \boldsymbol{R}^2\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big).$$

Considérons tout d'abord les composantes surfaciques de l'opérateur G_σ^2. Les équations (3.67), (3.64) et (3.65) montrent que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} L_\sigma^1(\boldsymbol{Q}^3\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}x_3 - \Big[B_\sigma^1(\boldsymbol{Q}^3\boldsymbol{f})\Big]_{-1}^{+1} &= -\textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u \lambda p \mathrm{D}_\sigma \gamma_\alpha^\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3\\ &+ \textstyle\int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} \big(\mu p \mathrm{D}_\sigma \gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{m}) - \mu p \mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha m_3\big)(\boldsymbol{f}), \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_3\\ &- \textstyle\int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} (\lambda b_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma m_3 - \mu b_\beta^\beta b_\alpha^\alpha m_\sigma)(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_3\\ &+ \textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u \mu b_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 - \int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \mu u b_\nu^\nu b_\sigma^\alpha m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3.\end{aligned}$$

En regroupant les termes, on trouve donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} L_\sigma^1(\boldsymbol{Q}^3\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}x_3 - \Big[B_\sigma^1(\boldsymbol{Q}^3\boldsymbol{f})\Big]_{-1}^{+1} &= -\textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \mu u b_\nu^\nu b_\sigma^\alpha m_\alpha(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3\\ &+ \textstyle\int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} \big[\mu p \mathrm{D}_\sigma \gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{m}) - \mu p \mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha m_3 - \lambda b_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma m_3 + \mu b_\beta^\beta b_\alpha^\alpha m_\sigma\big](\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_3\\ &+ \textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u \big[-\lambda p \mathrm{D}_\sigma \gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{m}) + \mu b_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma m_3\big](\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'équation (3.4) et l'expression de $\boldsymbol{Q}^2$, on a

$$\begin{aligned}L_\sigma^2(\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f}) &= \mu x_3 \textstyle\int_{-1}^{x_3} \big[b_\alpha^\alpha b_\sigma^\beta m_\beta - c_\alpha^\alpha m_\sigma\big](\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\\ &+ \textstyle\int_0^{x_3} \int_{-1}^u \big[-\mu b_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma m_3 - \mu b_\alpha^\alpha b_\sigma^\beta m_\beta + \lambda \mathrm{D}_\sigma \gamma_\nu^\nu(\boldsymbol{m}) + 2\mu \mathrm{D}_\alpha \gamma_\sigma^\alpha(\boldsymbol{m})\big](\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Grâce au fait que B_σ^2 est l'opérateur nul, on trouve donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} L_\sigma^2(\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}x_3 - \Big[B_\sigma^2(\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f})\Big]_{-1}^{+1} &= \textstyle\int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} \big[\mu b_\alpha^\alpha b_\sigma^\beta m_\beta - \mu c_\alpha^\alpha m_\sigma\big](\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3\\ &+ \textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u \big[-\mu b_\alpha^\alpha \mathrm{D}_\sigma m_3 - \mu b_\alpha^\alpha b_\sigma^\beta m_\beta + \lambda \mathrm{D}_\sigma \gamma_\nu^\nu(\boldsymbol{m}) + 2\mu \mathrm{D}_\alpha \gamma_\sigma^\alpha(\boldsymbol{m})\big](\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3.\end{aligned}$$

En définitive, les composantes surfaciques de l'équation (3.66) montrent que l'opérateur R^2_σ tel que $R^2_\sigma(\boldsymbol{m}) = G^2_\sigma$ s'écrit

$$\begin{aligned}
2R^2_\sigma(\boldsymbol{m}) = &-\textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \mu u b^\nu_\nu b^\alpha_\sigma m_\alpha \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\
&+ \textstyle\int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} \big[\mu p \mathrm{D}_\sigma \gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{m}) - \mu p \mathrm{D}_\sigma b^\alpha_\alpha m_3 - \lambda b^\alpha_\alpha \mathrm{D}_\sigma m_3 + \mu b^\beta_\beta b^\alpha_\alpha m_\sigma\big] \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_3 \\
&+ \textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u \big[- \lambda p \mathrm{D}_\sigma \gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{m}) + \mu b^\alpha_\alpha \mathrm{D}_\sigma m_3\big] \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\
&+ \textstyle\int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} \big[\mu b^\alpha_\alpha b^\beta_\sigma m_\beta - \mu c^\alpha_\alpha m_\sigma\big] \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\
&+ \textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u \big[- \mu b^\alpha_\alpha \mathrm{D}_\sigma m_3 - \mu b^\alpha_\alpha b^\beta_\sigma m_\beta + \lambda \mathrm{D}_\sigma \gamma^\nu_\nu(\boldsymbol{m}) + 2\mu \mathrm{D}_\alpha \gamma^\alpha_\sigma(\boldsymbol{m})\big] \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3.
\end{aligned}$$

Or par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
x_3 \textstyle\int_{-1}^{x_3} \mu b^\alpha_\alpha b^\beta_\sigma m_\beta \,\mathrm{d}u &= \big[x_3 \textstyle\int_{-1}^{x_3} \mu b^\alpha_\alpha b^\beta_\sigma m_\beta \,\mathrm{d}u\big]_0^{x_3} \\
&= \textstyle\int_0^{x_3} u \mu b^\alpha_\alpha b^\beta_\sigma m_\beta \,\mathrm{d}u + \int_0^{x_3} \int_{-1}^u \mu b^\alpha_\alpha b^\beta_\sigma m_\beta \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

En définitive, en utilisant le fait que

$$(\lambda - \lambda p)\mathrm{D}_\sigma \gamma^\nu_\nu(\boldsymbol{m}) + 2\mu \mathrm{D}_\alpha \gamma^\alpha_\sigma(\boldsymbol{m}) = -M_\sigma(\boldsymbol{m}),$$

où M_σ est la composante surfacique de l'opérateur de membrane, on trouve

$$\begin{aligned}
R^2_\sigma(\boldsymbol{m}) = &\tfrac{1}{2} \textstyle\int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} \big[- \mu p \mathrm{D}_\sigma b^\alpha_\alpha m_3 + \mu b^\nu_\nu b^\alpha_\alpha m_\sigma - \lambda b^\alpha_\alpha \mathrm{D}_\sigma m_3 + \mu p \mathrm{D}_\sigma \gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{m})\big] \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_3 \\
&- \tfrac{1}{2} \textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u M_\sigma(\boldsymbol{m}) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 - \tfrac{1}{2}\mu c^\alpha_\alpha \int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} m_\sigma \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_3.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Enfin, calculons la composante transverse de l'opérateur $\boldsymbol{R}^2$: les équations (3.68), (3.64) et (3.65) montrent que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 L^1_3(\boldsymbol{Q}^3\boldsymbol{f}) \,\mathrm{d}x_3 - \Big[B^1_3(\boldsymbol{Q}^3\boldsymbol{f})\Big]_{-1}^{+1} = &\textstyle\int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} (\lambda \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\sigma m_3 - \mu \mathrm{D}^\sigma b^\alpha_\alpha m_\sigma)(\boldsymbol{f}) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_3 \\
&- \textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u \mu \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\sigma m_3(\boldsymbol{f}) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 + \int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \mu u \mathrm{D}^\sigma b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f}) \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\
&+ \textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u 2\mu p b^\nu_\nu \gamma^\alpha_\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\
&- \textstyle\int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} \frac{q}{2}\big(2\mu b^\nu_\nu \gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{m}) - 2\mu b^\nu_\nu b^\alpha_\alpha m_3\big)(\boldsymbol{f}) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_3,
\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 L^1_3(\boldsymbol{Q}^3\boldsymbol{f}) \,\mathrm{d}x_3 - \Big[B^1_3(\boldsymbol{Q}^3\boldsymbol{f})\Big]_{-1}^{+1} = &\textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \mu u \mathrm{D}^\sigma b^\alpha_\sigma m_\alpha(\boldsymbol{f}) \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\
&+ \textstyle\int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} \big[\lambda \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\sigma m_3 - \mu \mathrm{D}^\sigma b^\alpha_\alpha m_\sigma - \mu q b^\nu_\nu \gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{m}) + \mu q b^\nu_\nu b^\alpha_\alpha m_3\big](\boldsymbol{f}) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_3 \\
&+ \textstyle\int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u \big[2\mu p b^\nu_\nu \gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{m}) - \mu \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\sigma m_3\big](\boldsymbol{f}) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

D'autre part, d'après les équations (3.4) et (3.5) et l'expression (3.55) de l'opérateur $\boldsymbol{Q}^2$, on a

$$L_3^2(\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f}) = x_3 \int_{-1}^{x_3} \big[-\mu c_\alpha^\alpha m_3 + (\lambda+\mu) b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{m})\big](\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u \\ + \int_0^{x_3}\int_{-1}^{u} \big[(\lambda+2\mu) b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{m}) + \mu \mathrm{D}^\alpha \theta_\alpha(\boldsymbol{m})\big](\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u.$$

et

$$B_3^2(\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f}) = x_3 \int_0^{x_3}\int_{-1}^{u} \lambda b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\Big|_{\Gamma_\pm}.$$

On trouve donc

$$\int_{-1}^{1} L_3^2(\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}x_3 - \Big[B_3^2(\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f})\Big]_{-1}^{+1} = \\ \int_{-1}^{1} x_3 \int_{-1}^{x_3} \big[-\mu c_\alpha^\alpha m_3 + (\lambda+\mu) b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{m})\big](\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\ + \int_{-1}^{1}\int_0^{x_3}\int_{-1}^{u} \big[(\lambda+2\mu) b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{m}) + \mu \mathrm{D}^\alpha \theta_\alpha(\boldsymbol{m})\big](\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\ - \int_0^1\int_{-1}^{u} \lambda b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}t\,\boldsymbol{d}u + \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{u} \lambda b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u. \tag{3.71}$$

Or, pour tout $v \in \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$, on a en intégrant par partie que

$$[x_3 \boldsymbol{v}]_{-1}^{+1} = \int_{-1}^{1} x_3 \partial_3 \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x_3 + \int_{-1}^{1} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x_3.$$

En appliquant cette équation à $\boldsymbol{v} = \int_0^{x_3}\int_{-1}^{u} \boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$, on trouve

$$\int_0^1\int_{-1}^{u} \boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u - \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{u} \boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = \\ \int_{-1}^{1} x_3 \int_{-1}^{x_3} \boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 + \int_{-1}^{1}\int_0^{x_3}\int_{-1}^{u} \boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3.$$

En appliquant à cette formule l'opérateur surfacique $\lambda b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha$, on voit que dans l'expression (3.71), les termes intégrés en $\lambda b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha\big(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})\big)$ s'annulent. On trouve donc finalement

$$\int_{-1}^{1} L_3^2(\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}x_3 - \Big[B_3^2(\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f})\Big]_{-1}^{+1} = \int_{-1}^{1} x_3 \int_{-1}^{x_3} \big[-\mu c_\alpha^\alpha m_3 + \mu b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{m})\big](\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\ + \int_{-1}^{1}\int_0^{x_3}\int_{-1}^{u} \big[2\mu b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{m}) + \mu \mathrm{D}^\alpha \theta_\alpha(\boldsymbol{m})\big](\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3. \tag{3.72}$$

En définitive, on trouve grâce aux équations (3.70) et (3.72) que l'opérateur R_3^2 tel que $R_3^2(\boldsymbol{m}) = G_3^2$ s'écrit

$$\begin{aligned}2R_3^2(\boldsymbol{m}) &= \int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \mu u \mathrm{D}^\sigma b_\sigma^\alpha m_\alpha \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\ &+ \int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} \big[\lambda \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\sigma m_3 - \mu \mathrm{D}^\sigma b_\alpha^\alpha m_\sigma - \mu q b_\nu^\nu \gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{m}) + \mu q b_\nu^\nu b_\alpha^\alpha m_3\big]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_3 \\ &+ \int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u \big[2\mu p b_\nu^\nu \gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{m}) - \mu \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\sigma m_3\big]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\ &+ \int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^{x_3} \big[-\mu c_\alpha^\alpha m_3 + \mu b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{m})\big]\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\ &+ \int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u \big[2\mu b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{m}) + \mu \mathrm{D}^\alpha \theta_\alpha(\boldsymbol{m})\big]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$2\mu p b_\alpha^\alpha \gamma_\beta^\beta(\boldsymbol{m}) + 2\mu b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{m}) = -M_3(\boldsymbol{m})$$

et que

$$-\mu q b_\nu^\nu \gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{m}) = -\mu q b_\nu^\nu \mathrm{D}^\alpha m_\alpha + \mu q b_\nu^\nu b_\alpha^\alpha m_3,$$

ainsi que le fait que $\theta_\alpha(\boldsymbol{v}) = \mathrm{D}_\alpha v_3 + b_\alpha^\beta v_\beta$ pour tout champ $\boldsymbol{v}$, on trouve finalement

$$\begin{aligned}R_3^2(\boldsymbol{m}) = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^1 x_3 \int_{-1}^u \big[&-\mu q b_\nu^\nu \mathrm{D}^\alpha m_\alpha - \mu \mathrm{D}^\alpha b_\nu^\nu m_\alpha + \lambda \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha m_3 + 2\mu q b_\nu^\nu b_\alpha^\alpha m_3 \\ &+ \mu b_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta(\boldsymbol{m}) - \mu c_\alpha^\alpha m_3\big]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_3 + \tfrac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \int_{-1}^u \big[\mu \mathrm{D}^\alpha b_\alpha^\nu m_\nu - M_3(\boldsymbol{m})\big]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x_3 \\ &+ \tfrac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{x_3} \mu t \mathrm{D}^\alpha b_\alpha^\nu m_\nu \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_3.\end{aligned} \tag{3.73}$$

Remarquons que d'après les équations (3.69) et (3.73), les ordres de l'opérateur $\boldsymbol{R}^2$ s'écrivent

$$\deg \boldsymbol{R}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.5 Récapitulation des expressions

On rappelle que d'après la définition 3.1, l'opérateur $\boldsymbol{M}$ de membrane est donné par l'équation

$$\begin{cases} M_\sigma := -\widetilde{\lambda} \mathrm{D}_\sigma \gamma_\alpha^\alpha - 2\mu \mathrm{D}_\alpha \gamma_\sigma^\alpha, \\ M_3 := -\widetilde{\lambda} b_\alpha^\alpha \gamma_\beta^\beta - 2\mu b_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta. \end{cases}$$

Dans cette section, on a donc montré le résultat suivant :

Théorème 3.6 *La réduction canonique* $\big(\boldsymbol{V}[\varepsilon], \boldsymbol{Q}[\varepsilon], \boldsymbol{A}[\varepsilon], \boldsymbol{G}[\varepsilon]\big)$ *possède les propriétés suivantes :*

- *La série formelle* $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$ *a pour premiers termes*

$$\boldsymbol{V}^0 = \mathscr{I} \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{V}^1(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} -x_3\theta_\sigma(\boldsymbol{z}), \\ -x_3 p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}), \end{cases} \tag{3.74}$$

et

$$\boldsymbol{V}^2(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} \dfrac{x_3^2}{2} p\mathrm{D}_\sigma\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}), \\ \dfrac{x_3^2}{2}\big(p\kappa_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) + \dfrac{p}{2\mu}M_3(\boldsymbol{z})\big). \end{cases} \tag{3.75}$$

- *La série formelle* $\boldsymbol{A}[\varepsilon]$ *a pour premiers termes*

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{M}, \qquad \boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{0}, \tag{3.76}$$

et $\boldsymbol{A}^2$ *l'opérateur défini par les équations* (3.46) *et* (3.51)*.*

- *La série formelle* $\boldsymbol{G}[\varepsilon]$ *a pour premier terme*

$$\boldsymbol{G}^0(\boldsymbol{f}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{f}(x_3)\,\mathrm{d}x_3, \tag{3.77}$$

et la série formelle opérateur $\boldsymbol{G}[\varepsilon] - \boldsymbol{G}^0$ *se factorise à travers l'opérateur* $\boldsymbol{m}$ *défini par l'équation* (3.54) *: il existe une série formelle opérateur* $\boldsymbol{R}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 1}\varepsilon^k\boldsymbol{R}^k$ *telle que les opérateurs* $\boldsymbol{R}^\ell$ *possèdent les mêmes ordres de dérivation que les opérateurs* $\boldsymbol{G}^\ell$ *pour* $\ell \geq 1$*, et telle que si* $\boldsymbol{f}$ *est un champ de 1-forme* 3D*, alors on a*

$$\big(\boldsymbol{G}[\varepsilon] - \boldsymbol{G}^0\big)(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{R}[\varepsilon]\boldsymbol{m}(\boldsymbol{f}). \tag{3.78}$$

L'opérateur $\boldsymbol{R}^1$ *est alors donné par les expressions* (3.61) *et* (3.62)*, tandis que l'opérateur* $\boldsymbol{R}^2$ *est donné par les expressions* (3.69) *et* (3.73)*.*

- *La série formelle* $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ *a pour premiers termes les opérateurs* $\boldsymbol{Q}^0$ *et* $\boldsymbol{Q}^1$ *égaux aux opérateurs nuls, et l'opérateur* $\boldsymbol{Q}^2$ *donné par la formule*

$$\boldsymbol{Q}^2(\boldsymbol{f}) = \int_0^{x_3}\Big(\int_{-1}^{u} \boldsymbol{m}(\boldsymbol{f})(t)\,\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}u. \tag{3.79}$$

Comme pour la série formelle $\boldsymbol{G}[\varepsilon]$*, il existe une factorisation à travers l'opérateur* $\boldsymbol{m}$ *défini par l'équation* (3.54)*.*

Preuve. Ces propriétés découlent des calculs précédents et des équations fonctionnelles vérifiées par les opérateurs de la réduction canonique (voir le théorème 2.1). La factorisation (3.78) et la factorisation de la série formelle $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ se montrent de même par récurrence à partir des équations devant être vérifiées par les séries formelles intervenant dans le théorème. La propriété concernant les ordres de dérivation des opérateurs $\boldsymbol{R}^{\ell}$ pour $\ell \geq 1$ est alors claire. ∎

Dans la pratique, on n'utilise pas les factorisations des séries formelles $\boldsymbol{G}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$, et on travaille toujours directement avec ces séries formelles agissant sur la série formelle $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$.

Chapitre IV

Modèles bidimensionnels de coques

Le chapitre III montre que la résolution en série formelle du problème tridimensionnel de l'élasticité sur un coque se ramène à l'étude d'un *problème réduit* bidimensionnel faisant intervenir une série formelle $\boldsymbol{A}[\varepsilon]$ à coefficients opérateurs 2D. Cette série formelle possède la propriété que $\boldsymbol{A}^0$ est égal à l'opérateur de membrane $\boldsymbol{M}$, et le but des calculs du chapitre III était de donner les expressions des opérateurs $\boldsymbol{A}^1$ et $\boldsymbol{A}^2$. La série formelle $\boldsymbol{A}[\varepsilon]$ s'écrit donc

$$\boldsymbol{A}[\varepsilon] = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{A}^2 + \varepsilon^3 \boldsymbol{A}^3 + \cdots ,$$

où $\boldsymbol{A}^2$ est donné dans le chapitre précédent. Cette expression rappelle les différents modèles bidimensionnels de coques, du type de celui proposé par Koiter [35]. Ces modèles sont du type

$$\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F}, \tag{0.1}$$

où $\boldsymbol{F}$ est un *opérateur de flexion.* Le choix du "bon" opérateur de flexion a fait l'objet de nombreux articles, en particulier ceux de Koiter [35, 36], Budiansky & Sanders [6] et John [33]. Le but de ce chapitre est de dégager des propriétés d'inversibilité et de régularité que doivent vérifier ces opérateurs, et exhiber des familles d'opérateurs du type (0.1) possédant ces bonnes propriétés. On étudie tout d'abord un modèle simple, puis on définit et étudie les *modèles* 2D : ceux-ci sont dits *admissibles* s'ils sont inversibles et elliptiques au sens de Agmon, Douglis et Nirenberg. On montre alors qu'il existe une infinité de modèles 2D admissibles, et que les modèles de Koiter et Budiansky-Sanders sont des modèles 2D admissibles.

1 Le modèle standard

Dans cette section, on étudie le modèle bidimensionnel le plus simple qui soit intrinsèque : on l'appelle le *modèle* 2D *standard*. L'opérateur associé est autoadjoint et possède les bonnes propriétés d'ellipticité et d'inversibilité. La section suivante montre comment construire d'autres modèles à partir de celui-ci.

1.1 Notations

Avant de commencer l'analyse du modèle 2D proprement dite, on fixe ici les hypothèses et les notations utilisées dans la suite de ce chapitre.

Dans toute la suite, on étudie des opérateurs vivant sur la surface moyenne S_0. Comme l'indice 0 fait référence à la coque tridimensionnelle, on ne le note plus dans la suite, c'est-à-dire qu'on fait l'identification de S_0 et de la surface abstraite S. Sauf mention du contraire, on ne fait aucune hypothèse géométrique sur la surface S. Toutefois, certains résultats sont meilleurs dans le cas des coques uniformément elliptiques (voir le chapitre VI).

Dans tout ce chapitre, on suppose que $\partial S \neq \emptyset$. Le cas des surfaces sans bord n'est abordé que dans les chapitres suivants lors de l'étude des coques elliptiques.

Les résultats qui suivent font intervenir des espaces de Sobolev sur la variété S. En ce qui concerne la théorie des espaces de Sobolev sur une variété riemannienne, on peut se référer à [4]. On note $\mathrm{H}^\ell(S)$ pour $\ell \geq 0$ les espaces de Sobolev sur la surface S.

Dans les chapitres précédents, tous les champs de tenseurs considérés étaient de classe $\mathscr{C}^\infty$, comme la surface S elle-même. Soit $\boldsymbol{\zeta} = \zeta_\alpha \mathrm{d}y^\alpha$ un champ de 1-formes sur S. On vérifie alors que la notion de régularité de ce champ de 1-formes a un sens sur la surface S. En effet, dans un système de coordonnées, $\boldsymbol{\zeta}$ se représente par un couple de fonctions (ζ_1, ζ_2). Dans ce système de coordonnées locales, on peut alors dire que $\boldsymbol{\zeta}$ est de classe H^ℓ si les fonctions ζ_1 et ζ_2 sont de classe H^ℓ sur l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ correspondant à la carte locale choisie. Or cette notion est intrinsèque car la variété S est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et les changements de cartes sont donc de classe $\mathscr{C}^\infty$. La même notion de régularité est valable pour des champs de tenseurs de types quelconques.

Dans la suite, les objets maniés en permanence sont des couples $(z_\alpha \mathrm{d}y^\alpha, z_3)$ de champs de 1-formes sur S et de fonctions sur S. On utilise alors la notation suivante :

Notation 1.1 Si $\boldsymbol{z} = (z_\alpha \mathrm{d}y^\alpha, z_3)$ est un couple de champ de 1-formes sur S et de fonction sur S , alors la notation

$$\boldsymbol{z} \in \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^2(S), \tag{1.1}$$

signifie que z_3 est une fonction de classe H^2 sur S , et que le champ de 1-forme $z_\alpha \mathrm{d}y^\alpha$ est de classe H^1 sur S . ■

Dans le même esprit que la notation précédente, on peut définir l'espace $\mathrm{L}^2 \times \mathrm{L}^2 \times \mathrm{H}^1(S)$, ainsi que n'importe quel espace produit d'espaces de Sobolev, avec la nécessité que les deux premiers soient égaux.

Dans toute la suite, r désigne la distance géodésique d'un point de S au bord ∂S . D'autre part, on note s l'abscisse curviligne le long de ∂S . Si f est une fonction sur S , la notation $\partial_r f\big|_{\partial S}$ désigne donc la dérivée par rapport à la normale rentrante le long de ∂S de la fonction f , et $\partial_s f\big|_{\partial S}$ désigne la dérivée de cette fonction le long du bord ∂S .

On définit alors l'espace $\mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^2_0(S)$ des éléments $\boldsymbol{z} \in \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^2(S)$ tels que $\boldsymbol{z}\big|_{\partial S} = 0$ et $\partial_r z_3\big|_{\partial S} = 0$. Cette définition est bien intrinsèque, car la dérivée normale ∂_r possède une existence globale sur ∂S .

Enfin, on pose la définition suivante :

Définition 1.2 Soit $\boldsymbol{\zeta} = \zeta_\alpha \mathrm{d}y^\alpha$ un champ de 1-formes sur S de classe H^1 . On a alors

$$\|\boldsymbol{\zeta}\|^2_{\mathrm{H}^1(S)} = \int_S z^\alpha z_\alpha \, \mathrm{d}S + \int_S (\mathrm{D}^\alpha \zeta^\beta)(\mathrm{D}_\alpha \zeta_\beta) \, \mathrm{d}S. \tag{1.2}$$

■

De même, si $\boldsymbol{z} \in \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^2(S)$, le carré de la norme $\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^2(S)}$ est la somme de l'expression précédente appliquée à $z_\alpha \mathrm{d}y^\alpha$ et du terme

$$\|z_3\|^2_{\mathrm{H}^2(S)} = \int_S \Big(z_3^2 + (\mathrm{D}^\alpha z_3)(\mathrm{D}_\alpha z_3) + (\mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}^\beta z_3)(\mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\beta z_3) \Big) \mathrm{d}S.$$

La définition 1.2 est valable pour n'importe quelle variété, en particulier pour la variété Ω^ε , avec des dérivées covariantes ∇ et sommation sur des indices tridimensionnels, et la définition 1.2 coïncide alors avec la définition cartésienne usuelle.

1.2 Description du modèle

Rappelons que $\widetilde{\lambda} = 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}$. On définit tout d'abord l'opérateur de flexion associé au modèle bidimensionnel standard.

Définition 1.3 L'opérateur $\boldsymbol{F}^0 : \Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S) \to \Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ défini, pour $\boldsymbol{z} \in \Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$, par l'équation

$$\boldsymbol{F}^0(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} F^0_\sigma(\boldsymbol{z}) = 0, \\ F^0_3(\boldsymbol{z}) = \dfrac{1}{3}\widetilde{\lambda}\mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\beta\mathrm{D}^\beta z_3 + \dfrac{2}{3}\mu\mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}^\beta\mathrm{D}_\beta\mathrm{D}^\alpha z_3, \end{cases} \tag{1.3}$$

est un opérateur 2D appelé *opérateur intrinsèque de flexion minimal.* ■

Cet opérateur est l'opérateur intrinsèque le plus simple qui contienne les dérivations d'ordres trois et quatre en z_3 apparaissant dans la composante transverse de l'opérateur $\boldsymbol{A}^2$ (voir l'équation (3.51) du chapitre III). Rappelons que $\boldsymbol{M}$ désigne l'opérateur de membrane (voir la définition 3.1 du chapitre III). On pose alors la définition suivante :

Définition 1.4 L'opérateur $\boldsymbol{K}^0(\varepsilon) : \Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S) \to \Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ défini par

$$\boldsymbol{K}^0(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2\boldsymbol{F}^0$$

est appelé *modèle* 2D *standard.* ■

Cet opérateur est associé à la forme bilinéaire symétrique suivante :

$$a^\varepsilon(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}') = \int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\gamma_{\sigma\delta}(\boldsymbol{z}')\,\mathrm{d}S + \frac{\varepsilon^2}{3}\int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\tau_{\sigma\delta}(\boldsymbol{z}')\,\mathrm{d}S, \tag{1.4}$$

où $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{z}'$ sont dans l'espace $\Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ et où

$$M^{\alpha\beta\sigma\delta} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\delta} + \mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta}a^{\beta\sigma}). \tag{1.5}$$

Rappelons que $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ est le champ de tenseurs de changement de métrique linéarisé associé à $\boldsymbol{z}$ et donné par l'équation

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha z_\beta + \mathrm{D}_\beta z_\alpha) - b_{\alpha\beta}z_3,$$

et enfin, on définit le champ de tenseurs $\tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ par l'équation

$$\tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\beta z_3. \tag{1.6}$$

La forme bilinéaire de l'équation (1.4) se décompose en somme de deux formes bilinéaires : celle associée à l'opérateur de membrane, notée a_0 (voir l'équation (3.13) du chapitre III) et l'autre associée à l'opérateur $\boldsymbol{F}^0$ notée dans la suite

$$a_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}') = \frac{1}{3}\int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\tau_{\sigma\delta}(\boldsymbol{z}')\,\mathrm{d}S. \tag{1.7}$$

Les deux formes bilinéaires a_0 et a_1 sont positives et symétriques, et on a

$$a^\varepsilon = a_0 + \varepsilon^2 a_1.$$

1.3 Coercivité

Le modèle de Koiter est construit sur les mêmes bases que modèle précédent, mais où la forme bilinéaire a_1 est remplacée par la forme bilinéaire

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}') \mapsto \frac{1}{3} \int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta} \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) \rho_{\sigma\delta}(\boldsymbol{z}') \, \mathrm{d}S,$$

où $\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ est le champ de tenseurs de changement de courbure associé à $\boldsymbol{z}$ (voir l'équation (4.7) du chapitre I). La démonstration de la coercivité du modèle de Koiter repose sur le *lemme du mouvement rigide* (voir par exemple [50]). Ce résultat montre que si $\boldsymbol{z} \in \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^2_0(S)$ vérifie $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = 0$ et $\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = 0$, alors $\boldsymbol{z} = 0$. On montre ici l'analogue pour le modèle 2D standard défini dans la sous-section précédente :

Lemme 1.5 *Soit* $\boldsymbol{z} \in \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^2(S)$ *tel que*

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = 0 \quad \textit{et} \quad z_i\big|_{\partial S} = \partial_r z_3\big|_{\partial S} = 0,$$

alors $\boldsymbol{z} = 0$ *sur* S.

Preuve. On verra dans la sous-section suivante que l'opérateur associé à la forme bilinéaire a^ε est elliptique au sens de Agmon, Douglis et Nirenberg pour les conditions aux limites de Dirichlet associées. En particulier, le noyau de cet opérateur est constitué de fonctions $\mathscr{C}^\infty$. Or des fonctions vérifiant les conditions du lemme sont dans le noyau de cet opérateur. Il suffit donc de montrer le résultat pour $\boldsymbol{z} \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$. Considérons alors le champ de vecteurs qui s'écrit dans un système de coordonnées $\{y^\alpha\}$,

$$Y = (\mathrm{D}^\alpha z_3) \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

Ce champ de vecteurs n'est autre que le gradient de la fonction z_3 et définit donc un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur S. Si $c(t)$ est une courbe suffisamment régulière tracée sur la surface S, on peut former le champ de vecteurs $Y(c(t))$ le long de la courbe c. Notons $X(t) = c'(t)$ qui est un champ de vecteurs le long de $c(t)$. Dans un système de coordonnées $\{y^\alpha\}$, on note $X^\alpha(t)$ les coordonnées du champ de vecteurs $X(t)$ et Y^α les coordonnées de Y. On a alors

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \big\langle Y, Y \big\rangle &= 2 \big\langle \mathrm{D}_{c'(t)} Y, Y \big\rangle \\
&= 2 X^\alpha(t) (\mathrm{D}_\alpha Y_\beta)_{c(t)} (Y^\beta)_{c(t)} \\
&= 2 X^\alpha(t) (\mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\beta z_3)_{c(t)} (\mathrm{D}^\beta z_3)_{c(t)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

où le produit scalaire est le produit scalaire sur S issu de la métrique $a_{\alpha\beta}$. Donc la norme du champ de vecteurs Y est constante sur toute courbe (le champ de vecteurs Y est parallèle le long de toute courbe tracée sur S, voir la définition 2.8 du chapitre I). Puisque S est connexe par arcs, si P est un point de S, il peut toujours être joint à un point Q du bord ∂S par une courbe $c(t)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. La valeur de la norme de Y en P est donc la norme de Y en Q. Or on a par définition $\partial_r z_3\big|_{\partial S} = 0$, et puisque z_3 est nul sur ∂S, on a aussi $\partial_s z_3\big|_{\partial S} = 0$, où s désigne l'abscisse curviligne le long du bord. Or les champs de vecteurs

$$\frac{\partial}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial s}$$

sur ∂S forment une base de l'espace tangent le long du bord. On en déduit donc que Y est nul sur ∂S, et donc $Y = 0$ sur toute la surface S.

Pour toute courbe $c(t)$ tracée sur S, la fonction $z_3(c(t))$ vérifie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z_3(c(t)) = \big\langle \operatorname{grad} z_3, c'(t)\big\rangle = \big\langle Y, c'(t)\big\rangle = 0.$$

On en déduit, par le même type de raisonnement que précédemment, que z_3 est constante sur S, et grâce aux conditions au bord, que $z_3 = 0$ sur S. Il suffit donc de montrer le fait que $\overline{\gamma}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}_*) := \frac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha z_\beta + \mathrm{D}_\beta z_\alpha) = 0$ implique que $\boldsymbol{z}_* = z_\alpha \mathrm{d}y^\alpha = 0$ sur S (avec les conditions aux limites $z_\alpha = 0$ sur ∂S). Ce résultat constitue le lemme 1.6 ci-dessous, ce qui achève la démonstration du lemme 1.5. ∎

Lemme 1.6 *Soit* $\boldsymbol{z}_* = z_\alpha \mathrm{d}y^\alpha \in \Gamma(T_1 S)$ *un champ de 1-formes sur* S. *Alors on a*

$$\left.\begin{array}{rcl} \overline{\gamma}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}_*) := \frac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha z_\beta + \mathrm{D}_\beta z_\alpha) & = & 0 \\ \boldsymbol{z}_*\big|_{\partial S} & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{z}_* = 0 \quad \textit{sur} \quad S. \tag{1.8}$$

Preuve du lemme 1.6. Soit (x_1, x_2) un système de coordonnées sur un ouvert de S. L'équation $\overline{\gamma}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}_*) = 0$ s'écrit dans ce système de coordonnées

$$\begin{array}{rcl} \partial_1 z_1 & = & \Gamma^1_{11} z_1 + \Gamma^2_{11} z_2, \\ \partial_2 z_2 & = & \Gamma^1_{22} z_1 + \Gamma^2_{22} z_2, \\ \frac{1}{2}(\partial_1 z_2 + \partial_2 z_1) & = & \Gamma^1_{12} z_1 + \Gamma^2_{12} z_2, \end{array}$$

où les $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ sont les symboles de Christoffel sur la surface aux points considérés. Les deux premières équations du système précédent constituent un système hyperboliques à deux variables et deux inconnues, dont les directions caractéristiques sont les directions des axes de coordonnées. On en déduit alors (voir par exemple [53], tome 5, chapitre 10, section 7) que si $\boldsymbol{z}_* = 0$ sur un segment de la droite $x_1 = x_2$, alors $\boldsymbol{z}_* = 0$ dans un voisinage des points intérieurs de ce segment. Or si $c(t)$ est une courbe régulière sur S, il existe en tout point de cette courbe un système de coordonnées tel que $c(t)$ se représente localement par un segment de la droite $x_1 = x_2$. La surface S étant compacte, et puisque par hypothèse, $\boldsymbol{z}_*$ est nul sur

∂S, on en déduit ainsi de proche en proche que $\boldsymbol{z}_*$ est nul sur l'ensemble de la surface S. ■

Grâce au lemme 1.6, on montre l'*inégalité de Korn surfacique* suivante :

Lemme 1.7 *Soit* $\boldsymbol{z}_* := z_\alpha \mathrm{d}y^\alpha \in \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^1_0(S)$ *, alors on a l'estimation*

$$\|\boldsymbol{z}_*\|^2_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1(S)} \leq C \sum_{\alpha,\beta} \|\overline{\gamma}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}_*)\|^2_{\mathrm{L}^2(S)} . \tag{1.9}$$

Preuve. En utilisant l'inégalité de Korn bidimensionnelle sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et grâce au fait que la surface S est compacte, on a l'égalité suivante pour tout $\boldsymbol{z}_* \in \mathrm{H}^1(S)$:

$$\|\boldsymbol{z}_*\|^2_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1(S)} \leq C\big(\sum_{\alpha,\beta} \|\overline{\gamma}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}_*)\|^2_{\mathrm{L}^2(S)} + \|\boldsymbol{z}_*\|^2_{\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2(S)} \big). \tag{1.10}$$

Le but de la démonstration est de montrer l'inégalité suivante :

$$\forall \boldsymbol{z}_* \in \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^1_0(S) \quad \sum_{\alpha,\beta} \|\overline{\gamma}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}_*)\|^2_{\mathrm{L}^2(S)} \geq C \|\boldsymbol{z}_*\|^2_{\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2(S)} , \tag{1.11}$$

pour C une constante ne dépendant que de S. Les équations (1.10) et (1.11) impliquent alors l'équation (1.9) et donc le lemme.

Supposons que l'équation (1.11) ne soit pas satisfaite. Il existe une suite $\boldsymbol{z}^k_*$, pour $k \geq 0$, d'éléments de $\mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^1_0(S)$, telle que

$$\forall k \geq 0, \quad \|\boldsymbol{z}^k_*\|_{\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2(S)} = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, \alpha,\beta \quad \lim_{k\to+\infty} \|\overline{\gamma}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}^k_*)\|_{\mathrm{L}^2(S)} = 0.$$

En vertu de l'équation (1.10), on a donc

$$\forall k \geq 0, \quad \|\boldsymbol{z}^k_*\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1(S)} \leq C,$$

où C est une constante indépendante de k. Il existe donc $\boldsymbol{z}^\infty_* \in \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^1_0(S)$ tel que

$$\boldsymbol{z}^k_* \to \boldsymbol{z}^\infty_* \quad \text{faiblement dans} \quad \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^1_0(S). \tag{1.12}$$

L'immersion $\mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^1_0(S) \hookrightarrow \mathrm{L}^2 \times \mathrm{L}^2(S)$ étant compacte (voir [4] pour le cas des variétés riemanniennes), la suite $\{\boldsymbol{z}^k_*\}$ converge fortement vers $\boldsymbol{z}^\infty_*$ dans $\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2(S)$. On en déduit donc que

$$\|\boldsymbol{z}^\infty_*\|_{\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2(S)} = 1. \tag{1.13}$$

De plus, en utilisant (1.12), on a

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}^\infty_*) = 0.$$

Or le lemme 1.6 montre qu'un tel $\boldsymbol{z}_*^\infty$ vérifiant $\boldsymbol{z}_*^\infty\big|_{\partial S} = 0$ ne peut être que l'élément nul. On a donc $\boldsymbol{z}_*^\infty = 0$, ce qui est contraire à (1.13). Cette contradiction termine la démonstration de la proposition. ∎

En utilisant le même type d'argument et le lemme 1.5, on montre la proposition suivante :

Proposition 1.8 *Le forme bilinéaire symétrique*

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}') \mapsto a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}') = a_0(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}') + a_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}')$$

est coercive sur $\mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^2_0(S)$ *: on a pour tout* $\boldsymbol{z}$ *dans cet espace l'inégalité*

$$a_0(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) + a_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) \geq C \|\boldsymbol{z}\|^2_{\mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^2(S)} . \tag{1.14}$$

On en déduit alors le corollaire :

Corollaire 1.9 *Il existe une constante* C *ne dépendant que de la surface* S*, telle que*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \boldsymbol{z} \in \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^2_0(S) \quad a^\varepsilon(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) \geq C\varepsilon^2 \|\boldsymbol{z}\|^2_{\mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^2(S)} \tag{1.15}$$

Preuve. C'est clair en utilisant la proposition précédente, grâce à la positivité des formes bilinéaires a_0 et a_1, avec $a^\varepsilon = a_0 + \varepsilon^2 a_1$. ∎

1.4 Régularité

On rappelle tout d'abord quelques notations et définitions concernant les systèmes d'équations elliptiques au sens d'Agmon, Douglis et Nirenberg (voir [2]). Soient n et p deux entiers, et soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^p$. On considère un système de n équations agissant sur n inconnues scalaires u_i. On note ℓ_{ij} l'opérateur scalaire de la i-ème composante de l'opérateur total, agissant sur la j-ème inconnue. On associe alors à chaque équation un entier t_i et à chaque inconnue un entier s_j, tels que

$$\forall\, i, j \qquad \deg \ell_{ij} \leq t_i + s_j .$$

La *partie principale* de l'opérateur est alors l'opérateur de composantes ℓ'_{ij} constituées des parties de degré $t_i + s_j$ dans l'opérateur ℓ_{ij} (ces parties pouvant être nulles). Si $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$, le *symbole principal* de l'opérateur est alors la matrice dont les coefficients $\ell'_{ij}(\boldsymbol{\xi})$ sont formés à partir des opérateurs ℓ'_{ij} en remplaçant les dérivées partielles ∂_k par $-i\xi_k$. Par définition, l'opérateur est dit *elliptique* si en tout point $P \in U$,

$$\forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, \qquad \det \ell'_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \neq 0.$$

Il est dit *fortement elliptique* si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $t_i = s_i =: m_i$, et si en tout point $P \in U$, on a

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^p, \quad \forall (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n, \qquad \mathrm{Re}\left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \ell'_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \zeta_i \overline{\zeta}_j \right\} \geq C \sum_{k=1}^{n} |\boldsymbol{\xi}|^{2m_k} |\zeta_k|^2, \tag{1.16}$$

où C est une constante strictement positive et où $|\boldsymbol{\xi}|^2 = \sum_{k=1}^{p} \xi_k^2$. La forte ellipticité implique l'ellipticité de l'opérateur. Dans toute la suite, tous les opérateurs considérés sont autoadjoints. On utilise alors la définition suivante :

Définition 1.10 Soit $\overrightarrow{m} = (m_1, \dots, m_n)$ un vecteur composé d'entiers positifs. Si pour tout $i = 1, \dots, n$, on a avec les notations précédentes $t_i = s_i = m_i$, alors on dit que l'opérateur (ℓ_{ij}) est de *multidegré* $2\overrightarrow{m}$. ■

Considérons un opérateur de multidegré $2\overrightarrow{m}$. S'il est fortement elliptique, alors les conditions aux limites de Dirichlet naturellement associées

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad \forall k \in \{0, \dots, m_j - 1\}, \qquad \partial_r^k u_j \big|_{\partial U} = 0, \tag{1.17}$$

recouvrent l'opérateur (voir [2]). Ici, ∂_r désigne la dérivée le long de la normale rentrante sur le bord du domaine.

Dans la suite, on considère des opérateur intrinsèques sur la variété S. On vérifie alors que les notions précédentes ont encore un sens. En particulier, pour un opérateur 2D (L_σ, L_3) à valeurs dans $\Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ on note (d_σ, d_3) le multidegré.

Les opérateurs elliptiques au sens précédent possèdent des propriétés de régularité (voir [2]). Dans cette sous-section, on montre le théorème suivant :

Théorème 1.11 *Soit* $\boldsymbol{K}^0(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F}^0$ *le modèle* 2D *standard. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *l'opérateur* $\boldsymbol{K}^0(\varepsilon)$ *est fortement elliptique de multidegré* $(2, 2, 4)$ *au sens de Agmon, Douglis et Nirenberg. Les conditions aux limites*

$$\boldsymbol{z} \to \big(z_r, z_s, z_3, \partial_r z_3\big)\big|_{\partial S}$$

recouvrent l'opérateur. Enfin, le noyau et le conoyau de cet opérateur sont réduits à $\{0\}$.

Preuve. Soit P un point de la surface S, et $\{y^\alpha\}$ un système de coordonnées sur S au voisinage de ce point. On note ces coordonnées $\{y^1, y^2\}$ dans ce qui suit. L'opérateur de membrane s'écrit

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} -\widetilde{\lambda} \mathrm{D}_\sigma \gamma_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) - 2\mu \mathrm{D}_\alpha \gamma_\sigma^\alpha(\boldsymbol{z}), \\ -\widetilde{\lambda} b_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) - 2\mu b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{z}). \end{cases}$$

L'opérateur M_σ est d'ordre 2 en z_σ et 1 en z_3, et l'opérateur M_3 est d'ordre 1 en z_σ et 0 en z_3. Pour calculer les parties principales de l'opérateur $\boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F}^0$, il suffit de calculer les termes d'ordres 2 en z_1 et z_2 dans les équations $\sigma = 1, 2$. Quitte à changer de carte, on peut supposer que le système de coordonnées est orthonormé au point P, c'est-à-dire que la matrice $a_{\alpha\beta}$ est la matrice identité en P. La matrice $a^{\alpha\beta}$ est donc elle aussi la matrice identité. Les termes d'ordre 1 d'une expression telle que $\mathrm{D}^\nu z_\nu$ s'écrivent donc

$$\mathrm{D}^\nu z_\nu = a^{\alpha\beta} \mathrm{D}_\alpha z_\beta = \partial_1 z_1 + \partial_2 z_2 + \cdots ,$$

En ce point P, l'opérateur de membrane s'écrit donc

$$\begin{cases} M_1(\boldsymbol{z}) = -\widetilde{\lambda}\partial_1(\partial_1 z_1 + \partial_2 z_2) - 2\mu\partial_{11} z_1 - \mu\partial_{22} z_1 - \mu\partial_{21} z_2 + \cdots , \\ M_2(\boldsymbol{z}) = -\widetilde{\lambda}\partial_2(\partial_1 z_1 + \partial_2 z_2) - 2\mu\partial_{22} z_2 - \mu\partial_{11} z_2 - \mu\partial_{12} z_1 + \cdots , \end{cases}$$

où les points de suspension désignent des termes d'ordres de dérivation inférieurs. D'autre part, pour l'opérateur $\boldsymbol{F}^0$, il suffit de ne retenir que les termes d'ordres 4 en z_3 dans l'équation transverse, soit

$$F_3^0(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{3}(\widetilde{\lambda} + 2\mu)(\partial_{11} + \partial_{22})^2 z_3 + \cdots ,$$

en se plaçant dans le même système orthonormée que précédemment. On en déduit que le symbole principal du système $\boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F}^0$ est

$$\begin{pmatrix} (\widetilde{\lambda} + 2\mu)\xi_1^2 + \mu\xi_2^2 & (\widetilde{\lambda} + \mu)\xi_1\xi_2 & 0 \\ (\widetilde{\lambda} + \mu)\xi_1\xi_2 & (\widetilde{\lambda} + 2\mu)\xi_2^2 + \mu\xi_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\varepsilon^2(\widetilde{\lambda} + 2\mu)(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Soit $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in \mathbb{C}^3$. Pour montrer que l'opérateur est fortement elliptique, on calcule la partie correspondant au terme en accolade dans la formule (1.16). On trouve

$$\begin{aligned} \big((\widetilde{\lambda} + 2\mu)\xi_1^2 + \mu\xi_2^2\big)\zeta_1\overline{\zeta}_1 + (\widetilde{\lambda} + \mu)\xi_1\xi_2(\zeta_1\overline{\zeta}_2 + \overline{\zeta}_1\zeta_2) \\ + \big((\widetilde{\lambda} + 2\mu)\xi_2^2 + \mu\xi_1^2\big)\zeta_2\overline{\zeta}_2 + \frac{1}{3}\varepsilon^2(\widetilde{\lambda} + 2\mu)(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2|\zeta_3|^2. \end{aligned}$$

Dans ce terme, seule la partie en ε^2 fait intervenir ζ_3, et il est clair que pour ce terme, la condition de forte ellipticité est remplie. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&\big((\widetilde{\lambda}+2\mu)\xi_1^2+\mu\xi_2^2\big)\zeta_1\overline{\zeta}_1+(\widetilde{\lambda}+\mu)\xi_1\xi_2(\zeta_1\overline{\zeta}_2+\overline{\zeta}_1\zeta_2)+\big((\widetilde{\lambda}+2\mu)\xi_2^2+\mu\xi_1^2\big)\zeta_2\overline{\zeta}_2\\
&\quad=(\widetilde{\lambda}+\mu)\big(\xi_1^2|\zeta_1|^2+\xi_1\xi_2(\zeta_1\overline{\zeta}_2+\overline{\zeta}_1\zeta_2)+\xi_2^2|\zeta_2|^2\big)+\mu|\boldsymbol{\xi}|^2(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2)\\
&\quad=(\widetilde{\lambda}+\mu)|\xi_1\zeta_1+\xi_2\zeta_2|^2+\mu|\boldsymbol{\xi}|^2(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2)\\
&\quad\geq\mu|\boldsymbol{\xi}|^2(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2),
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'opérateur $\boldsymbol{K}^0(\varepsilon)=\boldsymbol{M}+\varepsilon^2\boldsymbol{F}^0$ est fortement elliptique sur S pour tout $\varepsilon>0$ fixé.

Les conditions aux limites de Dirichlet recouvrent donc bien les opérateurs $\boldsymbol{K}^0(\varepsilon)$ pour ε fixé. Enfin, en utilisant la forme bilinéaire a^ε associée à l'opérateur $\boldsymbol{K}^0(\varepsilon)$, le lemme 1.5 montre que le noyau de l'opérateur est réduit à $\{0\}$. L'opérateur étant autoadjoint, le même résultat est valable pour le conoyau. ■

Remarque 1.12 La dimension de la variété S étant égale à 2, et l'opérateur considéré étant à coefficients réels, la *condition supplémentaire d'ellipticité* est automatiquement satisfaite (voir [2]). C'est la raison pour laquelle elle n'est pas évoquée dans la démonstration précédente. Cette remarque est aussi valable pour l'opérateur de membrane dont l'étude est effectuée dans le chapitre V lorsque la surface S est elliptique. ■

On déduit du théorème précédent des estimations a priori : soit $p>-\frac{1}{2}$ un indice de régularité, on a pour tout $\boldsymbol{z}\in \mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)$

$$\|\boldsymbol{z}\|_{E_p}\leq C(\varepsilon,p)\left(\|\boldsymbol{K}^0(\varepsilon)(\boldsymbol{z})\|_{F_p}+\|(z_r,z_s,z_3,\partial_r z_3)\|_{G_p}\right), \tag{1.19}$$

où

$$\begin{aligned}
E_p&=\mathrm{H}^{p+1}\times\mathrm{H}^{p+1}\times\mathrm{H}^{p+2}(S),\\
F_p&=\mathrm{H}^{p-1}\times\mathrm{H}^{p-1}\times\mathrm{H}^{p-2}(S)\quad\text{et}\\
G_p&=\mathrm{H}^{p+\frac{1}{2}}\times\mathrm{H}^{p+\frac{1}{2}}\times\mathrm{H}^{p+\frac{3}{2}}\times\mathrm{H}^{p+\frac{1}{2}}(\partial S).
\end{aligned}$$

Le fait que S soit une surface n'engendre pas de difficulté pour obtenir cette estimation : la démonstration effectuée dans [1] et [2] dans le cas de systèmes sur $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert borné passe par des recollements d'estimations locales, ce qui se fait de la même manière dans un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et sur une surface compacte (voir [4]).

On a donc montré dans cette section que l'opérateur $\boldsymbol{K}^0(\varepsilon)$ possèdent des propriétés d'inversibilité et de régularité qui en font un modèle 2D admissible. C'est l'étude de cette notion qui fait l'objet de la section suivante.

2 Modèles 2D admissibles

Dans cette section, on étudie les modèles bidimensionnels du type de celui de $\boldsymbol{K}^0(\varepsilon)$ et parmi lesquels figurent tous les modèles 2D classiques, comme celui de Koiter. On dégage alors les propriétés que ceux-ci doivent vérifier pour pouvoir être utilisés dans les chapitres suivants lorsqu'on effectue l'analyse asymptotique de leurs solutions ou lors de l'étude du développement asymptotique du déplacement tridimensionnel. On appelle de tels modèles des *modèles* 2D *admissibles*. On montre ensuite qu'il existe une infinité de modèles 2D admissibles.

2.1 Définitions

L'opérateur $\boldsymbol{F}^0$ intervient dans l'expression de l'opérateur $\boldsymbol{A}^2$ du chapitre III : il est constitué des termes comportant les dérivées d'ordres 4 et 3 en z_3 intervenant dans la composante transverse de A_3. Ceci incite à poser la définition suivante :

Définition 2.1 On appelle *opérateur de flexion* tout opérateur 2D, noté

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^0 + \boldsymbol{H},$$

où $\boldsymbol{H} : \Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S) \to \Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ est un opérateur 2D tel que

$$\deg \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

en utilisant la notation 2.2 du chapitre III.

Le *modèle* 2D associé à l'opérateur de flexion $\boldsymbol{F}$ est l'opérateur

$$\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F} : \Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S) \to \Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S).$$

■

Remarquons que pour tout opérateur de flexion $\boldsymbol{F}$ au sens de la définition précédente, l'opérateur $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{F}$ satisfait

$$\deg(\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{F}) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

On pose alors la définition suivante :

Définition 2.2 Soit $\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F}$ un modèle 2D *autoadjoint* associé à un opérateur de flexion $\boldsymbol{F}$. On dit que ce modèle est *admissible* s'il possède les propriétés suivantes :

(i) L'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \big(K_\alpha(\varepsilon), K_3(\varepsilon)\big)$ associé aux conditions aux limites de Dirichlet est fortement elliptique de multidegré $(2,2,4)$ au sens de Agmon, Douglis et Nirenberg.

(ii) Il existe une constante C indépendante de ε, telle que

$$\forall \boldsymbol{z} \in \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^2_0(S), \quad \big\langle \boldsymbol{K}(\varepsilon)\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(S)^3} \geq C\varepsilon^2 \|\boldsymbol{z}\|^2_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)}. \tag{2.2}$$

■

Remarque 2.3 On pourrait considérer des modèles non autoadjoints dans la définition précédente en ajoutant la condition que le conoyau de l'opérateur doit être réduit à zéro. ■

Dans la section précédente, on a montré qu'en prenant $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^0$, on obtient un modèle 2D admissible. On verra à la fin de cette section qu'il existe aussi des modèles 2D admissibles non intrinsèques, c'est-à-dire dont l'expression est donnée en carte locale et ne définit pas un opérateur intrinsèque. De tels modèles sont consistants lorsque la surface peut se représenter à l'aide d'une seule carte locale.

2.2 Perturbation du modèle 2D standard

On montre dans cette sous-section qu'on peut trouver beaucoup de modèles 2D admissibles dans un *voisinage* de l'opérateur $\boldsymbol{K}^0(\varepsilon)$. Ce résultat est encore valable pour n'importe quel modèle 2D admissible $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$, en particulier pour le modèle de Koiter.

Le lemme suivant permet de montrer que tous les modèles 2D sont elliptiques au sens de Agmon, Douglis et Nirenberg pour ε assez petit.

Lemme 2.4 *Soit $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^0 + \boldsymbol{H}$ un opérateur de flexion. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ ne dépendant que de S et $\boldsymbol{H}$, tel que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ est fixé, l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2\boldsymbol{F}$ est fortement elliptique de multidegré $(2,2,4)$ au sens d'Agmon, Douglis et Nirenberg.*

Preuve. Soit $S^\varepsilon : \Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S) \to \Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ l'opérateur défini par la formule

$$S^\varepsilon(\zeta_\sigma, \zeta_3) = (\zeta_\sigma, \varepsilon^{-1}\zeta_3).$$

On considère alors l'opérateur $\tilde{\boldsymbol{K}}(\varepsilon) = S^\varepsilon \boldsymbol{K}(\varepsilon) S^\varepsilon$ Il est clair qu'il suffit de montrer le résultat pour l'opérateur $\tilde{\boldsymbol{K}}(\varepsilon)$. Or si $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, le symbole principal $k_{ij}(\xi_1, \xi_2)$ de cet opérateur s'écrit

$$\begin{pmatrix} \mathrm{D}_{\alpha\beta}(\xi_1,\xi_2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\widetilde{\lambda} + 2\mu)(\xi_1^2+\xi_2^2)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon^2 d_{\alpha\beta}(\xi_1,\xi_2) & \varepsilon d_{\sigma 3}(\xi_1,\xi_2) \\ \varepsilon d_{3\sigma}(\xi_1,\xi_2) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

où $\mathrm{D}_{\alpha\beta}(\xi_1,\xi_2)$ est la matrice 2×2 figurant en haut à gauche de la matrice (1.18), et où les coefficients $d_{\alpha\beta}$, $d_{\sigma 3}$ et $d_{3\sigma}$ dépendent de l'opérateur $\boldsymbol{H}$. Or le calcul effectué dans la démonstration du théorème 1.11 montre que si $(\zeta_1,\zeta_2)\in\mathbb{C}^2$, alors

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\mathrm{D}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi})\zeta_\alpha\overline{\zeta}_\beta \geq \mu|\boldsymbol{\xi}|^2(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2).$$

De plus, on a

$$\left|\mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} d_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi})\zeta_\alpha\overline{\zeta}_\beta\right\}\right| \leq c_1|\boldsymbol{\xi}|^2(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2),$$

où c_1 est une constante positive, et

$$\left|\mathrm{Re}\left\{d_{\sigma 3}(\boldsymbol{\xi})\zeta_\sigma\overline{\zeta}_3+d_{3\sigma}(\boldsymbol{\xi})\zeta_3\overline{\zeta}_\sigma\right\}\right| \leq c_2\big(|\boldsymbol{\xi}|^2(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2)+|\boldsymbol{\xi}|^4|\zeta_3|^2\big),$$

où c_2 est une constante positive. On en déduit donc que si $(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\in\mathbb{C}^3$,

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{i,j=1}^{3}k_{ij}(\xi_1,\xi_2)\right\} \geq (\mu-\varepsilon^2c_1-\varepsilon c_2)|\boldsymbol{\xi}|^2(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2)+\left(\frac{1}{3}(\widetilde{\lambda}+2\mu)-\varepsilon c_2\right)|\boldsymbol{\xi}|^4|\zeta_3|^2.$$

Il existe donc un ε_0 tel que pour $\varepsilon<\varepsilon_0$, l'opérateur $\tilde{\boldsymbol{K}}(\varepsilon)$ soit fortement elliptique. On en déduit le même résultat pour l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$. Les conditions aux limites de Dirichlet associées recouvrent alors l'opérateur (voir [2]). Ceci termine la preuve du lemme. ∎

Comme conséquence immédiate de ce lemme, on a le résultat suivant :

Corollaire 2.5 *Pour tout modèle* 2D *donné, la condition* (i) *de la définition* 2.2 *est vérifiée pour* ε *assez petit.*

La proposition suivante montre alors qu'il existe un infinité de modèle 2D admissibles :

Proposition 2.6 *Soit* $\boldsymbol{F}$ *un opérateur de flexion, et* $\boldsymbol{H}$ *l'opérateur tel que* $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^0+\boldsymbol{H}$. *On suppose que le modèle* 2D *associé* $\boldsymbol{H}$ *est autoadjoint. On définit, pour tout* $\delta>0$, *l'opérateur de flexion* $\boldsymbol{F}_\delta=\boldsymbol{F}^0+\delta\boldsymbol{H}$ *auquel on associe l'opérateur* $\boldsymbol{K}(\varepsilon,\delta)=\boldsymbol{M}+\varepsilon^2\boldsymbol{F}_\delta$. *Il existe alors* $\varepsilon_0>0$ *et* $\delta_0>0$ *tels que si on se fixe* $\delta<\delta_0$, *alors pour tout* $\varepsilon<\varepsilon_0$, *l'opérateur* $\boldsymbol{K}(\varepsilon,\delta)$ *est un modèle* 2D *admissible.*

Preuve. Grâce au corollaire 1.9, on a pour $\varepsilon>0$ et $\delta>0$,

$$\big\langle\boldsymbol{K}(\varepsilon,\delta)\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(S)^3}\geq\varepsilon^2\Big(C_1\|\boldsymbol{z}\|^2_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)}+\delta\big\langle\boldsymbol{H}\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(S)^3}\Big).$$

Mais au regard des ordres de dérivation de $\boldsymbol{H}$, on a en intégrant par parties

$$\big|\big\langle\boldsymbol{H}\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\big\rangle\big|\leq C_2\|\boldsymbol{z}\|^2_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)}.$$

En prenant $\delta_0 = \frac{C_1}{C_2}$, on en déduit que

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \forall\delta < \delta_0, \quad \exists\, C(\delta) \quad \text{tel que} \quad \big\langle \boldsymbol{K}(\varepsilon,\delta)\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(S)^3} \geq \varepsilon^2 C(\delta) \|\boldsymbol{z}\|^2_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)} .$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ∎

Dans le cas d'une perturbation autoadjointe et positive du modèle 2D standard, on a le meilleur résultat suivant :

Proposition 2.7 *Soit* $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^0 + \boldsymbol{H}$ *un opérateur de flexion tel que* $\boldsymbol{H}$ *soit autoadjoint positif. Alors* $\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2\boldsymbol{F}$ *est un modèle* 2D *admissible.*

Preuve. Le lemme 2.4 montre que l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2(\boldsymbol{F}^0 + \boldsymbol{H})$ est elliptique. De plus, la positivité de $\boldsymbol{H}$ montre qu'on a l'égalité

$$\big\langle \boldsymbol{K}(\varepsilon)\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(S)^3} \geq \big\langle \boldsymbol{K}^0(\varepsilon)\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(S)^3} \geq C\varepsilon^2 \|\boldsymbol{z}\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)} ,$$

en utilisant l'inégalité (2.2) pour l'opérateur $\boldsymbol{K}^0(\varepsilon)$. Ceci termine la preuve de la proposition. ∎

2.3 Modèle 2D en carte

Avant d'étudier les divers modèles 2D intrinsèques classiques, cette sous-section introduit un modèle bidimensionnel non intrinsèque, c'est-à-dire valable uniquement lorsque la surface moyenne est représentée à l'aide d'une seule carte locale.

Définition 2.8 Supposons que S soit représentée par une unique carte locale. On peut alors définir sur S la forme bilinéaire sur $\Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$,

$$\widetilde{a}_1(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}') = \frac{1}{3}\int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\widetilde{\tau}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\widetilde{\tau}_{\sigma\delta}(\boldsymbol{z}')\,\mathrm{d}S, \tag{2.4}$$

où $M^{\alpha\beta\sigma\delta}$ est donné par (3.2), et où $\widetilde{\tau}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \partial_{\alpha\beta}z_3$. Cette forme bilinéaire permet de définir un opérateur $\widetilde{\boldsymbol{F}}$. L'opérateur $\widetilde{\boldsymbol{K}}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2\widetilde{\boldsymbol{F}}$ est appelé *modèle* 2D *en carte locale.* ∎

La matrice $\widetilde{\tau}_{\alpha\beta}$ dépend donc de la carte choisie et n'est pas un objet intrinsèque. En reprenant la démonstration de la section 1, on montre alors le résultat suivant :

Proposition 2.9 *L'opérateur* $\widetilde{\boldsymbol{K}}(\varepsilon)$ *est autoadjoint, et vérifie les propriétés* (i) *et* (ii) *de la définition* 2.2.

Preuve. En utilisant des arguments similaires à ceux employés dans la démonstration du lemme (1.7), on peut montrer une inégalité du type (2.2). Pour cela, on utilise la propriété suivante : si $\boldsymbol{z} \in \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{H}^2_0(S)$ vérifie $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \widetilde{\tau}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = 0$,

$\boldsymbol{z}\big|_{\partial S} = 0$ et $\partial_r z_3\big|_{\partial S} = 0$, alors $\boldsymbol{z} = 0$. Ce résultat se montre comme le lemme 1.5, en utilisant le fait que S est représentée par une seule carte, donc que $\partial_{\alpha\beta} z_3$ a une existence globale sur S.

Enfin, pour montrer l'ellipticité au sens de Agmon, Douglis et Nirenberg, on remarque que l'on a $\widetilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}^0 + \boldsymbol{H}$, où $\boldsymbol{F}^0$ est l'opérateur de flexion intrinsèque standard, et $\boldsymbol{H}$ un opérateur (dépendant de la carte) dont les ordres de dérivations se représentent par l'écriture

$$\deg \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Or la démonstration du lemme 2.4 est encore valable pour des opérateurs de ce type, car l'ordre de dérivation 3 en z_3 dans la composante transverse n'intervient pas dans le calcul du symbole. L'opérateur $\widetilde{\boldsymbol{K}(\varepsilon)}$ est donc elliptique, ce qui montre qu'il satisfait le point (i). Ceci termine la démonstration de la proposition. ∎

Comme précédemment, on peut considérer des perturbations de ce modèle 2D en carte, perturbations pouvant alors être non-intrinsèques. Des résultats du type de ceux des propositions 2.6 et 2.7 se montrent alors aisément.

3 Modèles classiques

Dans cette section, on étudie une classe particulière d'opérateurs de flexion qui sont autoadjoints et positifs. Sous certaines conditions, ces opérateurs peuvent définir des modèles 2D intrinsèques. On donne ensuite les exemples les plus classiques, ou les plus naturels, en étudiant à chaque fois s'ils sont admissibles ou non.

3.1 Une classe de modèles bidimensionnels

On s'intéresse dans cette section aux opérateurs de flexion associés à des formes bilinéaires du type a_1, qui correspond à l'opérateur $\boldsymbol{F}^0$.

Définition 3.1 Soit $\Psi_{\alpha\beta} : \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S) \to \Gamma(T_2 S)$ un opérateur 2D de degré de dérivation 1 en z_α et 0 en z_3, et $\chi_{\alpha\beta} : \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S) \to \Gamma(T_2 S)$ l'opérateur défini par

$$\chi_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} + \Psi_{\alpha\beta}.$$

La forme bilinéaire sur $\Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ donnée par l'équation

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}') \to \frac{1}{3} \int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta} \chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) \chi_{\sigma\delta}(\boldsymbol{z}') \, \mathrm{d}S, \tag{3.1}$$

définit alors un opérateur de flexion $\boldsymbol{F}$, appelé *opérateur de flexion associé à* $\chi_{\alpha\beta}$. ■

La formule (3.1) montre que $\boldsymbol{F}$ est bien un opérateur de flexion au sens de la définition 2.1. Tous ces opérateurs de flexion sont positifs et autoadjoints. Un critère pour savoir si ces opérateurs de flexion permettent de définir des modèles 2D admissibles est fourni par la proposition suivante :

Proposition 3.2 *Soit* $\chi_{\alpha\beta}$ *un tenseur donné par la définition* 3.1*, et* $\boldsymbol{F}$ *l'opérateur de flexion associé à* $\chi_{\alpha\beta}$. *Supposons qu'on ait la propriété suivante :*

$$\forall \boldsymbol{z} \in \mathrm{H}_0^1 \times \mathrm{H}_0^1 \times \mathrm{H}_0^2(S), \qquad \begin{cases} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = 0, \\ \chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \big(\boldsymbol{z} = 0\big), \tag{3.2}$$

alors l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F}$ *est un modèle* 2D *admissible.*

Preuve. La condition (3.2) équivaut à dire que le lemme 1.5 est valable pour l'opérateur $\chi_{\alpha\beta}$. La propriété (ii) se montre alors à l'aide d'arguments similaires à ceux employés dans la démonstration du lemme 1.7. Le lemme 2.4 montre que $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ est elliptique et satisfait donc la propriété (i).

■

La vérification de la propriété (3.2) est donc l'unique condition pour un modèle 2D associé à un tenseur $\chi_{\alpha\beta}$ de la définition 3.1 pour être admissible. Dans la suite de cette section, on montre que cette condition est satisfaite pour les modèles de Koiter et de Budiansky - Sanders.

Remarque 3.3 Il est clair que si $\chi_{\alpha\beta}$ vérifie la propriété (3.2), le tenseur $\chi_{\alpha\beta}+\gamma_{\alpha\beta}$ la satisfait aussi, et vérifie les conditions de la définition 3.1. Il en est de même pour tout tenseur produit d'un tenseur sur S et de l'opérateur $\gamma_{\alpha\beta}$. ■

Enfin, on verra dans le chapitre suivant que lorsque la surface S est elliptique et pour les conditions aux limites encastrées, on a

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{z}\big|_{\partial S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{z} = 0.$$

Ainsi, quel que soit le tenseur $\chi_{\alpha\beta}$ vérifiant les propriétés de la définition 3.1, le modèle 2D associé est admissible lorsque S est elliptique.

3.2 Etude de modèles classiques

Les deux modèles suivants sont très employés en théorie des coques :

Définition 3.4 Considérons un opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F}$ où $\boldsymbol{F}$ est un opérateur de flexion associé à un tenseur $\chi_{\alpha\beta}$ (voir la définition 3.1). L'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ est appelé *modèle de Koiter* (voir [35]) pour $\chi_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta}$ où $\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})$ est le tenseur de changement de courbure associé au déplacement $\boldsymbol{z}$, soit

$$\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\beta z_3 - c_{\alpha\beta} z_3 + b_\alpha^\sigma \mathrm{D}_\beta z_\sigma + \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\sigma z_\sigma. \tag{3.3}$$

Il est appelé *modèle de Budiansky - Sanders* (voir [6]) pour

$$\chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha \theta_\alpha + \mathrm{D}_\beta \theta_\beta) + \tfrac{1}{2}(b_\alpha^\sigma \omega_{\beta\sigma} + b_\beta^\sigma \omega_{\alpha\sigma}). \tag{3.4}$$

■

On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.5 *Les modèles de Koiter et de Budiansky - Sanders sont des modèles* 2D *admissibles pour tout* $\varepsilon > 0$ *.*

Preuve. Le fait que la condition (3.2) soit satisfaite pour le modèle de Koiter constitue le *lemme du mouvement rigide*, dont on trouvera une démonstration dans [50] par exemple. Cette démonstration repose sur l'interprétation géométrique de $\rho_{\alpha\beta}$ comme tenseur de changement de courbure.

De plus, le tenseur $\chi_{\alpha\beta}$ diffère du tenseur $\rho_{\alpha\beta}$ uniquement par le terme $\frac{1}{2}(b_\alpha^\sigma \gamma_{\beta\sigma} + b_\beta^\sigma \gamma_{\alpha\sigma})$ (voir l'équation (3.8) du chapitre II). La remarque 3.3 montre alors que la condition (3.2) est aussi satisfaite pour le modèle de Koiter. ■

Le principe mécanique à la base des travaux de Koiter [34, 35, 36] et de John [32, 33] est issu du théorème de Bonnet (voir le théorème 3.9 du chapitre I). L'intuition mécanique de ce théorème conduit à décrire la déformation d'une surface par les deux tenseurs $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\rho_{\alpha\beta}$ de changement de métrique et de courbure. Dans les calculs formels de John [33], ce sont même ces deux quantités qui sont choisies comme inconnues.

Le modèle le plus naturel, d'un point de vue mécanique, est alors le modèle de Koiter. Il est frappant de constater que l'existence de nombreux modèles 2D admissibles ne garantit pas leur validité en tant qu'approximation des équations 3D. Ainsi, dans le cas des arches (voir [26]), la solution du modèle standard, bien qu'admissible au sens précédent, ne possède pas la même limite quand $\varepsilon \to 0$ que le déplacement 2D, alors que c'est le cas pour les modèles de Koiter et de Budiansky-Sanders (qui sont "équivalents" du point de vue de l'analyse asymptotique). Dans les cas des coques elliptiques, en revanche, tous ces modèles possèdent la même précision par rapport au modèle tridimensionnel.

Enfin, remarquons que le modèle $\boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{A}^2$, où l'opérateur $\boldsymbol{A}^2$ est donné dans le chapitre III, n'entre pas dans la classe des modèles 2D admissibles, ni le modèle dégagé par John [33].

3.3 Lien avec la résolution formelle

Les modèles classiques, et plus généralement les modèles 2D admissibles s'écrivent $\boldsymbol{M}+\varepsilon^2\boldsymbol{F}$ où $\boldsymbol{F}$ est un opérateur de flexion. L'étude du comportement asymptotique de la solution $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ associée à un modèle 2D classique fait intervenir l'espace des déplacement inextensionnels (voir [51])

$$V_F = \{\boldsymbol{z} \in \mathrm{H}_0^1 \times \mathrm{H}_0^1 \times \mathrm{H}_0^2(S) \,|\, \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = 0\}.$$

La restriction de l'opérateur $\boldsymbol{M}$ à cet espace s'annule identiquement. Considérons $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ un modèle 2D admissible dont l'opérateur de flexion est défini par une forme bilinéaire (3.1) associée à un tenseur $\chi_{\alpha\beta}$ vérifiant la propriété (3.2). Soit de plus $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ la solution du problème

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{K}(\varepsilon)\boldsymbol{z}(\varepsilon) & = & \boldsymbol{g} \quad \text{sur} \quad S, \\ \big(z_r(\varepsilon), z_s(\varepsilon), z_3(\varepsilon), \partial_r z_3(\varepsilon)\big)\big|_{\partial S} & = & 0, \end{array}\right.$$

où $\boldsymbol{g}$ est un champ de 1-formes surfacique sur S. Grâce aux hypothèses faites sur le tenseur $\chi_{\alpha\beta}$, on peut étendre sans difficulté le résultat de [9] et montrer que la suite de champs de 1-formes $\varepsilon^2\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ tend dans $\mathrm{H}^1(S)^3$ vers une limite $\boldsymbol{z} \in V_F$ solution du problème : trouver $\boldsymbol{z} \in V_F$ tel que

$$\forall\,\boldsymbol{\eta} \in V_F, \quad \frac{1}{3}\int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\chi_{\sigma\delta}(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}S = \int_S g_i\eta^i\,\mathrm{d}S.$$

Ce résultat est vrai quelle que soit la géométrie de la surface moyenne.

D'autre part, si $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ désigne la solution des équations tridimensionnelles de l'élasticité après changement d'échelle (c'est-à-dire la solution des équations posées sur la variété $\Omega = S \times (-1,1)$), alors d'après [14], le champ $\varepsilon^2\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ tend dans $\mathrm{H}^1(\Omega)^3$ vers la solution $\boldsymbol{z} \in V_F$ de l'équation

$$\forall\,\boldsymbol{\eta} \in V_F, \quad \frac{1}{3}\int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta}\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\rho_{\sigma\delta}(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}S = \int_S g_i^0\eta^i\,\mathrm{d}S,$$

où $\rho_{\alpha\beta}$ est le tenseur associé à l'opérateur de flexion du modèle de Koiter, et où $\boldsymbol{g}^0$ est la moyenne transverse

$$\boldsymbol{g}^0 = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{f}^0\,\mathrm{d}x_3$$

du premier terme du développement asymptotique du chargement $\boldsymbol{f}(\varepsilon)$ sur la variété Ω.

Dans ce contexte, on montre le résultat suivant concernant l'opérateur $\boldsymbol{A}^2$ de la résolution formelle :

Proposition 3.6 *L'opérateur* $\boldsymbol{A}^2$ *étant donné par les équations* (3.46) *et* (3.51) *du chapitre* III*, si* V_F *désigne l'espace*

$$V_F = \{\boldsymbol{z} \in \mathrm{H}_0^1 \times \mathrm{H}_0^1 \times \mathrm{H}_0^2(S) \,|\, \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = 0\},$$

où $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha z_\beta + \mathrm{D}_\beta z_\alpha) - b_{\alpha\beta} z_3$ *, alors on a*

$$\forall\, \boldsymbol{z}\,, \boldsymbol{\eta} \in V_F, \quad \langle \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}\rangle = \langle \boldsymbol{F}^{\mathrm{K}} \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}\rangle$$

où $\boldsymbol{F}^{\mathrm{K}}$ *désigne l'opérateur de flexion associé au modèle de Koiter, soit*

$$\forall\, \boldsymbol{z}\,, \boldsymbol{\eta} \in V_F, \quad \langle \boldsymbol{F}^{\mathrm{K}} \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}\rangle = \frac{1}{3}\int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta} \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) \rho_{\sigma\delta}(\boldsymbol{\eta})\, \mathrm{d}S$$

(voir les définitions 3.4 *et* 3.1*).*

Preuve. D'après la définition de V_F et les équations (3.46) et (3.51) du chapitre III, et en utilisant le fait que l'opérateur de membrane $\boldsymbol{M}$ se factorise par $\gamma_{\alpha\beta}$, on a

$$\begin{aligned} A^2_\sigma\big|_{V_F} = &-\tfrac{2}{3}\mu b^\nu_\nu \mathrm{D}_\alpha \kappa^\alpha_\sigma - \tfrac{2}{3}\mu p b^\beta_\beta \mathrm{D}_\sigma \kappa^\nu_\nu + \tfrac{1}{2}\lambda p q \mathrm{D}_\sigma (b^\alpha_\alpha \kappa^\nu_\nu) + \tfrac{2}{3}\lambda q \mathrm{D}_\sigma b^\alpha_\beta \kappa^\beta_\alpha \\ &+ \tfrac{1}{3}\mu p \mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\sigma \kappa^\nu_\nu + \tfrac{2}{3}\mu b^\alpha_\beta \mathrm{D}_\alpha \kappa^\beta_\sigma + \tfrac{2}{3}\mu \kappa^\alpha_\beta \mathrm{D}_\alpha b^\beta_\sigma - \tfrac{1}{3}\mu \mathrm{D}_\alpha b^\beta_\sigma \mathrm{D}^\alpha \theta_\beta \\ &+ \tfrac{1}{3}\mu \mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\beta \mathrm{D}^\beta \theta_\sigma + \tfrac{2}{3}\mu b^\beta_\beta \mathrm{D}_\alpha \Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma} - \tfrac{4}{3}\mu \mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\nu \Lambda^{\nu\cdot}_{\cdot\sigma} - \tfrac{2}{3}\mu \Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\nu} \mathrm{D}_\alpha b^\nu_\sigma \\ &+ \tfrac{2}{3}\mu \Lambda^{\beta\cdot}_{\cdot\sigma} \mathrm{D}_\alpha b^\alpha_\beta, \end{aligned} \tag{3.5}$$

et

$$\begin{aligned} A^2_3\big|_{V_F} = &\tfrac{2}{3}\mu p \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \kappa^\nu_\nu + \tfrac{2}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\alpha \kappa^\alpha_\sigma + \mu p c^\alpha_\alpha \kappa^\nu_\nu + \tfrac{4}{3}\mu c^\alpha_\beta \kappa^\beta_\alpha + \tfrac{1}{3}\mu p(p-2q) b^\alpha_\alpha b^\beta_\beta \kappa^\nu_\nu \\ &+ \tfrac{2}{3}\mu(p-q) b^\alpha_\alpha b^\nu_\beta \kappa^\beta_\nu + \tfrac{2}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\alpha \,\mathrm{Sb}(\omega)^\alpha_\sigma. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Rappelons que d'après l'équation (3.8) du chapitre II, on a

$$\rho_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} + \mathrm{Sb}(\gamma)_{\alpha\beta} + \mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta},$$

et l'équation (3.10) du chapitre II montre que

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \mathrm{Ab}(\gamma)_{\alpha\beta} - \mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta}.$$

On en déduit donc que sur l'espace V_F , on a

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta} &= \kappa_{\alpha\beta} + \mathrm{Sb}(\omega)_{\alpha\beta} \\ &= \kappa_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

En particulier, le tenseur $\Lambda_{\alpha\beta}$ est symétrique sur V_F , et on note donc Λ^β_α ses composantes dans une base locale de $\Gamma(T^1_1 S)$. On en déduit donc en utilisant les équations de la proposition 3.3 du chapitre II que

$$\begin{aligned} A^2_3\big|_{V_F} = &\tfrac{2}{3}\mu p \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \rho^\nu_\nu + \tfrac{2}{3}\mu \mathrm{D}^\sigma \mathrm{D}_\alpha \rho^\alpha_\sigma + \mu p c^\alpha_\alpha \kappa^\nu_\nu \\ &+ \tfrac{4}{3}\mu c^\alpha_\beta \rho^\beta_\alpha + \tfrac{1}{3}\mu p(p-2q) b^\alpha_\alpha b^\beta_\beta \rho^\nu_\nu + \tfrac{2}{3}\mu(p-q) b^\alpha_\alpha b^\nu_\beta \rho^\beta_\nu \end{aligned} \tag{3.8}$$

et

$$
\begin{aligned}
A_\sigma^2\big|_{V_F} = &-\tfrac{2}{3}\mu b_\nu^\nu \mathrm{D}_\alpha \rho_\sigma^\alpha - \tfrac{2}{3}\mu p b_\beta^\beta \mathrm{D}_\sigma \rho_\nu^\nu + \tfrac{1}{2}\lambda p q \mathrm{D}_\sigma (b_\alpha^\alpha \rho_\nu^\nu) + \tfrac{2}{3}\lambda q \mathrm{D}_\sigma b_\beta^\alpha \rho_\alpha^\beta \\
&+ \tfrac{1}{3}\mu p \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\alpha \rho_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu b_\beta^\alpha \mathrm{D}_\alpha \rho_\sigma^\beta + \tfrac{2}{3}\mu b_\beta^\alpha \mathrm{D}_\alpha \Lambda_\sigma^\beta + \tfrac{2}{3}\mu \rho_\beta^\alpha \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\beta + \tfrac{2}{3}\mu \Lambda_\beta^\alpha \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\beta \\
&- \tfrac{1}{3}\mu \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\beta \mathrm{D}^\alpha \theta_\beta + \tfrac{1}{3}\mu \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\alpha \mathrm{D}^\beta \theta_\sigma - \tfrac{4}{3}\mu \mathrm{D}_\alpha b_\nu^\alpha \Lambda_\sigma^\nu - \tfrac{2}{3}\mu \Lambda_\nu^\alpha \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\nu + \tfrac{2}{3}\mu \Lambda_\sigma^\beta \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\alpha,
\end{aligned}
$$

soit

$$
\begin{aligned}
A_\sigma^2\big|_{V_F} = &-\tfrac{2}{3}\mu b_\nu^\nu \mathrm{D}_\alpha \rho_\sigma^\alpha - \tfrac{2}{3}\mu p b_\beta^\beta \mathrm{D}_\sigma \rho_\nu^\nu + \tfrac{1}{2}\lambda p q \mathrm{D}_\sigma (b_\alpha^\alpha \rho_\nu^\nu) + \tfrac{2}{3}\lambda q \mathrm{D}_\sigma b_\beta^\alpha \rho_\alpha^\beta \\
&+ \tfrac{1}{3}\mu p \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\alpha \rho_\nu^\nu + \tfrac{2}{3}\mu b_\beta^\alpha \mathrm{D}_\alpha \rho_\sigma^\beta - \tfrac{2}{3}\mu \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\alpha \Lambda_\sigma^\beta + \tfrac{2}{3}\mu \rho_\beta^\alpha \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\beta \\
&- \tfrac{1}{3}\mu \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\beta \mathrm{D}^\alpha \theta_\beta + \tfrac{1}{3}\mu \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\alpha \mathrm{D}^\beta \theta_\sigma.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Pour tout $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{\eta}$ dans l'espace V_F, on a

$$
\langle \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \int_S \big(\eta^\sigma A_\sigma^2(\boldsymbol{z}) + \eta_3 A_3^2(\boldsymbol{z})\big) \mathrm{d}S.
$$

En utilisant alors les expressions (3.8) et (3.9), et par intégration par partie en utilisant les conditions aux limites sur le bord latéral ∂S, on a que

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \textstyle\int_S \big[&\tfrac{2}{3}\mu \rho_\sigma^\alpha(\boldsymbol{z}) \mathrm{D}_\alpha b_\nu^\nu \eta^\sigma + \tfrac{2}{3}\mu p \rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) \mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha \eta^\sigma - \mu p^2 b_\alpha^\alpha \rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) \mathrm{D}^\sigma \eta_\sigma \\
&- \tfrac{4}{3}\mu p b_\beta^\alpha \rho_\alpha^\beta(\boldsymbol{z}) \mathrm{D}^\sigma \eta_\sigma - \tfrac{1}{3}\mu p b_\sigma^\alpha \rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) \mathrm{D}_\alpha \eta^\sigma - \tfrac{2}{3}\mu \rho_\sigma^\beta(\boldsymbol{z}) \mathrm{D}_\alpha b_\beta^\alpha \eta^\sigma \\
&+ \tfrac{2}{3}\mu b_\beta^\alpha \Lambda_\sigma^\beta(\boldsymbol{z}) \mathrm{D}_\alpha \eta^\sigma + \tfrac{2}{3}\mu \rho_\beta^\alpha(\boldsymbol{z}) \eta^\sigma \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\beta + \tfrac{1}{3}\mu b_\sigma^\beta (\mathrm{D}^\alpha \theta_\beta(\boldsymbol{z})) \mathrm{D}_\alpha \eta^\sigma \\
&- \tfrac{1}{3}\mu b_\beta^\alpha (\mathrm{D}^\beta \theta_\sigma(\boldsymbol{z})) \mathrm{D}_\alpha \eta^\sigma + \tfrac{2}{3}\mu p \rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \eta_3 + \tfrac{2}{3}\mu \rho_\sigma^\alpha(\boldsymbol{z}) \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}^\sigma \eta_3 \\
&+ \mu p c_\alpha^\alpha \rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) \eta_3 + \tfrac{4}{3}\mu \rho_\alpha^\beta(\boldsymbol{z}) c_\beta^\alpha \eta_3 + \tfrac{1}{3}\mu p(p-2q) b_\alpha^\alpha b_\beta^\beta \rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) \eta_3 \\
&+ \tfrac{2}{3}\mu(p-q) b_\alpha^\alpha b_\beta^\nu \rho_\nu^\beta(\boldsymbol{z}) \eta_3 \big] \mathrm{d}S.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Dans l'intégrale précédente, les termes dépendant de η_3 s'écrivent encore

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{2}{3}\mu p \rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}_\alpha \eta_3 + \tfrac{2}{3}\mu \rho_\sigma^\alpha(\boldsymbol{z}) \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}^\sigma \eta_3 + \mu p c_\alpha^\alpha \rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) \eta_3 + \tfrac{4}{3}\mu \rho_\alpha^\beta(\boldsymbol{z}) c_\beta^\alpha \eta_3 \\
&\qquad + \tfrac{1}{3}\mu p(p-2q) b_\alpha^\alpha b_\beta^\beta \rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) \eta_3 + \tfrac{2}{3}\mu(p-q) b_\alpha^\alpha b_\beta^\nu \rho_\nu^\beta(\boldsymbol{z}) \eta_3 \\
&= \tfrac{2}{3}\mu p \rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) \rho_\alpha^\alpha(\boldsymbol{\eta}) + \tfrac{2}{3}\mu \rho_\sigma^\alpha(\boldsymbol{z}) \rho_\alpha^\sigma(\boldsymbol{\eta}) + \tfrac{5}{3}\mu p c_\alpha^\alpha \rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) \eta_3 + 2\mu \rho_\alpha^\beta(\boldsymbol{z}) c_\beta^\alpha \eta_3 \\
&\qquad + \tfrac{1}{3}\mu p(p-2q) b_\alpha^\alpha b_\beta^\beta \rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) \eta_3 + \tfrac{2}{3}\mu(p-q) b_\alpha^\alpha b_\beta^\nu \rho_\nu^\beta(\boldsymbol{z}) \eta_3 \\
&\qquad - \tfrac{2}{3}\mu p \rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) b_\beta^\alpha \mathrm{D}^\beta \eta_\alpha - \tfrac{2}{3}\mu p \rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) \mathrm{D}_\beta b_\sigma^\beta \eta^\sigma - \tfrac{2}{3}\mu \rho_\beta^\alpha(\boldsymbol{z}) b_\alpha^\sigma \mathrm{D}^\beta \eta_\sigma \\
&\qquad - \tfrac{2}{3}\mu \rho_\beta^\alpha \mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\beta \eta^\sigma.
\end{aligned}
$$

Dans cette expression, on remarque que

$$\frac{2}{3}\mu p\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\rho_\alpha^\alpha(\boldsymbol{\eta}) + \frac{2}{3}\mu\rho_\sigma^\alpha(\boldsymbol{z})\rho_\alpha^\sigma(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{3}M^{\alpha\beta\sigma\delta}\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z})\rho_{\sigma\delta}(\boldsymbol{\eta}).$$

En définitive, en reportant cette équation dans l'intégrale (3.10), il suffit pour prouver le résultat de montrer l'équation

$$\begin{aligned}
&\tfrac{2}{3}\mu\rho_\sigma^\alpha(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_\alpha b_\nu^\nu\eta^\sigma + \tfrac{2}{3}\mu p\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha\eta^\sigma - \mu p^2 b_\alpha^\alpha\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\mathrm{D}^\sigma\eta_\sigma\\
&\quad - \tfrac{4}{3}\mu p b_\beta^\alpha\rho_\alpha^\beta(\boldsymbol{z})\mathrm{D}^\sigma\eta_\sigma - \tfrac{1}{3}\mu p b_\sigma^\alpha\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_\alpha\eta^\sigma - \tfrac{2}{3}\mu\rho_\sigma^\beta(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_\alpha b_\beta^\alpha\eta^\sigma\\
&\quad + \tfrac{2}{3}\mu b_\beta^\alpha\Lambda_\sigma^\beta(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_\alpha\eta^\sigma + \tfrac{2}{3}\mu\rho_\beta^\alpha(\boldsymbol{z})\eta^\sigma\mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\beta + \tfrac{1}{3}\mu b_\sigma^\beta(\mathrm{D}^\alpha\theta_\beta(\boldsymbol{z}))\mathrm{D}_\alpha\eta^\sigma\\
&\quad - \tfrac{1}{3}\mu b_\beta^\alpha(\mathrm{D}^\beta\theta_\sigma(\boldsymbol{z}))\mathrm{D}_\alpha\eta^\sigma + \tfrac{5}{3}\mu p c_\alpha^\alpha\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\eta_3 + 2\mu\rho_\alpha^\beta(\boldsymbol{z})c_\beta^\alpha\eta_3\\
&\quad + \tfrac{1}{3}\mu p(p-2q)b_\alpha^\alpha b_\beta^\beta\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\eta_3 + \tfrac{2}{3}\mu(p-q)b_\alpha^\alpha b_\beta^\nu\rho_\nu^\beta(\boldsymbol{z})\eta_3\\
&\quad - \tfrac{2}{3}\mu p\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})b_\beta^\alpha\mathrm{D}^\beta\eta_\alpha - \tfrac{2}{3}\mu p\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_\beta b_\sigma^\beta\eta^\sigma - \tfrac{2}{3}\mu\rho_\beta^\alpha(\boldsymbol{z})b_\alpha^\sigma\mathrm{D}^\beta\eta_\sigma\\
&\quad - \tfrac{2}{3}\mu\rho_\beta^\alpha(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_\alpha b_\sigma^\beta\eta^\sigma = 0,
\end{aligned}\tag{3.11}$$

pour tout $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{\eta}$ dans l'espace V_F. Dans l'équation (3.11), les termes en facteurs de $\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})$ s'écrivent

$$\begin{aligned}
&\tfrac{2}{3}\mu p\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha\eta^\sigma - \mu p^2 b_\alpha^\alpha\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\mathrm{D}^\sigma\eta_\sigma - \tfrac{1}{3}\mu p b_\sigma^\alpha\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_\alpha\eta^\sigma + \tfrac{5}{3}\mu p c_\alpha^\alpha\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\eta_3\\
&\quad + \tfrac{1}{3}\mu p(p-2q)b_\alpha^\alpha b_\beta^\beta\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\eta_3 - \tfrac{2}{3}\mu p\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})b_\beta^\alpha\mathrm{D}^\beta\eta_\alpha - \tfrac{2}{3}\mu p\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_\beta b_\sigma^\beta\eta^\sigma.
\end{aligned}\tag{3.12}$$

Or le fait que $\boldsymbol{\eta} \in V_F$ implique que

$$b_{\alpha\beta}\eta_3 = \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha\eta_\beta + \mathrm{D}_\beta\eta_\alpha).\tag{3.13}$$

Les termes de l'équation (3.12) s'écrivent donc

$$\begin{aligned}
\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\big[&\tfrac{2}{3}\mu p\mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha\eta^\sigma - \mu p^2 b_\alpha^\alpha\mathrm{D}^\sigma\eta_\sigma - \tfrac{1}{3}\mu p b_\sigma^\alpha\mathrm{D}_\alpha\eta^\sigma + \tfrac{5}{3}\mu p b_\alpha^\beta\mathrm{D}^\alpha\eta_\beta\\
&+ \tfrac{1}{3}\mu p^2 b_\alpha^\alpha\mathrm{D}^\beta\eta_\beta - \tfrac{2}{3}\mu pq b_\alpha^\alpha\mathrm{D}^\beta\eta_\beta - \tfrac{2}{3}\mu p b_\beta^\alpha\mathrm{D}^\beta\eta_\alpha - \tfrac{2}{3}\mu p\mathrm{D}_\beta b_\sigma^\beta\eta^\sigma\big],
\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})\big[&\tfrac{2}{3}\mu p b_\alpha^\alpha\mathrm{D}_\sigma\eta^\sigma + \tfrac{2}{3}\mu p\eta^\sigma\mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha - \tfrac{2}{3}\mu p b_\sigma^\beta\mathrm{D}_\beta\eta^\sigma - \tfrac{2}{3}\mu p\eta^\sigma\mathrm{D}_\beta b_\sigma^\beta\\
&- \tfrac{2}{3}\mu p^2 b_\alpha^\alpha\mathrm{D}^\sigma\eta_\sigma - \tfrac{2}{3}\mu pq b_\alpha^\alpha\mathrm{D}^\beta\eta_\beta + \tfrac{2}{3}\mu p b_\alpha^\beta\mathrm{D}^\alpha\eta_\beta\big].
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le fait que

$$\mathrm{D}_\sigma b_\alpha^\alpha = \mathrm{D}_\beta b_\sigma^\beta,\tag{3.14}$$

ce terme s'écrit encore

$$\frac{2}{3}\mu p\rho_\nu^\nu(\boldsymbol{z})(1-p-q)b_\alpha^\alpha\mathrm{D}_\sigma\eta^\sigma = 0$$

en vertu de l'égalité $p+q=1$. Pour montrer l'équation (3.11), il suffit donc de montrer

$$\begin{aligned}
&\tfrac{2}{3}\mu\rho^{\alpha}_{\sigma}(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_{\alpha}b^{\nu}_{\nu}\eta^{\sigma} - \tfrac{4}{3}\mu p b^{\alpha}_{\beta}\rho^{\beta}_{\alpha}(\boldsymbol{z})\mathrm{D}^{\sigma}\eta_{\sigma} - \tfrac{2}{3}\mu\rho^{\beta}_{\sigma}(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_{\alpha}b^{\alpha}_{\beta}\eta^{\sigma}\\
&\quad + \tfrac{2}{3}\mu b^{\alpha}_{\beta}\Lambda^{\beta}_{\sigma}(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_{\alpha}\eta^{\sigma} + \tfrac{2}{3}\mu\rho^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{z})\eta^{\sigma}\mathrm{D}_{\alpha}b^{\beta}_{\sigma} + \tfrac{1}{3}\mu b^{\beta}_{\sigma}(\mathrm{D}^{\alpha}\theta_{\beta}(\boldsymbol{z}))\mathrm{D}_{\alpha}\eta^{\sigma}\\
&\quad - \tfrac{1}{3}\mu b^{\alpha}_{\beta}(\mathrm{D}^{\beta}\theta_{\sigma}(\boldsymbol{z}))\mathrm{D}_{\alpha}\eta^{\sigma} + 2\mu\rho^{\beta}_{\alpha}(\boldsymbol{z})c^{\alpha}_{\beta}\eta_3 + \tfrac{2}{3}\mu(p-q)b^{\alpha}_{\alpha}b^{\nu}_{\beta}\rho^{\beta}_{\nu}(\boldsymbol{z})\eta_3\\
&\quad - \tfrac{2}{3}\mu\rho^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{z})b^{\sigma}_{\alpha}\mathrm{D}^{\beta}\eta_{\sigma} - \tfrac{2}{3}\mu\rho^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_{\alpha}b^{\beta}_{\sigma}\eta^{\sigma} = 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Rappelons que d'après l'équation (3.7), on a

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_{\alpha}\theta_{\beta} + \mathrm{D}_{\beta}\theta_{\alpha}) - \rho_{\alpha\beta}.$$

Le membre de gauche de l'équation (3.15) s'écrit donc, en utilisant une fois de plus l'équation (3.14),

$$\begin{aligned}
&\tfrac{2}{3}\mu\rho^{\alpha}_{\sigma}(\boldsymbol{z})b^{\nu}_{\nu}\mathrm{D}_{\alpha}\eta^{\sigma} - \tfrac{4}{3}\mu p b^{\alpha}_{\beta}\rho^{\beta}_{\alpha}(\boldsymbol{z})\mathrm{D}^{\sigma}\eta_{\sigma} - \tfrac{2}{3}\mu\rho^{\beta}_{\sigma}(\boldsymbol{z})b^{\alpha}_{\beta}\mathrm{D}_{\alpha}\eta^{\sigma}\\
&\quad - \tfrac{2}{3}\mu b^{\alpha}_{\beta}\rho^{\beta}_{\sigma}(\boldsymbol{z})\mathrm{D}_{\alpha}\eta^{\sigma} + \tfrac{1}{3}\mu b^{\alpha}_{\beta}(\mathrm{D}_{\sigma}\theta^{\beta}(\boldsymbol{z}))\mathrm{D}_{\alpha}\eta^{\sigma} + \tfrac{1}{3}\mu b^{\alpha}_{\beta}(\mathrm{D}^{\beta}\theta_{\sigma}(\boldsymbol{z}))\mathrm{D}_{\alpha}\eta^{\sigma}\\
&\quad + \tfrac{1}{3}\mu b^{\beta}_{\sigma}(\mathrm{D}^{\alpha}\theta_{\beta}(\boldsymbol{z}))\mathrm{D}_{\alpha}\eta^{\sigma} - \tfrac{1}{3}\mu b^{\alpha}_{\beta}(\mathrm{D}^{\beta}\theta_{\sigma}(\boldsymbol{z}))\mathrm{D}_{\alpha}\eta^{\sigma} + 2\mu\rho^{\beta}_{\alpha}(\boldsymbol{z})c^{\alpha}_{\beta}\eta_3\\
&\quad + \tfrac{2}{3}\mu(p-q)b^{\alpha}_{\alpha}b^{\nu}_{\beta}\rho^{\beta}_{\nu}(\boldsymbol{z})\eta_3 - \tfrac{2}{3}\mu\rho^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{z})b^{\sigma}_{\alpha}\mathrm{D}^{\beta}\eta_{\sigma} - \tfrac{2}{3}\mu\rho^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{z})b^{\beta}_{\sigma}\mathrm{D}_{\alpha}\eta^{\sigma}.
\end{aligned}$$

L'équation (3.13) montre alors, compte tenu des symétries des champs de tenseurs b^{β}_{α} et $\rho_{\alpha\beta}$ que l'expression précédente devient

$$\begin{aligned}
\eta_3\big[&\tfrac{2}{3}\mu\rho^{\alpha}_{\sigma}(\boldsymbol{z})b^{\nu}_{\nu}b^{\sigma}_{\alpha} - \tfrac{4}{3}\mu p b^{\alpha}_{\beta}\rho^{\beta}_{\alpha}(\boldsymbol{z})b^{\nu}_{\nu} - \tfrac{2}{3}\mu\rho^{\beta}_{\sigma}(\boldsymbol{z})c^{\sigma}_{\beta}\\
&- \tfrac{2}{3}\mu c^{\sigma}_{\beta}\rho^{\beta}_{\sigma}(\boldsymbol{z}) + \tfrac{2}{3}\mu c^{\alpha}_{\beta}\rho^{\beta}_{\alpha}(\boldsymbol{z}) + 2\mu\rho^{\beta}_{\alpha}(\boldsymbol{z})c^{\alpha}_{\beta}\\
&+ \tfrac{2}{3}\mu(p-q)b^{\alpha}_{\alpha}b^{\nu}_{\beta}\rho^{\beta}_{\nu}(\boldsymbol{z}) - \tfrac{2}{3}\mu\rho^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{z})c^{\beta}_{\alpha} - \tfrac{2}{3}\mu\rho^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{z})b^{\beta}_{\alpha}\big].
\end{aligned}$$

Le terme entre crochet dans l'expression précédente s'écrit encore

$$\frac{2}{3}\mu(1-2p+p-q)b^{\nu}_{\nu}b^{\sigma}_{\alpha}\rho^{\alpha}_{\sigma}(\boldsymbol{z}) + \frac{2}{3}\mu(-2+1+3-2)\rho^{\beta}_{\sigma}(\boldsymbol{z})c^{\sigma}_{\beta} = 0,$$

grâce à l'équation $p+q=1$. Ceci termine la preuve de la proposition. ∎

Partie B

Coques elliptiques encastrées

Chapitre V

Développements complets pour les modèles 2D admissibles

Dans toute cette partie, la surface S est supposée elliptique. Sa courbure de Gauss est donc strictement positive. Le but de ce chapitre est de déterminer, sous cette hypothèse géométrique, le développement asymptotique de la solution d'un modèle 2D admissible au sens du chapitre IV associé aux conditions aux limites de Dirichlet. Lorsque la surface S est elliptique, l'opérateur de membrane $\boldsymbol{M}$ est elliptique de multidegré $(2, 2, 0)$ au sens d'Agmon, Douglis et Nirenberg. Un modèle 2D admissible $\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F}$ est alors une *perturbation singulière* de multidegré $(2, 2, 4)$ de l'opérateur $\boldsymbol{M}$.

Les méthodes employées pour obtenir le résultat s'inspirent des travaux de Vishik & Lyusternik [54] effectués dans le cas de perturbations singulières d'opérateurs scalaires. Ainsi, nous allons montrer que le développement asymptotique de la solution est constitué de deux types de termes : d'une part des termes classiques dont les coefficients sont des fonctions indépendantes de ε sur la surface S, de l'autre des termes de *couches limites* qui sont définis dans un voisinage du bord de la surface, et qui sont exponentiellement décroissants dans la direction de la normale rentrante le long de ∂S. Cela permet de donner des estimations d'erreurs optimales entre la solution d'un modèle 2D admissible et la solution fournie par l'opérateur de membrane. De plus, dans le chapitre VI, nous utiliserons ce résultat pour comparer la solution d'un modèle 2D admissible avec le déplacement tridimensionnel.

1 Opérateurs de construction du développement

Dans cette section, après avoir posé le problème, on étudie les deux opérateurs qui fournissent l'existence des termes du développement. Le premier est l'opérateur de membrane $\boldsymbol{M}$ (voir la définition 3.1 du chapitre III), et le second est un opérateur écrit dans un système de coordonnées locales particulier dans un voisinage de ∂S.

Comme dans le chapitre IV, on note S la surface moyenne S_0, et $\mathrm{H}^\ell(S)$ les espaces de Sobolev.

1.1 Position du problème

Dans tout ce chapitre, l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ désigne un modèle 2D admissible au sens de la définition 2.2 du chapitre IV. Cet opérateur s'écrit donc $\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F}$ où $\boldsymbol{F}$ est un opérateur de flexion (voir la définition 2.1 du chapitre IV).

Par définition, l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ est inversible, et le but de ce chapitre est d'étudier la solution $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ de l'équation

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}(\varepsilon)\boldsymbol{z}(\varepsilon) = \boldsymbol{g} \quad \text{dans} \quad S, \\ \boldsymbol{z}(\varepsilon)\big|_{\partial S} = \boldsymbol{c}, \\ \partial_r z_3(\varepsilon)\big|_{\partial S} = c_n, \end{cases} \tag{1.1}$$

où le second membre $\boldsymbol{g}$ est un élément de $\Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$, où $\boldsymbol{c} = (c_r, c_s, c_3) \in \mathscr{C}^\infty(\partial S)^3$ est la restriction au bord ∂S d'un élément de $\Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$, et où $c_n \in \mathscr{C}^\infty(\partial S)$. Le second membre $(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{c}, c_n)$ peut dépendre de ε, et on verra dans la section suivante quelles hypothèses peuvent être faites. Sous ces hypothèses, et d'après la définition d'un modèle 2D admissible, la solution $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ est un élément de $\Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$.

Dans toute la suite, on désigne par (r, s) le système de coordonnées au voisinage de ∂S construit de la manière suivante : supposons que le bord ∂S est donné par la courbe $s \mapsto \alpha(s)$ où s est l'abscisse curviligne. Le long de cette courbe, on peut considérer le champ de vecteurs normal rentrant $n(s)$. Le long de $\alpha(s)$, les champs de vecteurs $\big(\alpha'(s), n(s)\big)$ sont orthogonaux et de norme 1. On considère alors l'application

$$(r, s) \mapsto P(r, s) := \exp_{\alpha(s)}\big(rn(s)\big)$$

pour r assez petit (voir le chapitre I). Pour s fixé, la courbe $r \mapsto P(r, s)$ est la géodésique de longeur r dans la direction $n(s)$ issue du point $P(0, s)$, et le point $P(r, s)$ est donc à une distance géodésique r du bord. Cette application détermine le système de coordonnées (r, s) dans un voisinage tubulaire du bord ∂S. Ce système est en fait un système de coordonnées *normales* pour le bord ∂S plongé dans la variété S de dimension 2 (voir le chapitre I). En particulier, les champs vecteurs

$$\frac{\partial}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial s}$$

sont orthogonaux, et le premier est de norme 1. Le second est égal à $\alpha'(s)$ le long de ∂S, mais il n'est en général pas de norme 1 en des points de coordonnées (r,s) pour $r>0$. On note a_{rr}, a_{rs} et a_{ss} les composantes du tenseur métrique dans ce système de coordonnées. On a alors les relations :

$$\begin{cases} a_{rr}(r,s)=1, \\ a_{rs}(r,s)=0, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} a^{rr}(r,s)=1, \\ a^{rs}(r,s)=0, \end{cases} \tag{1.2}$$

et le fait que s restreint au bord soit l'abscisse curviligne montre que

$$a_{ss}(0,s)=1 \qquad \text{et} \qquad a^{ss}(0,s)=1. \tag{1.3}$$

Les fonctions $a_{ss}(r,s)$ et $a^{ss}(r,s)$ ne sont en général pas identiquement égales à 1. Les symboles de Christoffel liés à cette métrique vérifient donc les relations suivantes (comparables aux relations (3.18) du chapitre I).

$$\begin{array}{rclcrcl} \Gamma^r_{rr}(r,s) &=& 0, & & \Gamma^s_{rs}(r,s) &=& \frac{1}{2}a^{ss}(r,s)\partial_r a_{ss}(r,s), \\ \Gamma^s_{rr}(r,s) &=& 0, & \text{et} & \Gamma^r_{ss}(r,s) &=& -\frac{1}{2}\partial_r a_{ss}(r,s), \\ \Gamma^r_{rs}(r,s) &=& 0, & & \Gamma^s_{ss}(r,s) &=& \frac{1}{2}\partial_s a_{ss}(r,s). \end{array} \tag{1.4}$$

En particulier, on a $\Gamma^s_{ss}(0,s)=0$. Les composantes b_{rr}, b_{ss} et b_{rs} de la seconde forme fondamentale ne sont pas nulles en général.

Le système de coordonnées (r,s,x_3) est donc un système de coordonnées *normales - normales* au voisinage de $\partial S\times(-1,1)$ sur la variété Ω.

Dans la suite, on utilise la notation suivante :

Notation 1.1 Si $\boldsymbol{c}$ est la restriction au bord d'un élément de $\Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ et si $c_n\in\mathscr{C}^\infty(\partial S)$. Alors on note

$$\vec{\boldsymbol{c}}=(\boldsymbol{c},c_n).$$

Puisque dans un voisinage de ∂S, le système de coordonnées (r,s) est systématiquement utilisé, on identifie $\vec{\boldsymbol{c}}$ avec un élément de $\mathscr{C}^\infty(\partial S)^4$ selon l'équation

$$\vec{\boldsymbol{c}}=(c_r,c_s,c_3,c_n)\in\mathscr{C}^\infty(\partial S)^4. \tag{1.5}$$

■

Dans cette section, on étudie l'opérateur $\boldsymbol{M}$ ainsi que le premier terme du développement en ε de l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ dans le système de coordonnées (T,s) où $T=r/\sqrt{\varepsilon}$. Les raisons de l'introduction de la variable T apparaîtront dans la sous-section 1.3.

1.2 Propriétés de l'opérateur de membrane

Le but de cette sous-section est d'étudier les propriétés de l'opérateur de membrane dans le cas où la surface moyenne S est elliptique (et donc uniformément elliptique, car elle est compacte). Rappelons que l'opérateur de membrane à pour expression, si $\boldsymbol{z} \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} -\widetilde{\lambda}\mathrm{D}_\sigma \gamma_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) - 2\mu \mathrm{D}_\alpha \gamma_\sigma^\alpha(\boldsymbol{z}), \\ -\widetilde{\lambda} b_\alpha^\alpha \gamma_\nu^\nu(\boldsymbol{z}) - 2\mu b_\alpha^\beta \gamma_\beta^\alpha(\boldsymbol{z}), \end{cases}$$

avec $\widetilde{\lambda} = 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}$. Les ordres de dérivations de l'opérateur de membrane se représentent par la matrice

$$\deg \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant donne les propriétés de l'opérateur de membrane dans le cas où la surface S est elliptique (voir aussi [28] et [50]) :

Théorème 1.2 *La surface S étant elliptique, l'opérateur de membrane $\boldsymbol{M} = (M_\alpha, M_3)$ agissant sur les inconnues $\boldsymbol{z} = (z_\alpha, z_3)$ est fortement elliptique de multi-degré $(2, 2, 0)$ au sens d'Agmon, Douglis et Nirenberg. L'opérateur de Dirichlet au bord*

$$\boldsymbol{z} \to (z_r, z_s)\big|_{\partial S}$$

recouvre l'opérateur $\boldsymbol{M}$. De plus, le noyau de l'opérateur avec conditions aux limites est réduit à $\{0\}$, et on a l'estimation valable pour tout $\boldsymbol{z} \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$

$$\|\boldsymbol{z}\|_{\mathrm{H}^{p+1} \times \mathrm{H}^{p+1} \times \mathrm{H}^p(S)} \leq C\Big(\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{z})\|_{\mathrm{H}^{p-1} \times \mathrm{H}^{p-1} \times \mathrm{H}^p(S)} + \|(z_r, z_s)\|_{\mathrm{H}^{p+1/2}(\partial S)^2}\Big), \quad (1.6)$$

où p est un indice de régularité fixé $p > -\frac{1}{2}$ et C une constante ne dépendant que de S et p.

Preuve. Soit P un point fixé de la surface S. Dans un voisinage de ce point, il existe un système de coordonnées tel qu'au point P, les vecteurs de bases soient orthonormés pour la métrique et orthogonaux pour la courbure. Si 1 et 2 désignent les indices des vecteurs coordonnées, les composantes des formes fondamentales dans ce système de coordonnées vérifient donc $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$, et $b_{12} = 0$. Ceci implique en particulier que $b_1^1 = b_{11}$ et $b_2^2 = b_{22}$. Dans ce système de coordonnées, l'opérateur de membrane agissant sur une 1-forme $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$

s'écrit

$$
\begin{aligned}
M_1(\boldsymbol{z}) = -\widetilde{\lambda}\partial_1(\partial_1 z_1 + \partial_2 z_2) - 2\mu\partial_{11} z_1 - \mu\partial_{22} z_1 - \mu\partial_{12} z_2 \\
+ \widetilde{\lambda}(b_{11} + b_{22})\partial_1 z_3 + 2\mu b_{11}\partial_1 z_3 + \cdots , \\
M_2(\boldsymbol{z}) = -\widetilde{\lambda}\partial_2(\partial_1 z_1 + \partial_2 z_2) - 2\mu\partial_{22} z_2 - \mu\partial_{11} z_2 - \mu\partial_{12} z_1 \\
+ \widetilde{\lambda}(b_{11} + b_{22})\partial_2 z_3 + 2\mu b_{22}\partial_2 z_3 + \cdots , \\
M_3(\boldsymbol{z}) = -\widetilde{\lambda}(b_{11} + b_{22})(\partial_1 z_1 + \partial_2 z_2) - 2\mu b_1\partial_1 z_1 - 2\mu b_2\partial_2 z_2 \\
+ \widetilde{\lambda}(b_{11} + b_{22})^2 z_3 + 2\mu(b_{11}^2 + b_{22}^2) z_3 + \cdots ,
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

où les $\cdots$ désignent des termes de dérivations d'ordres inférieurs. Si $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, le symbole principal de ce système vaut

$$
\begin{pmatrix}
(\widetilde{\lambda} + 2\mu)\xi_1^2 + \mu\xi_2^2 & (\widetilde{\lambda} + \mu)\xi_1\xi_2 & -iA \\
(\widetilde{\lambda} + \mu)\xi_1\xi_2 & (\widetilde{\lambda} + 2\mu)\xi_2^2 + \mu\xi_1^2 & -iB \\
iA & iB & C
\end{pmatrix}
\tag{1.8}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
A &= \big(\widetilde{\lambda}(b_{11} + b_{22}) + 2\mu b_{11}\big)\xi_1, \\
B &= \big(\widetilde{\lambda}(b_{11} + b_{22}) + 2\mu b_{22}\big)\xi_2, \\
C &= (\widetilde{\lambda} + 2\mu)(b_{11}^2 + b_{22}^2) + 2\widetilde{\lambda} b_{11} b_{22}.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Soit $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in \mathbb{C}^3$. Pour montrer que l'opérateur est fortement elliptique, on calcule la partie correspondant au terme en accolade dans la formule (1.16) du chapitre IV. On trouve

$$
\begin{aligned}
&\big((\widetilde{\lambda} + 2\mu)\xi_1^2 + \mu\xi_2^2\big)|\zeta_1|^2 + (\widetilde{\lambda} + \mu)\xi_1\xi_2(\zeta_2\overline{\zeta}_1 + \zeta_1\overline{\zeta}_2) + \big((\widetilde{\lambda} + 2\mu)\xi_2^2 + \mu\xi_1^2\big)|\zeta_2|^2 \\
&\quad + \big(\widetilde{\lambda}(b_{11} + b_{22}) + 2\mu b_{11}\big)(i\xi_1\overline{\zeta}_1\zeta_3 - i\xi_1\zeta_1\overline{\zeta}_3) \\
&\quad + \big(\widetilde{\lambda}(b_{11} + b_{22}) + 2\mu b_{22}\big)(i\xi_2\overline{\zeta}_2\zeta_3 - i\xi_2\zeta_2\overline{\zeta}_3) \\
&\quad + \big((\widetilde{\lambda} + 2\mu)(b_{11}^2 + b_{22}^2) + 2\widetilde{\lambda} b_{11} b_{22}\big)|\zeta_3|^2.
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Dans cette expression, les termes dépendant de $\widetilde{\lambda}$ s'écrivent encore

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\lambda}\big(\xi_1^2|\zeta_1|^2+\xi_2^2|\zeta_2|^2+\xi_1\zeta_1\xi_2\overline{\zeta}_2+\xi_1\overline{\zeta}_1\xi_2\zeta_2+(b_{11}+b_{22})^2|\zeta_3|^2\\
&\qquad -i(b_{11}+b_{22})\overline{\zeta}_3(\xi_1\zeta_1+\xi_2\zeta_2)+i(b_{11}+b_{22})\zeta_3(\xi_1\overline{\zeta}_1+\xi_2\overline{\zeta}_2)\big)\\
&\quad =\widetilde{\lambda}|\xi_1\zeta_1+\xi_2\zeta_2+i(b_{11}+b_{22})\zeta_3|^2\geq 0.
\end{aligned}$$

Les termes en 2μ s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
&2\mu\big(\xi_1^2|\zeta_1|^2+\tfrac{1}{2}\xi_2^2|\zeta_1|^2+\xi_2^2|\zeta_2|^2+\tfrac{1}{2}\xi_1^2|\zeta_2|^2+\tfrac{1}{2}\xi_1\zeta_2\xi_2\overline{\zeta}_1+\tfrac{1}{2}\xi_1\overline{\zeta}_2\xi_2\zeta_1\\
&\qquad +ib_{11}\zeta_3\xi_1\overline{\zeta}_1-ib_{11}\overline{\zeta}_3\xi_1\zeta_1+ib_{22}\zeta_3\xi_2\overline{\zeta}_2-ib_{22}\overline{\zeta}_3\xi_2\zeta_2+(b_{11}^2+b_{22}^2)|\zeta_3|^2\big) \qquad (1.11)\\
&\quad =2\mu\big(|\xi_1\zeta_1+ib_{11}\zeta_3|^2+|\xi_2\zeta_2+ib_{22}\zeta_3|^2+\tfrac{1}{2}|\xi_2\zeta_1+\xi_1\zeta_2|^2\big).
\end{aligned}$$

D'après les équations (1.10) et (1.11), il suffit de montrer l'existence d'une constante $c>0$ telle que pour tout $(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2$ et pour tout $(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\in\mathbb{C}^3$, on ait

$$|\xi_1\zeta_1+ib_{11}\zeta_3|^2+|\xi_2\zeta_2+ib_{22}\zeta_3|^2+\tfrac{1}{2}|\xi_2\zeta_1+\xi_1\zeta_2|^2\geq c\big(|\boldsymbol{\xi}|^2(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2)+|\zeta_3|^2\big). \qquad (1.12)$$

Supposons $(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2$ et $(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\in\mathbb{C}^3$ fixés, et définissons

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \xi_1\zeta_1+ib_{11}\zeta_3,\\
Y_2 &= \xi_2\zeta_2+ib_{22}\zeta_3,\\
Y_3 &= \xi_2\zeta_1+\xi_1\zeta_2.
\end{aligned}$$

Cette relation s'écrit encore matriciellement

$$\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1&0&ib_{11}\\0&\xi_2&ib_{22}\\\xi_2&\xi_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\\\zeta_3\end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice de l'équation précédente vaut $-i(b_{11}\xi_2^2+b_{22}\xi_1^2)$. On a donc, en calculant la comatrice associée, la relation

$$-i(b_{11}\xi_2^2+b_{22}\xi_1^2)\begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\\\zeta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-ib_{22}\xi_1&ib_{11}\xi_1&-ib_{11}\xi_2\\ib_{22}\xi_2&-ib_{11}\xi_2&-ib_{22}\xi_1\\-\xi_2^2&-\xi_1^2&\xi_1\xi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\end{pmatrix}. \qquad (1.13)$$

Or le fait que la surface soit elliptique implique qu'il existe une constante $c>0$ telle que

$$|b_{11}\xi_2^2+b_{22}\xi_1^2|\geq c_0|\boldsymbol{\xi}|^2.$$

En écrivant l'équation (1.13) composante par composante, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} c_0|\boldsymbol{\xi}|^2|\zeta_1| &\leq C|\boldsymbol{\xi}|(|Y_1| + |Y_2| + |Y_3|), \\ c_0|\boldsymbol{\xi}|^2|\zeta_2| &\leq C|\boldsymbol{\xi}|(|Y_1| + |Y_2| + |Y_3|), \\ c_0|\boldsymbol{\xi}|^2|\zeta_3| &\leq C|\boldsymbol{\xi}|^2(|Y_1| + |Y_2| + |Y_3|). \end{aligned}$$

Ces relations montrent donc la relation (1.12), et ceci termine la démonstration de la forte ellipticité de l'opérateur de membrane.

On en déduit donc que les conditions aux limites de Dirichlet $\boldsymbol{z} \to (z_r, z_s)\big|_{\partial S}$ recouvrent l'opérateur.

Enfin, on a le lemme suivant (voir [11],[15] ou [50]) :

Lemme 1.3 *La surface S étant elliptique, soit $\boldsymbol{z} \in \mathrm{H}_0^1 \times \mathrm{H}_0^1 \times \mathrm{L}^2(S)$ tel que $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{z}) = 0$. Alors on a $\boldsymbol{z} = 0$.*

En utilisant la forme bilinéaire a_0 associée à l'opérateur de membrane, ceci montre que le noyau de $\boldsymbol{M}$ est réduit à $\{0\}$. L'opérateur $\boldsymbol{M}$ est autoadjoint, et on en déduit qu'il est inversible et satisfait l'estimation (1.6). ∎

Remarque 1.4 Le théorème précédent montre que les modèles 2D admissibles sont plus nombreux lorsque la surface S est elliptique. Ainsi, la condition (3.2) du chapitre IV est toujours vérifiée dans ce cas. En particulier, le modèle classique (voir la définition 3.1 du chapitre IV) associé au tenseur

$$\chi_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha\theta_\beta + \mathrm{D}_\beta\theta_\alpha)$$

avec $\theta_\alpha(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\alpha z_3 + b_\alpha^\beta z_\beta$ est un modèle 2D admissible sur une surface elliptique.
∎

Dans la pratique, on utilise le résultat suivant, qui est une conséquence immédiate du théorème précédent.

Théorème 1.5 *La surface S étant elliptique, soit $\boldsymbol{g} \in \Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ et soient c_r et c_s deux fonctions de $\mathscr{C}^\infty(\partial S)$. Alors il existe un unique $\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ tel que*

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{g} \quad \textit{dans} \quad S, \\ \zeta_r\big|_{\partial S} = c_r \quad \textit{et} \quad \zeta_s\big|_{\partial S} = c_s. \end{cases}$$

Comme dans [54], ces propriétés vont permettre de construire un développement asymptotique de la solution de l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ qui est considéré comme une *perturbation singulière* de l'opérateur $\boldsymbol{M}$. Supposons en effet que les seconds membres

$\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{c}$ et c_n du problème (1.1) ne dépendent pas de ε . Suivant la stratégie de [54], on cherche d'abord une solution du problème (1.1) sous forme de série entière en ε . Le fait que l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F}$ ne contienne que des puissances paires de ε incite à chercher $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ de la forme

$$\boldsymbol{z}(\varepsilon) \simeq \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{2k} \boldsymbol{z}^{2k},$$

où les $\boldsymbol{z}^{2k}$ sont des 1-formes. Si on injecte cet *Ansatz* dans l'équation intérieure de (1.1), on trouve la famille d'équations

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{z}^0) = \boldsymbol{g} \quad \text{et} \quad \forall\, k \geq 1\,, \quad \boldsymbol{M}(\boldsymbol{z}^{2k}) = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}^{2k-2}). \tag{1.14}$$

D'après le théorème précédent, si le second membre $\boldsymbol{g}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on peut trouver une famille $\boldsymbol{z}^{2k}$ de champs de 1-forme satisfaisant ces équations de récurrence ayant des traces arbitraires sur le bord. Mais si on peut imposer à $\boldsymbol{z}^0$ d'avoir les traces c_r et c_s sur le bord, la solution $\boldsymbol{z}^0$ ne satisfait en général pas à la condition de Dirichlet $z_3^0 = c_3$ sur ∂S . C'est pourquoi le développement en série entière est insuffisant pour décrire le comportement de la solution. Comme dans [54], on fait un changement de variables pour obtenir un opérateur dans le voisinage du bord ∂S dont les conditions aux limites complètent celles de l'opérateur de membrane.

1.3 Opérateur au bord

Avant d'introduire le changement de variable dans l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$, considérons à titre d'exemple explicatif le problème plus simple suivant, traité dans [54] : soit l'opérateur

$$L(\varepsilon) := -\varepsilon^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{Id}$$

sur l'intervalle $(0,1)$. Soit $g \in \mathscr{C}^\infty(0,1)$, et soit $u(\varepsilon)$ la solution du problème

$$\begin{cases} L(\varepsilon)u(\varepsilon) = g \quad \text{sur} \quad (0,1), \\ u(\varepsilon)(0) = u(\varepsilon)(1) = 0. \end{cases}$$

Comme précédemment, on cherche d'abord une solution de ce problème sous la forme $u(\varepsilon) \simeq \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{2k} u^{2k}$. La famille de fonction $\{u^{2k}\}$ doit alors vérifier les équations

$$u^0 = g \quad \text{et} \quad \forall\, k \geq 1 \quad u^{2k} = (u^{2k-2})''.$$

Il est alors clair qu'on peut trouver une famille de fonctions vérifiant ces conditions, mais qu'on ne peut pas en général imposer les conditions $u^0(0) = u^0(1) = 0$. Comme dans [54], afin de compenser la trace $u^0(0)$, on *homogénéise* l'opérateur $L(\varepsilon)$ en effectuant un changement de variable dans un voisinage du point $x=0$ qui ramène la partie en ε^2 au niveau de la partie en ε^0. Puisque l'opérateur coefficient de ε^2 est d'ordre 2, on effectue le changement de variable $t_0 = x/\varepsilon$. On a alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}.$$

L'opérateur $L(\varepsilon)(x)$ exprimé en variable t_0 s'écrit alors simplement

$$\mathcal{L}(\varepsilon)(t_0) = \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t_0^2} - \mathrm{Id}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\mathcal{L}(U) = 0$ est un espace de dimension 2 engendré par les fonctions

$$t_0 \mapsto e^{t_0} \quad \text{et} \quad t_0 \mapsto e^{-t_0}.$$

On en déduit que sur $\mathbb{R}^+$, si $c \in \mathbb{R}$ est donné, il existe une unique solution $U(t_0)$ exponentiellement décroissante de l'équation

$$\mathcal{L}(U) = 0 \quad \text{et} \quad U(0) = c.$$

Ainsi, la fonction $u^0 = g$ étant donnée, il existe un unique terme $U_0^0(t_0)$ exponentiellement décroissant sur $\mathbb{R}^+$ satisfaisant

$$\mathcal{L}(U_0^0) = 0 \quad \text{et} \quad U_0^0(0) = -u^0(0).$$

De même, on homogénéise l'opérateur $L(\varepsilon)$ au voisinage du point $x = 1$ pour trouver un terme $U_1^0(t_1)$ exponentiellement décroissant en $t_1 = \varepsilon^{-1}(1-x)$ et satisfaisant la condition $U_1^0(0) = -u^0(1)$. On peut ainsi construire un développement asymptotique de la solution $u(\varepsilon)$ (voir [54]) dont les premiers termes, compte-tenu de la relation $u^0 = g$, s'écrivent

$$u(\varepsilon)(x) \simeq g(x) - \chi(x)g(0)e^{-x/\varepsilon} - \chi(1-x)g(1)e^{-(1-x)/\varepsilon} + \cdots,$$

où $\chi(x)$ est une fonction de troncature valant 1 dans un voisinage de 0 et étant identiquement nulle pour $x > \rho$, où ρ est indépendant de ε.

Revenons maintenant à l'étude de l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$. Le but est donc de trouver un changement de variable qui homogénéise l'opérateur pour compenser les traces des termes fournis par l'opérateur de membrane. Pour cela, on se place dans le système de coordonnées (r,s) au voisinage du bord. La composante transverse F_3 de l'opérateur de flexion $\boldsymbol{F}$ est un opérateur d'ordre 4 en z_3. De plus, l'opérateur

M_3 est un opérateur d'ordre 0 en z_3. Pour ramener l'opérateur F_3 au niveau de M_3, le changement de variable a effectuer est donc

$$T = \frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad \text{soit} \qquad \partial_r = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\partial_T. \tag{1.15}$$

La variable T est une variable rapide. Dans le chapitre VI on introduit une autre variable rapide $R = r/\varepsilon$ qui est la même que celle décrivant les termes de couches limites dans les plaques (voir [17, 16]). En notant $\boldsymbol{K}(\varepsilon)(r, s; \partial_r, \partial_s)$ l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ dans les variables (r, s), on définit donc l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{K}}(\varepsilon)$ de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}(\varepsilon)(T, s; \partial_T, \partial_s) := \boldsymbol{K}(\varepsilon)(\varepsilon^{1/2}T, s; \varepsilon^{-1/2}\partial_T, \partial_s). \tag{1.16}$$

L'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{K}}(\varepsilon)$ agit sur les 1-formes de la variété

$$\breve{S} := [\,0, +\infty\,[\times \partial S.$$

En effectuant des développements de Taylor en $T = 0$ des coefficients de l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{K}}(\varepsilon)$, on associe à cet opérateur une série formelle en $\varepsilon^{1/2}$. Puisque l'espace des séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$ est distinct de l'espace des séries formelles en ε, on note $\boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}]$ la série formelle en $\varepsilon^{1/2}$ liée à l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{K}}(\varepsilon)$. Remarquons que puisque l'opérateur $\boldsymbol{M}$ est d'ordre 2, la série formelle $\boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}]$ a une puissance de démarrage égale à -2 en $\varepsilon^{1/2}$. On a donc

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k \geq -2} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{\mathcal{K}}^{k/2}, \tag{1.17}$$

où les $\boldsymbol{\mathcal{K}}^{k/2} : \Gamma(T_1\breve{S}) \times \mathscr{C}^\infty(\breve{S}) \to \Gamma(T_1\breve{S}) \times \mathscr{C}^\infty(\breve{S})$ sont des opérateurs en ∂_T et ∂_s polynomiaux en T. Dans la suite, on s'intéresse à la résolution du problème en série formelle

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}], \tag{1.18}$$

où $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{Z}^{k/2}$ et $\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{G}^{k/2}$ sont des séries formelles à coefficients dans $\Gamma(T_1\breve{S}) \times \mathscr{C}^\infty(\breve{S})$.

Remarquons que le premier terme non nul de la série formelle $\boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}]$ est l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{K}}^{-1}$, qui s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_T^{-1}(\boldsymbol{Z}) &= -\,(\widetilde{\lambda} + 2\mu)\, \partial_{TT} Z_T, \\ \mathcal{K}_s^{-1}(\boldsymbol{Z}) &= -\,\mu\, \partial_{TT} Z_s, \\ \mathcal{K}_3^{-1}(\boldsymbol{Z}) &= 0. \end{aligned} \tag{1.19}$$

De plus, dans l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{K}}^{-1/2}$, la composante $\mathcal{K}_3^{-1/2}$ ne dépend que de M_3, et s'écrit

$$\mathcal{K}_3^{-1/2}(\boldsymbol{Z}) = -2(\widetilde{\lambda}H + \mu b_{rr})\,\partial_T Z_T - 2\mu b_{rs}\,\partial_T Z_s, \tag{1.20}$$

où H est la courbure moyenne de S le long du bord, et où b_{rr} et b_{rs} désignent les composantes de la deuxième forme fondamentale le long du bord. C'est seulement l'opérateur $\mathcal{K}_3^0$ qui fait intervenir des parties issues de l'opérateur F_3. C'est la raison pour laquelle on effectue des changements d'échelles dans le problème (1.18) pour se ramener à une équation en série formelle dont le premier terme opérateur a toutes ses composantes non nulles et fait intervenir les termes issus de l'opérateur F_3. On pose donc

$$\begin{cases} \breve{Z}_\alpha[\varepsilon^{1/2}] = Z_\alpha[\varepsilon^{1/2}], \\ \breve{Z}_3[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon^{1/2} Z_3[\varepsilon^{1/2}], \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \breve{G}_\alpha[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon\, G_\alpha[\varepsilon^{1/2}], \\ \breve{G}_3[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon^{1/2} G_3[\varepsilon^{1/2}], \end{cases} \tag{1.21}$$

et on définit alors la série formelle $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}[\varepsilon^{1/2}]$ par l'équation en série formelle

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = \big(\varepsilon\,\mathcal{K}_\sigma[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\,,\ \varepsilon^{1/2}\mathcal{K}_3[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big). \tag{1.22}$$

On vérifie alors que le problème (1.18) est équivalent au problème

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = \breve{\boldsymbol{G}}[\varepsilon^{1/2}]. \tag{1.23}$$

La série formelle

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{k/2}$$

a alors pour premier terme l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0$ dont les trois composantes s'écrivent, pour $\breve{\boldsymbol{Z}} \in \Gamma(T_1\breve{S}) \times \mathscr{C}^\infty(\breve{S})$:

$$\begin{aligned} \breve{\mathcal{K}}_T^0(\breve{\boldsymbol{Z}}) &= -\,(\widetilde{\lambda} + 2\mu)\,\partial_{TT}\breve{Z}_T + 2(\widetilde{\lambda}H + \mu b_{rr})\,\partial_T\breve{Z}_3, \\ \breve{\mathcal{K}}_s^0(\breve{\boldsymbol{Z}}) &= -\,\mu\,\partial_{TT}\breve{Z}_s + 2\mu b_{rs}\,\partial_T\breve{Z}_3, \\ \breve{\mathcal{K}}_3^0(\breve{\boldsymbol{Z}}) &= -\,2(\widetilde{\lambda}H + \mu b_{rr})\,\partial_T\breve{Z}_T - 2\mu b_{rs}\,\partial_T\breve{Z}_s \\ &\qquad + \tfrac{1}{3}(\widetilde{\lambda} + 2\mu)\,\partial_{TTTT}\breve{Z}_3 + 4\big((\widetilde{\lambda} + 2\mu)H^2 - \mu K\big)\,\breve{Z}_3, \end{aligned} \tag{1.24}$$

où b_{rr}, b_{rs} et b_{ss} désignent les courbures sur le bord $b_{rr}(0,s)$, $b_{rs}(0,s)$ et $b_{ss}(0,s)$, et où $H = \frac{1}{2}(b_{rr} + b_{ss})$ est la courbure moyenne et $K = b_{rr}b_{ss} - b_{rs}^2$ la courbure de Gauss de la surface S aux points considérés (rappelons que la métrique en coordonnées (r,s) est la métrique identité). Cette expression de l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0$

est commune à tous les modèles 2D admissibles, et aussi au modèle en carte (voir la définition 2.8 du chapitre IV).

Remarquons que la variable s n'apparaît que dans les coefficients de $\breve{\mathcal{K}}^0$. Elle joue donc un rôle de paramètre. Pour s fixé, l'opérateur $\breve{\mathcal{K}}^0$ est un système d'équations différentielles ordinaires en T sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Le but étant de résoudre l'équation (1.23), on étudie maintenant les propriétés de l'opérateur $\breve{\mathcal{K}}^0$. Pour cela, on forme le symbole de ce système d'équations différentielles en T (à s fixé) en remplaçant dans chacune d'elles ∂_T par $i\tau$ où τ est un nombre complexe. Ce symbole est donc représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} (\widetilde{\lambda}+2\mu)\tau^2 & 0 & 2i(\widetilde{\lambda}H+\mu b_{rr})\tau \\ 0 & \mu\tau^2 & 2i\mu b_{rs}\tau \\ -2i(\widetilde{\lambda}H+\mu b_{rr})\tau & -2i\mu b_{rs}\tau & \frac{1}{3}(\widetilde{\lambda}+2\mu)\tau^4+b \end{pmatrix}, \tag{1.25}$$

où $b = 4\big((\widetilde{\lambda}+2\mu)H^2 - \mu K\big)$. Le déterminant de cette matrice est égal à

$$\mu\tau^4\left(\frac{1}{3}(\widetilde{\lambda}+2\mu)^2\tau^4 + 4\mu(\widetilde{\lambda}+\mu)b_{ss}^2\right). \tag{1.26}$$

Ce polynôme en τ admet 0 comme racine d'ordre 4, et 4 racines complexes

$$e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt[4]{a}, e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt[4]{a}, e^{\frac{3i\pi}{4}}\sqrt[4]{a} \quad \text{et} \quad e^{-\frac{3i\pi}{4}}\sqrt[4]{a}, \quad \text{où} \quad a = \frac{12\mu(\widetilde{\lambda}+\mu)}{(\widetilde{\lambda}+2\mu)^2}b_{ss}^2 > 0,$$

compte tenu du fait que, la surface S étant compacte et elliptique, elle est elliptique jusqu'au bord.

Parmi ces racines, seules deux sont à parties imaginaires positives, $e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt[4]{a}$ et $e^{\frac{3i\pi}{4}}\sqrt[4]{a}$. On pose alors η_1 la partie imaginaire de ces deux racines, soit

$$\eta_1 = \left(\frac{3\mu(\widetilde{\lambda}+\mu)}{(\widetilde{\lambda}+2\mu)^2}\right)^{1/4}\sqrt{b_{ss}}. \tag{1.27}$$

Remarquons que les 4 racines non nulles du polynôme (1.26) s'écrivent encore

$$\eta_1(1+i), \quad \eta_1(1-i), \quad -\eta_1(1+i) \quad \text{et} \quad -\eta_1(1-i).$$

Considérons maintenant l'équation à s fixé

$$\breve{\mathcal{K}}^0(\breve{\varphi}) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+.$$

Compte tenu du fait que $(\widetilde{\lambda}H + \mu b_{rr}) \neq 0$, on peut transformer ce système en un système triangulaire qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
2(\widetilde{\lambda}H + \mu b_{rr})\,\partial_T\breve{\varphi}_T + 2\mu b_{rs}\,\partial_T\breve{\varphi}_s & \\
-\tfrac{1}{3}(\widetilde{\lambda}+2\mu)\,\partial_{TTTT}\breve{\varphi}_3 - 4\big((\widetilde{\lambda}+2\mu)H^2 - \mu K\big)\,\breve{\varphi}_3 &= 0,\\
\mu\,\partial_{TT}\breve{\varphi}_s - 2\mu b_{rs}\,\partial_T\breve{\varphi}_3 &= 0,\\
\Big(\tfrac{1}{3}(\widetilde{\lambda}+2\mu)^2\partial_{TTTT} + 4\mu(\widetilde{\lambda}+\mu)b_{ss}^2\Big)\partial_T\breve{\varphi}_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

La dernière équation est une équation différentielle en $\breve{\varphi}_3$ dont le symbole s'écrit

$$i\tau\left(\frac{1}{3}(\widetilde{\lambda}+2\mu)^2\tau^4 + 4\mu(\widetilde{\lambda}+\mu)b_{ss}^2\right).$$

On en déduit donc qu'en toute généralité, $\breve{\varphi}_3$ s'écrit

$$\breve{\varphi}_3 = A_1 + A_2e^{-T\eta_1(1+i)} + A_3e^{-T\eta_1(1-i)} + A_4e^{T\eta_1(1+i)} + A_5e^{T\eta_1(1+i)},$$

où A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 sont des constantes complexes. Or on recherche des solutions $\breve{\boldsymbol{\varphi}}$ exponentiellement décroissantes en T. Sous cette hypothèse, on a alors nécessairement $A_1 = A_4 = A_5 = 0$. Il existe donc deux degrés de liberté A_3 et A_4 pour $\breve{\varphi}_3$, et on peut alors naturellement imposer les valeurs de $\breve{\varphi}_3$ et $\partial_T\breve{\varphi}_3$ en $T=0$: si c_3 et c_n sont des réels donnés, l'équation

$$\breve{\varphi}_3(T) = e^{-\eta_1 T}\left(\frac{1}{\eta_1}c_n\sin(\eta_1 T) + c_3\big(\cos(\eta_1 T) + \sin(\eta_1 T)\big)\right) \tag{1.29}$$

détermine l'unique solution exponentiellement décroissante de la troisième composante du système (1.28) sous la condition $\breve{\varphi}_3\big|_{T=0} = c_3$ et $\partial_T\breve{\varphi}_3\big|_{T=0} = c_n$.

La deuxième équation du système (1.28) montre alors que

$$\breve{\varphi}_s(T) = 2b_{rs}\int_T^{+\infty}\breve{\varphi}_3(T)\,\mathrm{d}T \tag{1.30}$$

est l'unique solution $\breve{\varphi}_s$ exponentiellement décroissante. Enfin, l'équation

$$\begin{aligned}
\breve{\varphi}_T(T) &= -\mu b_{rs}(\widetilde{\lambda}H + \mu b_{rr})^{-1}\breve{\varphi}_s(T)\\
&\quad + (\widetilde{\lambda}H + \mu b_{rr})^{-1}\int_T^{\infty}\Big(\tfrac{1}{6}(\widetilde{\lambda}+2\mu)\,\partial_{TTTT}\breve{\varphi}_3(T) + 2\big((\widetilde{\lambda}+2\mu)H^2 - \mu K\big)\,\breve{\varphi}_3(T)\Big)\mathrm{d}T
\end{aligned} \tag{1.31}$$

donne l'unique solution exponentiellement décroissante de la première équation du système (1.28). Ainsi, la condition $\breve{\varphi}_3\big|_{T=0} = c_3$ et $\partial_T\breve{\varphi}_3\big|_{T=0} = c_n$ détermine une unique solution $\breve{\boldsymbol{\varphi}}$ exponentiellement décroissante du système $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{\varphi}}) = 0$, donnée par les équations (1.29), (1.30) et (1.31).

On résume ce résultat par la proposition suivante :

Proposition 1.6 *Soit* $s \in \partial S$ *fixé, et soient* c_3 *et* c_n *deux nombres réels. Il existe une unique fonction* $\breve{\boldsymbol{\varphi}} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+)^3$ *exponentiellement décroissante, solution du système*

$$\begin{cases} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{\varphi}}) = 0 \quad \textit{dans} \quad [\,0, +\infty\,[\\ \breve{\varphi}_3\big|_{T=0} = c_3 \quad \textit{et} \quad \partial_T\breve{\varphi}_3\big|_{T=0} = c_n. \end{cases}$$

De plus $\forall \eta \leq \eta_1$, $e^{\eta T}\breve{\boldsymbol{\varphi}}$ *est borné quand* $T \to \infty$ *.*

Preuve. Les équations (1.29), (1.30) et (1.31) montrent que la solution $\breve{\boldsymbol{\varphi}}$ vérifie bien la condition de décroissance à l'infini. ■

Pour trouver la solution du système avec second membre, on introduit l'espace

$$\mathfrak{T}(\mathbb{R}^+) := \{\, f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+) \quad | \quad \forall\, i, k \in \mathbb{N}, \quad \forall \eta < \eta_1, \quad e^{\eta T} T^k \partial_T^i f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^+)\,\}. \tag{1.32}$$

A cet espace, on associe l'espace de déplacements

$$\boldsymbol{\mathfrak{T}}(\mathbb{R}^+) := \{\, \breve{\boldsymbol{\varphi}} = (\breve{\varphi}_T, \breve{\varphi}_s, \breve{\varphi}_3) \in \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)^3\,\}. \tag{1.33}$$

Si $\breve{\boldsymbol{G}} \in \boldsymbol{\mathfrak{T}}(\mathbb{R}^+)$, on peut construire sur $[\,0, +\infty\,[$ une solution particulière exponentiellement décroissante du système

$$\begin{cases} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}) = \breve{\boldsymbol{G}} \quad \text{dans} \quad [\,0, +\infty\,[, \\ \breve{Z}_3 = \partial_T\breve{Z}_3 = 0 \quad \text{pour} \quad T = 0, \end{cases}$$

grâce à des descriptions explicites des solutions à l'aide d'intégrales : voir les formules de la page 48 dans [2]. Cette solution particulière est alors exponentiellement décroissante, avec un exposant de décroissance plus petit que η_1 . La construction de cette solution, ainsi que la proposition précédente permettent d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 1.7 *Supposons que* $s \in \partial S$ *soit fixé. Soit* $\breve{\boldsymbol{G}} \in \boldsymbol{\mathfrak{T}}(\mathbb{R}^+)$ *, et soient* c_3 *et* c_n *des réels. Il existe un unique* $\breve{\boldsymbol{Z}} \in \boldsymbol{\mathfrak{T}}(\mathbb{R}^+)$ *solution du système*

$$\begin{cases} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}) = \breve{\boldsymbol{G}} \quad \textit{dans} \quad \mathbb{R}^+, \\ \breve{Z}_3\big|_{T=0} = c_3 \quad \textit{et} \quad \partial_T\breve{Z}_3\big|_{T=0} = c_n. \end{cases} \tag{1.34}$$

De plus, si le second membre $\breve{\boldsymbol{G}} \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$ *et si* $c_3(s)$ *et* $c_n(s)$ *sont des fonctions* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* ∂S *, alors la solution* $\breve{\boldsymbol{Z}}$ *du système* (1.34) *définit un élément de* $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$ *.*

Le résultat final provient de ce que la solution admet une représentation intégrale dépendant linéairement des coefficients de $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0$ et des termes du second membre. Si les termes du second membre et les coefficients de $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0$ dépendent de s de manière $\mathscr{C}^\infty$, il en est de même de la solution.

L'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0$ est associé à une forme bilinéaire sur $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$ qui s'écrit pour $\breve{\boldsymbol{Z}}$ et $\breve{\boldsymbol{Y}}$ dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$

$$\breve{a}(\breve{\boldsymbol{Z}}, \breve{\boldsymbol{Y}}) = \int_{\partial S\times\mathbb{R}^+} M^{\alpha\beta\sigma\nu}(0,s)\breve{\gamma}_{\alpha\beta}(\breve{\boldsymbol{Z}})\breve{\gamma}_{\sigma\nu}(\breve{\boldsymbol{Y}})\,\mathrm{d}T\,\mathrm{d}s \\ + \frac{1}{3}\int_{\partial S\times\mathbb{R}^+} M^{\alpha\beta\sigma\nu}(0,s)\breve{\tau}_{\alpha\beta}(\breve{\boldsymbol{Z}})\breve{\tau}_{\sigma\nu}(\breve{\boldsymbol{Y}})\,\mathrm{d}T\,\mathrm{d}s,$$

où les tenseurs $\breve{\gamma}_{\alpha\beta}$ et $\breve{\tau}_{\sigma\nu}$ sont définis par les équations

$$\begin{cases} \breve{\gamma}_{TT}(\breve{\boldsymbol{Y}}) = \partial_T\breve{Y}_T - b_{rr}\breve{Y}_3, \\ \breve{\gamma}_{Ts}(\breve{\boldsymbol{Y}}) = \frac{1}{2}\partial_T\breve{Y}_s - b_{rs}\breve{Y}_3, \\ \breve{\gamma}_{ss}(\breve{\boldsymbol{Y}}) = -b_{ss}\breve{Y}_3, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \breve{\tau}_{TT}(\breve{\boldsymbol{Y}}) = \partial_{TT}\breve{Y}_3, \\ \breve{\tau}_{Ts}(\breve{\boldsymbol{Y}}) = 0, \\ \breve{\tau}_{ss}(\breve{\boldsymbol{Y}}) = 0. \end{cases}$$

Si $\breve{\boldsymbol{Y}}$ vérifie les conditions au bord $\breve{Y}_3 = \partial_T\breve{Y}_3 = 0$ en $T = 0$, une intégration par parties montre que

$$\breve{a}(\breve{\boldsymbol{Z}}, \breve{\boldsymbol{Y}}) = \Big\langle \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}), \breve{\boldsymbol{Y}} \Big\rangle_{\mathrm{L}^2(\breve{S})}.$$

La forme bilinéaire $\breve{a}$ suggère d'introduire l'ensemble

$$\{\, \breve{\boldsymbol{Y}} \in \mathscr{C}^\infty(\breve{S}) \quad | \quad \breve{\gamma}_{\alpha\beta}(\breve{\boldsymbol{Y}}) = \breve{\tau}_{\alpha\beta}(\breve{\boldsymbol{Y}}) = 0 \,\}. \tag{1.35}$$

Puisque la surface S est elliptique, $b_{ss} \neq 0$, et l'ensemble précédent se réduit donc à l'ensemble

$$\{\, \breve{\boldsymbol{Y}} \in \mathscr{C}^\infty(\breve{S}) \quad | \quad \breve{Y}_\alpha = \breve{Y}_\alpha(s) \quad \text{et} \quad \breve{Y}_3 = 0 \,\}.$$

Remarquons que ces éléments correspondent à des traces et on verra dans la suite que les traces $\breve{Z}_T\big|_{\partial S}$ et $\breve{Z}_s\big|_{\partial S}$ des solutions fournies par le théorème 1.7 permettent de déterminer ensuite la partie de l'asymptotique construite à l'aide de l'opérateur $\boldsymbol{M}$.

La combinaison du théorème 1.7 et du théorème 1.5 va permettre de construire un développement en séries formelles complet pour la solution du problème (1.1). Cette étude fait l'objet de la section suivante.

2 Développement complet en séries formelles

On utilise maintenant les opérateurs de la section précédente pour construire un développement en séries formelles qui satisfait les équations à l'intérieur et les équations au bord du problème (1.1). On pose tout d'abord le problème dans des algèbres de séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$. On s'intéresse ensuite à la résolution des équations et aux différentes solutions en fonction des seconds membres.

2.1 Position du problème en séries formelles

La sous-section précédente montre l'existence de deux types de termes qui induisent deux types de séries formelles : d'une part les termes $\boldsymbol{\zeta}(x_1, x_2) \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$, qui sont déterminés dans la construction du développement par l'opérateur de membrane $\boldsymbol{M}$, d'autre part les termes $\boldsymbol{Z}(T, s) \in \Gamma(T_1 \breve{S}) \times \mathscr{C}^\infty(\breve{S})$ qui sont déterminés par l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0$ (après changement d'échelle).

A priori, puisque les modèles 2D ne dépendent que de ε^2 , les séries formelles faisant intervenir les termes $\boldsymbol{\zeta}$ ne sont que des séries formelles en ε^2 , tandis que les séries formelles des termes de couches limites sont des séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$. Mais $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ induit aussi de manière évidente une série formelle en $\varepsilon^{1/2}$ notée

$$\boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}] := \boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F} = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{K}^{k/2},$$

avec

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}^0 & = & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{K}^2 & = & \boldsymbol{F} \end{cases} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{K}^{k/2} = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad k \geq 5.$$

Ainsi, si $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ et $\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{g}^{k/2}$ sont des séries formelles à coefficients dans l'espace $\Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$, l'équation

$$\boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}] \tag{2.1}$$

a un sens, et signifie qu'on a

$$\forall\, k \geq 0 \quad \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^{k/2}) = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-4)/2}) + \boldsymbol{g}^{k/2} \quad \text{dans} \quad S, \tag{2.2}$$

avec la convention que les termes d'indice négatif sont nuls.

D'autre part, on rappelle qu'on associe à $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ la série formelle $\boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}]$ (voir l'équation (1.17)) à coefficients opérateurs en coordonnées (T, s) , et si

$$\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{Z}^{k/2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{G}^{k/2}$$

sont des séries formelles à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$, on considérera des équations de la forme

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}],$$

qui, comme on l'a vu, sont encore équivalents aux équations

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}[\varepsilon^{1/2}]\, \breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = \breve{\boldsymbol{G}}[\varepsilon^{1/2}] \tag{2.3}$$

où les séries formelles $\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ ainsi que $\breve{\boldsymbol{G}}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]$ sont liées par les relations (1.21). Si on note

$$\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\breve{\boldsymbol{Z}}^{k/2} \quad \text{et} \quad \breve{\boldsymbol{G}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\breve{\boldsymbol{G}}^{k/2},$$

les relations (1.21) s'écrivent encore

$$\forall k \geq 0, \quad \begin{cases} Z_\alpha^{k/2} = \breve{Z}_\alpha^{k/2}, \\ Z_3^{k/2} = \breve{Z}_3^{(k+1)/2}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} G_\alpha^{k/2} = \breve{G}_\alpha^{(k+2)/2}, \\ G_3^{k/2} = \breve{G}_3^{(k+1)/2}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Si la série formelle $\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}]$ a une puissance de démarrage égale à 0 , ceci implique que la série formelle $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ correspondante a une puissance de démarrage égale à $-1/2$. La relation (2.3) s'écrit

$$\forall\, k \geq 0, \quad \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^{k/2}) = -\sum_{\ell=0}^{k} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{\ell/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k-\ell)/2}) + \breve{\boldsymbol{G}}^{k/2} \quad \text{dans} \quad \breve{S}.$$

Soient $\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]$ des séries formelles à coefficients respectivement dans les espaces $\Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ et $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$. Les équations (2.1) et (2.3) donnent les équations devant être satisfaites à l'intérieur par les séries formelles $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$. Le but est de raccorder les traces aux bord de ces séries formelles.

Or sur ∂S , on peut définir les séries formelles à coefficients dans $\mathscr{C}^\infty(\partial S)$:

$$\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} := \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\zeta}^{k/2}\big|_{\partial S} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} := \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{Z}^{k/2}\big|_{T=0}.$$

Ainsi, les sommes

$$\begin{aligned} &\zeta_r[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} + Z_T[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S}, \\ &\zeta_s[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} + Z_s[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S}, \\ &\zeta_3[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} + Z_3[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S}, \end{aligned}$$

ont bien un sens, et on note ces relations

$$\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} + \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S}.$$

Dans toute la suite, une opération (addition, combinaison linéaire) sur le bord ∂S liant un générateur 2D $\boldsymbol{\zeta}$ et un élément $\boldsymbol{Z}$ de l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$ signifie toujours qu'on considère que la composante r du générateur 2D est en relation avec la composante T de $\boldsymbol{Z}$.

D'autre part, on peut définir la dérivée normale rentrante de la série $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ le long du bord ∂S par la formule

$$\partial_r \boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] := \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \partial_r \boldsymbol{\zeta}^{k/2},$$

où $\partial_r \boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ est la dérivée de $\boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ par rapport à la coordonnée r dans le système de coordonnées (r, s) le long du bord. Compte tenu de la relation $T = \varepsilon^{-1/2} r$ on peut aussi définir l'action de ∂_r sur la série formelle $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ grâce à la formule

$$\partial_r \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] := \varepsilon^{-1/2} \partial_T \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}].$$

On a donc

$$\begin{aligned}\partial_r \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] &:= \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{(k-1)/2} \partial_T \boldsymbol{Z}^{k/2}(T, s)\\ &= \sum_{k\geq -1} \varepsilon^{k/2} \partial_T \boldsymbol{Z}^{(k+1)/2}(T, s).\end{aligned}$$

Avec la convention que $\zeta_3^{-1/2} = 0$, on peut donc considérer la somme

$$\partial_r \zeta_3[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} + \partial_r Z_3[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} = \sum_{k\geq -1} \varepsilon^{k/2} \big(\partial_r \zeta_3^{k/2}\big|_{\partial S} + \partial_T Z_3^{(k+1)/2}\big|_{T=0}\big). \tag{2.5}$$

Les équations précédentes permettent d'associer au problème (1.1) un problème en séries formelles avec conditions aux limites. Pour cela, on suppose donc données deux séries formelles *de second membre à l'intérieur* :

$$\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{g}^{k/2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{G}^{k/2}, \tag{2.6}$$

où les termes $\boldsymbol{g}^{k/2}$ sont des éléments de $\Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ et où les termes $\boldsymbol{G}^{k/2}(T, s)$ sont des éléments de $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$, et de même, on se donne des séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$ *de second membre de traces* :

$$\boldsymbol{c}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{c}^{k/2} \quad \text{et} \quad c_n[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} c_n^{k/2}, \tag{2.7}$$

où pour tout k, $\boldsymbol{c}^{k/2} = (c_r^{k/2}, c_s^{k/2}, c_3^{k/2})$ est la restriction au bord d'un générateur 2D, et où $c_n^{k/2}$ est un élément de $\mathscr{C}^\infty(\partial S)$. En accord avec la notation 1.1, le second membre de trace se note donc $\vec{\boldsymbol{c}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \vec{\boldsymbol{c}}^{\,k/2}$ avec $\vec{\boldsymbol{c}}^{\,k/2} = (\boldsymbol{c}^{k/2}, c_n^{k/2})$.

Dans la suite de cette section, on cherche donc une solution $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ du problème en séries formelles

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] &=& \boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] &=& \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} + \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} &=& \boldsymbol{c}[\varepsilon^{1/2}], \\ \partial_r\zeta_3[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} + \partial_r Z_3[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} &=& c_n[\varepsilon^{1/2}]. \end{array}\right. \tag{2.8}$$

Remarquons que la deuxième équation de ce système est équivalente à l'équation

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = \breve{\boldsymbol{G}}[\varepsilon^{1/2}]$$

en utilisant le changement d'échelle (1.21).

En utilisant les équations précédentes et les relations (2.4), le système (2.8) équivaut au système suivant : trouver les séries formelles $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ et $\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\breve{\boldsymbol{Z}}^{k/2}$ solutions des équations suivantes, pour tout $k \geq 0$,

$$\left\{\begin{array}{rcll} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^{k/2}) &=& -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-4)/2}) + \boldsymbol{g}^{k/2} & \text{dans} \quad S, \\ \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^{k/2}) &=& -\sum_{\ell=1}^{k} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{\ell/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k-\ell)/2}) + \breve{\boldsymbol{G}}^{k/2} & \text{dans} \quad \breve{S}, \\ \zeta_r^{k/2}\big|_{\partial S} + \breve{Z}_T^{k/2}\big|_{T=0} &=& c_r^{k/2}, & \\ \zeta_s^{k/2}\big|_{\partial S} + \breve{Z}_s^{k/2}\big|_{T=0} &=& c_s^{k/2}, & \\ \zeta_3^{k/2}\big|_{\partial S} + \breve{Z}_3^{(k+1)/2}\big|_{T=0} &=& c_3^{k/2}, & \\ \partial_r\zeta_3^{k/2}\big|_{\partial S} + \partial_T\breve{Z}_3^{(k+2)/2}\big|_{T=0} &=& c_n^{k/2}. & \end{array}\right. \tag{2.9}$$

Dans la suite, on fait l'hypothèse que les termes d'indices négatifs sont nuls. On verra à la fin de cette section quels sont les différents résultats en fonction des hypothèses sur les puissances de démarrages du second membre.

Les propriétés des opérateurs $\boldsymbol{M}$ et $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0$ dégagées dans la section précédente vont maintenant permettre de résoudre le système (2.9).

2.2 Théorème d'existence

En utilisant les notations de la sous-section précédente, le but de cette sous-section est de montrer le résultat suivant :

Théorème 2.1 *La surface S étant elliptique, soit $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ un modèle* 2D *admissible. Soit de plus $\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{g}^{k/2}$ une série formelle à coefficients dans l'espace $\Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$, $\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{G}^{k/2}$ une série formelle à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$, et $\vec{\boldsymbol{c}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\vec{\boldsymbol{c}}^{\,k/2}$ une série formelle à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty(\partial S)^4$. Alors il existe un unique couple $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ de séries formelles à coefficients respectivement dans les espaces $\Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ et $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$, solution du système*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] &=& \boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}],\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] &=& \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}],\\ \boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} + \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} &=& \boldsymbol{c}[\varepsilon^{1/2}],\\ \partial_r\zeta_3[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} + \partial_r Z_3[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S} &=& c_n[\varepsilon^{1/2}]. \end{array}\right. \tag{2.10}$$

Preuve. L'existence des termes du développement se montre par récurrence. Les relations (2.4) montrent que la série formelle $\breve{\boldsymbol{G}}[\varepsilon^{1/2}]$ vérifie

$$\breve{\boldsymbol{G}}^0 = 0 \quad \text{et} \quad \breve{\boldsymbol{G}}^{1/2} = (0, G_3^0).$$

Les équations vérifiées par les séries formelles inconnues $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}]$ s'écrivent alors

$$\forall k\geq 0,\quad \left\{\begin{array}{rcl} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^{k/2}) &=& -\sum_{\ell=1}^k \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{\ell/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k-\ell)/2}) + \breve{\boldsymbol{G}}^{k/2} \quad \text{dans} \quad \breve{S},\\ \breve{Z}_3^{k/2}\big|_{T=0} + \zeta_3^{(k-1)/2}\big|_{\partial S} &=& c_3^{(k-1)/2},\\ \partial_T\breve{Z}_3^{k/2}\big|_{T=0} + \partial_r\zeta_3^{(k-2)/2} &=& c_n^{(k-2)/2}, \end{array}\right. \tag{2.11}$$

pour les équations des termes de couches limites, et

$$\forall k\geq 0,\quad \left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^{k/2}) &=& -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-4)/2}) + \boldsymbol{g}^{k/2} \quad \text{dans} \quad S,\\ \zeta_r^{k/2}\big|_{\partial S} + \breve{Z}_T^{k/2}\big|_{T=0} &=& c_r^{k/2},\\ \zeta_s^{k/2}\big|_{\partial S} + \breve{Z}_s^{k/2}\big|_{T=0} &=& c_s^{k/2}, \end{array}\right. \tag{2.12}$$

pour les termes définis sur toute la surface S. Remarquons que ces deux groupes d'équations ne sont pas indépendants l'un de l'autre, mais liés par des termes au bord.

Pour $k = 0$, ces équations s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{rcl} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^0) &=& 0 \quad \text{dans} \quad \breve{S}, \\ \breve{Z}_3^0\big|_{T=0} &=& 0, \\ \partial_T \breve{Z}_3^0\big|_{T=0} &=& 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^0) &=& \boldsymbol{g}^0 \quad \text{dans} \quad S, \\ \zeta_r^0\big|_{\partial S} + \breve{Z}_T^0\big|_{T=0} &=& c_r^0, \\ \zeta_s^0\big|_{\partial S} + \breve{Z}_s^0\big|_{T=0} &=& c_s^0. \end{array}\right. \tag{2.13}$$

En utilisant le théorème 1.7, on voit que le premier groupe d'équations implique que $\breve{\boldsymbol{Z}}^0 = 0$. Grâce aux propriétés de l'opérateur $\boldsymbol{M}$ énoncées dans le théorème 1.5, il existe alors $\boldsymbol{\zeta}^0 \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^0) = \boldsymbol{g}^0 \quad \text{dans} \quad S, \\ \zeta_r^0\big|_{\partial S} = c_r^0 \quad \text{et} \quad \zeta_s^0\big|_{\partial S} = c_s^0. \end{array}\right.$$

Les équations (2.13) sont alors vérifiées. Pour $k = 1$, les équations (2.11) et (2.12) s'écrivent alors compte tenu de $\breve{\boldsymbol{Z}}^0 = 0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}) &=& \breve{\boldsymbol{G}}^{1/2} \quad \text{dans} \quad \breve{S}, \\ \breve{Z}_3^{1/2}\big|_{T=0} &=& c_3^0 - \zeta_3^0\big|_{\partial S}, \\ \partial_T \breve{Z}_3^{1/2}\big|_{T=0} &=& 0, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^{1/2}) &=& \boldsymbol{g}^{1/2} \quad \text{dans} \quad S, \\ \zeta_r^{1/2}\big|_{\partial S} &=& c_r^{1/2} - \breve{Z}_T^{1/2}\big|_{T=0}, \\ \zeta_s^{1/2}\big|_{\partial S} &=& c_s^{1/2} - \breve{Z}_s^{1/2}\big|_{T=0}. \end{array}\right. \tag{2.14}$$

Le théorème 1.7 montre alors l'existence de $\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2} \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$ satisfaisant le premier groupe d'équation, (le terme $\boldsymbol{\zeta}^0$ est déterminé), et le théorème 1.5 montre l'existence de $\boldsymbol{\zeta}^{1/2} \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ satisfaisant le deuxième groupe d'équations.

Supposons alors que les termes $\boldsymbol{\zeta}^{\ell/2} \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ et $\breve{\boldsymbol{Z}}^{\ell/2} \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$ soient déterminés pour $\ell = 0, \ldots, k$ où k est un entier, et qu'ils satisfont les équations (2.11) et (2.12) jusqu'à l'ordre k. L'équation (2.11) s'écrit alors au rang $k+1$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k+1)/2}) &=& -\sum_{\ell=1}^{k+1} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{\ell/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k+1-\ell)/2}) + \breve{\boldsymbol{G}}^{(k+1)/2} \quad \text{dans} \quad \breve{S}, \\ \breve{Z}_3^{(k+1)/2}\big|_{T=0} + \zeta_3^{k/2}\big|_{\partial S} &=& c_3^{k/2}, \\ \partial_T \breve{Z}_3^{(k+1)/2}\big|_{T=0} + \partial_r \zeta_3^{(k-1)/2} &=& c_n^{(k-1)/2}. \end{array}\right.$$

Grâce aux propriétés des opérateurs $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{k/2}$ pour $k \geq 0$ et de la définition de l'espace $\mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)$, le second membre de l'équation à l'intérieur du système précédent définit bien un élément de $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$. Le théorème 1.7 garantit alors l'existence du terme $\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k+1)/2}$ dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$. Les équations (2.12) au rang $k+1$

s'écrivent alors

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^{(k+1)/2}) &= -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-3)/2}) + \boldsymbol{g}^{(k+1)/2} \quad \text{dans} \quad S, \\ \zeta_r^{(k+1)/2}\big|_{\partial S} + \breve{Z}_T^{(k+1)/2}\big|_{T=0} &= c_r^{(k+1)/2}, \\ \zeta_s^{(k+1)/2}\big|_{\partial S} + \breve{Z}_s^{(k+1)/2}\big|_{T=0} &= c_s^{(k+1)/2}, \end{cases}$$

et le théorème 1.5 montre l'existence du terme $\boldsymbol{\zeta}^{(k+1)/2}$ dans l'espace $\Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ satisfaisant ces équations. Ceci montre l'hypothèse de récurrence au rang $k+1$, et termine la preuve du théorème. ∎

En examinant la démonstration précédente, le fait que $\breve{\boldsymbol{Z}}^0 = 0$ implique en utilisant les relations (2.4) que $Z_3^{-1/2} = 0$ et $Z_\alpha^0 = 0$. Le premier terme de couches limites est donc le terme $\boldsymbol{Z}^0 = (0, Z_3^0)$. On a donc

$$\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{\zeta}^0 + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\zeta}^{k/2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = (0, Z_3^0) + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{Z}^{k/2}. \tag{2.15}$$

Par linéarité, le théorème précédent se généralise sans problème aux cas où le second membre admet des puissances de démarrages différentes de 0. On étudie dans la sous-section suivante les différentes possibilités de structure de la solution $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ en fonction de la structure du second membre.

Remarque 2.2 Le théorème 2.1 est encore valable pour le modèle en carte (voir la définition 2.8 du chapitre IV). Ceci est dû aux propriétés de l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0$, qui est commun aux modèles 2D admissibles et au modèle en carte. La structure de la solution est la même que celle de l'équation (2.15). ∎

2.3 Influence des seconds membres

On étudie maintenant les 6 cas génériques de seconds membres en séries formelles pour le problème (2.10). Dans certains cas, on peut en effet montrer l'annulation de certains termes, ce qui entraîne que les puissances de démarrage du développement de la solution $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ ne sont pas celles de (2.15).

Par linéarité, il suffit de considérer des développements qui sont d'ordres 0 en $\varepsilon^{1/2}$, c'est-à-dire des seconds membres tels que $\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{g}^0$, $\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{G}^0$ et $\vec{\boldsymbol{c}}\,[\varepsilon^{1/2}] = \vec{\boldsymbol{c}}^{\,0} = (c_r^0, c_s^0, c_3^0, c_n^0)$.

Dans tous les cas qui suivent, la démonstration du théorème 2.1 montre que le terme $\breve{\boldsymbol{Z}}^0$ est nul. Le premier terme de couche limite ne peut donc être que le terme $\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}$, et ceci implique qu'on a toujours $Z_\alpha^0 = 0$.

Cas 1 : $\boldsymbol{g}^0 \neq 0$, $\boldsymbol{G}^0 = 0$ et $\vec{\boldsymbol{c}}^{\,0} = 0$. Le terme $\boldsymbol{\zeta}^0$ est non nul en vertu de l'équation (2.13). Le terme $\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}$ est alors fourni par l'équation

$$\begin{cases} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}) = 0 \quad \text{dans} \quad \breve{S}, \\ \breve{Z}_3^{1/2}\big|_{T=0} = -\zeta_3^0\big|_{\partial S} \quad \text{et} \quad \partial_T \breve{Z}_3^{1/2}\big|_{T=0} = 0, \end{cases}$$

ce qui montre que $\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2} \neq 0$ en général. Le développement de la solution de (2.10) s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{\zeta}^0 + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\zeta}^{k/2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = (0, Z_3^0) + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{Z}^{k/2},$$

et on est dans la situation de l'équation (2.15).

Cas 2 : $\boldsymbol{g}^0 = 0$, $\boldsymbol{G}^0 = (G_\alpha^0, 0)$ et $\vec{\boldsymbol{c}}^{\,0} = 0$. Dans ce cas, on a $\breve{\boldsymbol{G}}^0 = \breve{\boldsymbol{G}}^{1/2} = 0$. L'équation (2.13) montre que $\boldsymbol{\zeta}^0 = 0$ par unicité de la solution de l'opérateur de membrane. D'après l'équation (2.14), le terme $\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}$ vérifie alors l'équation

$$\begin{cases} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}) = 0 \quad \text{dans} \quad \breve{S}, \\ \breve{Z}_3^{1/2}\big|_{T=0} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_T \breve{Z}_3^{1/2}\big|_{T=0} = 0, \end{cases}$$

ce qui montre que $\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2} = 0$. Toujours d'après l'équation (2.14), le terme $\boldsymbol{\zeta}^{1/2}$ vérifie alors l'équation

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^{1/2}) = 0 \quad \text{dans} \quad S, \\ \zeta_\alpha^{1/2}\big|_{\partial S} = 0, \end{cases}$$

ce qui implique que $\boldsymbol{\zeta}^{1/2} = 0$. Mais $\breve{\boldsymbol{Z}}^1 \neq 0$ en général, car ce dernier terme vérifie l'équation

$$\begin{cases} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^1) = \breve{\boldsymbol{G}}^1 = (G_\alpha^0, 0) \quad \text{dans} \quad \breve{S}, \\ \breve{Z}_3^1\big|_{\partial S} = \partial_T \breve{Z}_3^1\big|_{\partial S} = 0. \end{cases}$$

Ceci implique alors que $\boldsymbol{\zeta}^1 \neq 0$ en général. On en déduit donc que le développement est du type

$$\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon\,\boldsymbol{\zeta}^1 + \sum_{k\geq 3} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\zeta}^{k/2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = (0, \varepsilon^{1/2} Z_3^0) + \sum_{k\geq 2} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{Z}^{k/2}.$$

Cas 3 : $\boldsymbol{g}^0 = 0$, $\boldsymbol{G}^0 = (0, G_3^0)$ et $\vec{\boldsymbol{c}}^{\,0} = 0$. Dans ce cas, l'équation (2.13) montre que $\boldsymbol{\zeta}^0 = 0$. En revanche, d'après l'équation (2.14) le terme $\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}$ vérifie l'équation

$$\begin{cases} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}) = \breve{\boldsymbol{G}}^{1/2} = (0, G_3^0) \quad \text{dans} \quad \breve{S}, \\ \breve{Z}_3^{1/2}\big|_{T=0} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_T \breve{Z}_3^{1/2} = 0, \end{cases}$$

ce qui montre que ce terme n'est pas nul en général, et ceci entraîne que le terme $\boldsymbol{\zeta}^{1/2}$ n'est pas nul en général. On en déduit donc que

$$\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon^{1/2}\boldsymbol{\zeta}^{1/2} + \sum_{k\geq 2} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\zeta}^{k/2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = (0, Z_3^0) + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{Z}^{k/2}.$$

Cas 4 : $\boldsymbol{g}^0 = 0$, $\boldsymbol{G}^0 = 0$ et $\vec{\boldsymbol{c}}^{\,0} = (c_\alpha^0, 0, 0)$. Le terme $\boldsymbol{\zeta}^0$ vérifie l'équation

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^0) = 0 \quad \text{dans} \quad S, \\ \zeta_\alpha^0 = c_\alpha^0. \end{cases}$$

Ce terme est donc non nul en général, et le développement est du même type que dans le **cas 1**.

Cas 5 : $\boldsymbol{g}^0 = 0$, $\boldsymbol{G}^0 = 0$ et $\vec{\boldsymbol{c}}^{\,0} = (0, c_3^0, 0)$. L'équation (2.13) montre que $\boldsymbol{\zeta}^0 = 0$. En revanche, le terme $\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}$ vérifie l'équation

$$\begin{cases} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}) = 0 \quad \text{dans} \quad \breve{S}, \\ \breve{Z}_3^{1/2}\big|_{T=0} = c_3^0 \quad \text{et} \quad \partial_T \breve{Z}_3^{1/2} = 0, \end{cases}$$

et donc on a $\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2} \neq 0$ en général. Le développement est donc du même type que dans le **cas 3**.

Cas 6 : $\boldsymbol{g}^0 = 0$, $\boldsymbol{G}^0 = 0$ et $\vec{\boldsymbol{c}}^{\,0} = (0, 0, c_n)$. Dans ce cas, l'équation (2.13) montre que $\boldsymbol{\zeta}^0 = 0$. De plus, le terme $\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}$ vérifie l'équation

$$\begin{cases} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}) = 0 \quad \text{dans} \quad \breve{S}, \\ \breve{Z}_3^{1/2}\big|_{T=0} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_T \breve{Z}_3^{1/2} = 0, \end{cases}$$

et il est donc nul, ce qui entraîne que $\boldsymbol{\zeta}^{1/2}$ est nul car il vérifie alors d'après l'équation (2.14)

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^{1/2}) = 0 \quad \text{dans} \quad S, \\ \zeta_\alpha^{1/2}\big|_{\partial S} = 0. \end{cases}$$

En revanche, le terme $\breve{\boldsymbol{Z}}^1 \neq 0$ en général, car il vérifie l'équation

$$\begin{cases} \breve{\mathcal{K}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^1) = 0 \\ \breve{Z}_3^1\big|_{\partial S} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_T \breve{Z}_3^1\big|_{\partial S} = c_n^0. \end{cases}$$

Le développement est donc du même type que dans le **cas 2**.

On résume les calculs précédents dans le tableau suivant. Les trois premières colonnes donnent l'expression du second membre, et les deux dernières colonnes donnent l'expression du premier terme non nul dans les développements $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ de la solution. Les points de suspension désigne un développement en série formelle dont la puissance de démarrage est supérieure au premier terme écrit.

$\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}]$	$\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]$	$\vec{\boldsymbol{c}}\,[\varepsilon^{1/2}]$	$\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$	$\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$
$\boldsymbol{g}^0$	0	0	$(0, Z_3^0) + \cdots$	$\boldsymbol{\zeta}^0 + \cdots$
0	$(G_\alpha^0, 0)$	0	$(0, \varepsilon^{1/2} Z_3^{1/2}) + \cdots$	$\varepsilon\, \boldsymbol{\zeta}^1 + \cdots$
0	$(0, G_3^0)$	0	$(0, Z_3^0) + \cdots$	$\varepsilon^{1/2} \boldsymbol{\zeta}^{1/2} + \cdots$
0	0	$(c_\alpha^0, 0, 0)$	$(0, Z_3^0) + \cdots$	$\boldsymbol{\zeta}^0 + \cdots$
0	0	$(0, c_3^0, 0)$	$(0, Z_3^0) + \cdots$	$\varepsilon^{1/2} \boldsymbol{\zeta}^{1/2} + \cdots$
0	0	$(0, 0, c_n^0)$	$(0, \varepsilon^{1/2} Z_3^{1/2}) + \cdots$	$\varepsilon\, \boldsymbol{\zeta}^1 + \cdots$

Tableau 1. *Structures des développements en fonction du second membre.*

Dans le chapitre VI, on montre comment on peut utiliser ce tableau dans la construction du développement asymptotique du déplacement tridimensionnel.

3 Développement asymptotique

Dans cette dernière section, on montre que les séries formelles construites dans la section précédente permettent de construire des développements asymptotiques des solutions des modèles 2D admissibles. Cela a un intérêt si on travaille avec un modèle 2D admissible fixé, c'est-à-dire si on considère que ce modèle 2D est *la réalité* et si on cherche à approcher la solution fournie par ce modèle. Mais on verra dans le chapitre VI que cela permet aussi de comparer la différence entre la solution d'un modèle 2D admissible et le déplacement tridimensionnel. Le but est donc de déterminer le développement asymptotique de la solution du problème (1.1) dans le cas où le second membre $\boldsymbol{g}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et où les données au bord sont nulles ($\vec{\boldsymbol{c}} = 0$).

3.1 Ansatz de développement asymptotique

Dans toute la suite, on suppose que le second membre $\boldsymbol{g}$ du problème (1.1) dépend de ε , et admet un développement asymptotique

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\varepsilon) \simeq \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\, \boldsymbol{g}^{k/2}$$

où les $\boldsymbol{g}^{k/2}$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur S indépendante de ε . Cette hypothèse signifie donc que pour tout $N \in \mathbb{N}$ fixé, il existe une constante $C_N > 0$ telle que

$$\|\boldsymbol{g}(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{g}^{k/2}\| \leq C_N \varepsilon^{(N+1)/2}$$

pour une norme quelconque sur S indépendante de ε . Soit $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ un modèle 2D admissible, le but de cette section est de trouver le développement asymptotique de $\boldsymbol{z}(\varepsilon) \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ solution du système

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}(\varepsilon)\boldsymbol{z}(\varepsilon) = \boldsymbol{g}(\varepsilon) \quad \text{dans} \quad S, \\ z_i(\varepsilon)\big|_{\partial S} = \partial_r z_3(\varepsilon)\big|_{\partial S} = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

La section précédente montre l'existence de deux séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$

$$\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{\zeta}^{k/2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{Z}^{k/2} \tag{3.2}$$

qui vérifient les équations (2.10) avec second membre $\vec{\boldsymbol{c}}\,[\varepsilon^{1/2}] = 0$, $\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}] = 0$ et $\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\, \boldsymbol{g}^{k/2}$, la série formelle induite par le développement asymptotique de la 1-forme $\boldsymbol{g}$.

Remarquons que pour tout $k \geq 0$, les sommes $\boldsymbol{\zeta}^{k/2} + \boldsymbol{Z}^{k/2}$ ne peuvent pas être définies, car les termes $\boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ et $\boldsymbol{Z}^{k/2}$ ne sont pas de même nature et ne peuvent pas être additionnés pour former un élément de $\Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$. Afin de donner un sens aux sommes partielles correspondant à un développement asymptotique, on introduit une fonction de troncature $\chi(r)$ au voisinage du bord :

Définition 3.1 Supposons que le système de coordonnées (r, s) soit bien défini le long de ∂S pour $r < \rho$, où $\rho > 0$ est un réel indépendant de ε . On note alors $\chi(r)$ une fonction fixée de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie dans le système de coordonnées (r, s) , telle qu'il existe deux nombres $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho$ indépendants de ε vérifiant

$$\chi(r) \equiv 1 \quad \text{pour} \quad r < \rho_1 \quad \text{et} \quad \chi(r) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad r > \rho_2.$$

■

On vérifie alors que la somme

$$\boldsymbol{\zeta}^{k/2} + \chi(r)\boldsymbol{Z}^{k/2},$$

définit alors bien un élément de $\Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$. Hors du voisinage tubulaire de ∂S où le système de coordonnées (r, s) est défini, cette somme vaut simplement $\boldsymbol{\zeta}^{k/2}$, et pour $r < \rho$, cette somme vaut

$$\boldsymbol{\zeta}^{k/2}(r, s) + \chi(r)\boldsymbol{Z}^{k/2}\big(\tfrac{r}{\sqrt{\varepsilon}}, s\big),$$

c'est-à-dire dans le système de coordonnées (r, s)

$$\begin{pmatrix} \zeta_r^{k/2}(r, s) + \chi(r) Z_T^{k/2}\big(\tfrac{r}{\sqrt{\varepsilon}}, s\big) \\ \zeta_s^{k/2}(r, s) + \chi(r) Z_s^{k/2}\big(\tfrac{r}{\sqrt{\varepsilon}}, s\big) \\ \zeta_3^{k/2}(r, s) + \chi(r) Z_3^{k/2}\big(\tfrac{r}{\sqrt{\varepsilon}}, s\big) \end{pmatrix}.$$

Dans la suite de cette section, on montre que le développement

$$\sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k/2}\big(\boldsymbol{\zeta}^{k/2} + \chi(r)\boldsymbol{Z}^{k/2}\big) \tag{3.3}$$

est un développement asymptotique de la solution $\boldsymbol{z}$ du problème (3.1).

Remarque 3.2 On peut aussi supposer que le second membre $\boldsymbol{g}$ du problème (3.1) admet un développement asymptotique

$$\boldsymbol{g}(\varepsilon) \simeq \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k/2}\big(\boldsymbol{g}^{k/2} + \chi(r)\boldsymbol{G}^{k/2}\big).$$

La section précédente fournit une solution $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ en séries formelles du problème (2.10) associé au second membre $\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{g}^{k/2}$ et $\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{G}^{k/2}$, et les mêmes méthodes que celles développées ci-dessous montreraient que le développement (3.3) est un développement asymptotique de la solution $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$. ■

3.2 Validation du développement

Le but de cette sous-section est d'estimer la différence entre $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ solution du système (3.1) et les sommes partielles du développement (3.3). Pour cela, on pose tout d'abord :

Définition 3.3 Le couple de séries formelle $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ étant solution du problème (2.10) associé aux seconds membres $\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{g}^{k/2}$, $\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}] = 0$ et $\vec{\boldsymbol{c}}\,[\varepsilon^{1/2}] = 0$, on note pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{z}^N(\varepsilon) := \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^{k/2}\big(\boldsymbol{\zeta}^{k/2} + \chi(r)\boldsymbol{Z}^{k/2}\big) \in \Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S). \tag{3.4}$$

On a alors $\boldsymbol{z}^N = \boldsymbol{\theta}^N(\varepsilon) + \chi(r)\boldsymbol{\Lambda}^N(\varepsilon)$ avec par définition

$$\boldsymbol{\theta}^N(\varepsilon) := \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\zeta}^{k/2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Lambda}^N(\varepsilon) := \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{Z}^{k/2}.$$

■

Pour évaluer la différence entre $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ et $\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)$, on utilise le même procédé que dans [17] : on estime d'abord cette différence de façon grossière en utilisant une estimation a priori de la solution du système (1.1), puis on utilise cette estimation pour un rang N élevé en évaluant les normes des termes négligés. Ce procédé fournit des estimations d'erreur optimales, c'est-à-dire des estimations où la norme de l'erreur est du même ordre de grandeur en ε que le premier terme négligé.

Soit donc $\boldsymbol{K}(\varepsilon) = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2\boldsymbol{F}$ un modèle 2D admissible. D'après la propriété (i) de la définition 2.2 du chapitre IV, il vérifie en particulier l'inégalité

$$\big\langle \boldsymbol{K}(\varepsilon)\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(S)^3} \geq C\varepsilon^2 \|\boldsymbol{z}\|^2_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)} \tag{3.5}$$

pour $\boldsymbol{z} \in \Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ vérifiant les conditions au bord $\boldsymbol{z}\big|_{\partial S} = 0$ et $\partial_r z_3\big|_{\partial S} = 0$.

Cette inégalité permet de montrer le résultat suivant :

Proposition 3.4 *Pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *, on a l'estimation*

$$\|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \boldsymbol{z}^N(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)} \leq C\,\varepsilon^{N/2-9/4}. \tag{3.6}$$

Preuve. D'après la démonstration du théorème 2.1, il est clair que le terme $\boldsymbol{z}^N(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^{k/2}\big(\boldsymbol{\zeta}^{k/2} + \chi(r)\boldsymbol{Z}^{k/2}\big)$ vérifie

$$\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)\big|_{\partial S} = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_r z_3^N(\varepsilon)\big|_{\partial S} = \varepsilon^{N/2}\partial_r\boldsymbol{\zeta}_3^{N/2}\big|_{\partial S}\,.$$

On définit alors l'élément de $\Gamma(T_1S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$

$$\boldsymbol{t}^N := \begin{pmatrix} 0 \\ -\big(\partial_r\boldsymbol{\zeta}_3^{N/2}\big|_{\partial S}\big) r\chi(r) \end{pmatrix}.$$

Le champ de tenseurs $\overline{\boldsymbol{z}}^N(\varepsilon) := \boldsymbol{z}^N(\varepsilon) + \varepsilon^{N/2}\boldsymbol{t}^N$ vérifie alors les conditions aux limites de Dirichlet $\overline{\boldsymbol{z}}^N(\varepsilon)\big|_{\partial S} = 0$ et $\partial_r\overline{z}_3^N(\varepsilon)\big|_{\partial S} = 0$. On peut donc appliquer à l'élément $\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \overline{\boldsymbol{z}}^N(\varepsilon)$ l'estimation (3.5). Il est reste alors à estimer le terme $\boldsymbol{K}(\varepsilon)\big(\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \overline{\boldsymbol{z}}^N(\varepsilon)\big)$.

La série formelle $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ vérifie l'équation

$$\boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}].$$

On a donc pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{K}(\varepsilon)\boldsymbol{\theta}^N(\varepsilon) - \boldsymbol{g}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{(N+1)/2}),$$

où $\mathcal{O}(\varepsilon^{(N+1)/2})$ désigne un élément de $\Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ borné par $C_N\varepsilon^{(N+1)/2}$ pour n'importe quelle norme sur S , où C_N est une constante indépendante de ε . On en déduit donc que

$$\boldsymbol{K}(\varepsilon)\big(\boldsymbol{\theta}^N(\varepsilon) + \varepsilon^{N/2}\boldsymbol{t}^N\big) - \boldsymbol{g}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N/2}). \tag{3.7}$$

De plus, si $\boldsymbol{y} \in \Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$ on a la relation

$$\Big|\big\langle\boldsymbol{K}(\varepsilon)\big(\chi\boldsymbol{\Lambda}^N(\varepsilon)\big),\boldsymbol{y}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(S)^3} - \big\langle\boldsymbol{K}(\varepsilon)\big(\boldsymbol{\Lambda}^N(\varepsilon)\big),\chi\boldsymbol{y}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(S)^3}\Big| \leq C\,e^{-\beta/\sqrt{\varepsilon}}\|\boldsymbol{y}\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)}, \tag{3.8}$$

où $\eta_1 > \beta > 0$. Cette dernière relation est due au fait que $\partial_r\chi(r)$ a un support dans un ouvert $(\rho_1,\rho_2)\times\partial S$ de S qui est à une distance de ∂S indépendante de ε et que les termes de couches limites du type $\boldsymbol{Z}\big(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}},s\big)$ sont uniformément exponentiellement décroissants en $T = \frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Enfin, par définition, on a en se plaçant dans le système de coordonnées (T,s) , en faisant le changement d'échelle (1.21) et en utilisant (1.16),

$$\big\langle\boldsymbol{K}(\varepsilon)\big(\boldsymbol{\Lambda}^N(\varepsilon)\big),\chi\boldsymbol{y}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(S)^3} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big\langle\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}(\varepsilon)\big(\breve{\boldsymbol{\Lambda}}^N(\varepsilon)\big),\breve{\boldsymbol{y}}\Big\rangle_{\mathrm{L}^2(\breve{S})^3},$$

où on a posé

$$\breve{\boldsymbol{y}}(T,s) := \chi(\varepsilon^{1/2}T)\big(y_T, y_s, \varepsilon^{1/2}y_3\big)(\varepsilon^{1/2}T,s),$$

et où

$$\breve{\boldsymbol{\Lambda}}^N(\varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^{k/2}\breve{\boldsymbol{Z}}^{k/2} + \varepsilon^{(N+1)/2}(0,\breve{Z}_3^{(N+1)/2}).$$

L'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}(\varepsilon)$ est l'opérateur $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ après changement de variable et changement d'inconnues. Le développement de Taylor en $T=0$ de l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}(\varepsilon)$ correspond donc à la série formelle $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}[\varepsilon^{1/2}]$. Remarquons que le produit scalaire précédent a bien un sens car $\breve{\boldsymbol{y}}$ a un support compact. Or la série formelle $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ à partir de laquelle est bâtie le champ de tenseurs $\boldsymbol{\Lambda}^N(\varepsilon)$ vérifie l'équation

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = 0.$$

On en déduit que

$$\big\langle \boldsymbol{K}(\varepsilon)\big(\boldsymbol{\Lambda}^N(\varepsilon)\big), \chi \boldsymbol{y}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(S)^3} = \mathcal{O}(\varepsilon^{N/2}) \|\breve{\boldsymbol{y}}\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(\breve{S})}\,.$$

La norme $\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(\breve{S})$ dans la dernière équation est la norme sur $\breve{S}$ calculée en variables (T,s). Un calcul montre alors que

$$\|\breve{\boldsymbol{y}}\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(\breve{S})} \leq C\varepsilon^{-1/4}\|\boldsymbol{y}\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)}$$

où la dernière norme est une norme sur la surface S. On en déduit finalement

$$\big\langle \boldsymbol{K}(\varepsilon)\big(\boldsymbol{\Lambda}^N(\varepsilon)\big), \chi \boldsymbol{y}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(S)^3} = \mathcal{O}(\varepsilon^{N/2-1/4}) \|\boldsymbol{y}\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)}\,. \tag{3.9}$$

En regroupant les équations (3.7), (3.8) et (3.9), on trouve en définitive que pour $\boldsymbol{y}\in\Gamma(T_1S)\times\mathscr{C}^\infty(S)$, on a

$$\big\langle \boldsymbol{K}(\varepsilon)\big(\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\overline{\boldsymbol{z}}^N(\varepsilon)\big), \boldsymbol{y}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(S)^3} = \mathcal{O}(\varepsilon^{N/2-1/4}) \|\boldsymbol{y}\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)}\,.$$

Or on peut appliquer cette estimation à $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}(\varepsilon)-\overline{\boldsymbol{z}}^N(\varepsilon)$. Compte tenu du fait que $\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\overline{\boldsymbol{z}}^N(\varepsilon)$ vérifie les conditions au bord $\big(\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\overline{\boldsymbol{z}}^N(\varepsilon)\big)\big|_{\partial S}=0$ et $\partial_r\big(\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\overline{\boldsymbol{z}}^N(\varepsilon)\big)\big|_{\partial S}=0$, on peut alors appliquer l'équation (3.5) pour trouver l'estimation

$$\|\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\overline{\boldsymbol{z}}^N(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)} \leq C\,\varepsilon^{N/2-9/4}.$$

Or on a $\|\overline{\boldsymbol{z}}^N(\varepsilon)-\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{N/2})$, et l'équation précédente montre l'estimation de la proposition. ■

Cette proposition donne donc une estimation grossière de la différence $\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)$. On en déduit alors le résultat suivant :

Théorème 3.5 *Soit $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ un modèle* 2D *admissible. Soit $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ la solution du problème* (3.1) *et $\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)$ le champ de tenseurs défini par l'équation* (3.4) *à partir de la solution en séries formelles du problème associé. Alors on a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)} \leq C\,\varepsilon^{N/2-1/4},\\
&\|\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1(S)} \leq C\,\varepsilon^{N/2+1/4},\\
&\|\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{L}^2(S)} \leq C\,\varepsilon^{N/2+1/4},\\
&\|\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)\|_{\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2(S)} \leq C\,\varepsilon^{N/2+1/2}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Preuve. L'estimation (3.6) montre que pour $N\in\mathbb{N}$, on a

$$\|\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\boldsymbol{z}^{N+6}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)} \leq C\varepsilon^{N/2+3/4},$$

d'où,

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)}\\
&\qquad\le\sum_{k=N+1}^{N+6}\varepsilon^{k/2}\big(\|\boldsymbol{\zeta}^{k/2}\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)}+\|\chi\boldsymbol{Z}^{k/2}\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)}\big)+C\varepsilon^{N/2+3/4}. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Or on vérifie que pour tout $k\ge 0$, $\|\boldsymbol{\zeta}^{k/2}\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)}$ est borné par une constante indépendante de ε. De plus, en passant en coordonnées (T,s), un calcul montre que pour une composante i fixée, on a pour tout $k\ge 0$, avec des constantes C indépendantes de ε

$$
\begin{aligned}
&\|\chi\, Z_i^{k/2}\|_{\mathrm{L}^2(S)}\le C\,\varepsilon^{1/4},\\
&\|\chi\, Z_i^{k/2}\|_{\mathrm{H}^1(S)}\le C\,\varepsilon^{-1/4}, \qquad (3.12)\\
&\|\chi\, Z_i^{k/2}\|_{\mathrm{H}^2(S)}\le C\,\varepsilon^{-3/4}.
\end{aligned}
$$

En reportant alors dans l'équation (3.11), on trouve alors

$$
\|\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)}\le C_N\varepsilon^{N/2-1/4}, \qquad (3.13)
$$

où C_N est une constante indépendante de ε. Ceci montre l'inégalité (3.10). Cette inégalité est optimale au sens ou l'erreur est du même ordre de grandeur en ε que le premier terme négligé dans l'approximation $\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)$.

En utilisant le fait que

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)\|_{\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2(S)}\le\|\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{L}^2(S)}\\
&\qquad\qquad\le\|\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1(S)}\le\|\boldsymbol{z}(\varepsilon)-\boldsymbol{z}^N(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)},
\end{aligned}
$$

on obtient des inégalités similaires à l'inégalité (3.11) pour les normes $\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2(S)$, $\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{L}^2(S)$ et $\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1(S)$. Les inégalités (3.12) permettent alors de montrer les deux dernières inégalités de (3.10) et ceci termine la preuve du théorème. ∎

Remarque 3.6 Ce théorème est aussi valable pour le modèle *en carte* de la définition 2.8 du chapitre chapitre IV. La démonstration est la même que pour les modèles 2D admissibles, car le modèle en carte vérifie les mêmes estimations et possède les mêmes propriétés d'inversibilité que les modèles 2D admissibles. ∎

Le théorème précédent permet de comparer la solution d'un modèle 2D classique avec la solution fournie par l'opérateur de membrane.

Proposition 3.7 *Supposons que* $\boldsymbol{g} \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ *soit indépendant de* ε *, et soit* $\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ *la solution du problème*

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{g} \quad \mathit{sur} \quad S, \\ \zeta_\alpha \big|_{\partial S} = 0. \end{cases}$$

Alors si $\boldsymbol{z}(\varepsilon) \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ *est la solution du problème*

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}(\varepsilon)\big(\boldsymbol{z}(\varepsilon)\big) = \boldsymbol{g} \quad \mathit{sur} \quad S, \\ z_i(\varepsilon) \big|_{\partial S} = \partial_n z_3(\varepsilon) \big|_{\partial S} = 0, \end{cases}$$

on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \boldsymbol{\zeta}\|_{\mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^2(S)} &\leq C\,\varepsilon^{-3/4}, \\ \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \boldsymbol{\zeta}\|_{\mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1(S)} &\leq C\,\varepsilon^{-1/4}, \\ \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \boldsymbol{\zeta}\|_{\mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{L}^2(S)} &\leq C\,\varepsilon^{1/4}, \\ \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \boldsymbol{\zeta}\|_{\mathrm{L}^2 \times \mathrm{L}^2 \times \mathrm{L}^2(S)} &\leq C\,\varepsilon^{1/4}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Preuve. D'après le théorème précédent pour $N = 0$, on a

$$\|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \boldsymbol{\zeta}^0 - \chi \boldsymbol{Z}^0\|_{\mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^2(S)} \leq C\varepsilon^{-1/4},$$

d'où avec la définition de $\boldsymbol{\zeta}$,

$$\|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \boldsymbol{\zeta}\|_{\mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^2(S)} \leq \|\chi Z_3^0\|_{\mathrm{H}^2(S)} + C\varepsilon^{-1/4}.$$

De même on a

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \boldsymbol{\zeta}\|_{\mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1(S)} &\leq \|\chi Z_3^0\|_{\mathrm{H}^1(S)} + C\varepsilon^{1/4}, \\ \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \boldsymbol{\zeta}\|_{\mathrm{H}^1 \times \mathrm{H}^1 \times \mathrm{L}^2(S)} &\leq \|\chi Z_3^0\|_{\mathrm{L}^2(S)} + C\varepsilon^{1/4}, \\ \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \boldsymbol{\zeta}\|_{\mathrm{L}^2 \times \mathrm{L}^2 \times \mathrm{L}^2(S)} &\leq \|\chi Z_3^0\|_{\mathrm{L}^2(S)} + C\varepsilon^{1/2}, \end{aligned}$$

et l'équation (3.12) montre le résultat. ■

Comme dans la remarque 3.6, on vérifie que la proposition précédente est encore valable pour le modèle 2D en carte.

3.3 Comparaisons entre les modèles

La proposition 3.7 permet de comparer la solution d'un modèle 2D admissible avec la solution de l'opérateur de membrane. De la même manière, le théorème 3.5 permet d'évaluer la différence entre la solution d'un modèle 2D admissible donné avec celle fournie par un autre modèle 2D admissible (et aussi avec le modèle 2D en carte). Ceci fait l'objet du résultat suivant :

Théorème 3.8 *Soient* $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ *et* $\boldsymbol{K}'(\varepsilon)$ *deux modèles* 2D *admissibles. Soit* $\boldsymbol{g} \in \Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ *un champ de tenseurs admettant un développement asymptotique* $\boldsymbol{g} = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{g}^{k/2}$ *. On note* $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ *et* $\boldsymbol{z}'(\varepsilon)$ *les solutions des problèmes*

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}(\varepsilon)\big(\boldsymbol{z}(\varepsilon)\big) = \boldsymbol{g} \quad \textit{sur} \quad S, \\ \boldsymbol{z}\big|_{\partial S} = 0 \quad \textit{et} \quad \partial_n z_3\big|_{\partial S} = 0, \end{cases} \qquad \textit{et} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{K}'(\varepsilon)\big(\boldsymbol{z}'(\varepsilon)\big) = \boldsymbol{g} \quad \textit{sur} \quad S, \\ \boldsymbol{z}'\big|_{\partial S} = 0 \quad \textit{et} \quad \partial_n z_3'\big|_{\partial S} = 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

Les estimations suivantes sont alors valables :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \boldsymbol{z}'(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)} &\leq C\,\varepsilon^{1/4}, \\ \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \boldsymbol{z}'(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1(S)} &\leq C\,\varepsilon^{3/4}, \\ \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \boldsymbol{z}'(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{L}^2(S)} &\leq C\,\varepsilon^{5/4}, \\ \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \boldsymbol{z}'(\varepsilon)\|_{\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2(S)} &\leq C\,\varepsilon^{5/4}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Si de plus on note $\widetilde{\boldsymbol{z}}(\varepsilon)$ *la solution pour le problème* (3.15) *pour le modèle* 2D *en carte* $\widetilde{\boldsymbol{K}}(\varepsilon)$ *(ce qui implique que* S *soit représentée par une unique carte locale), alors on a*

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \widetilde{\boldsymbol{z}}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^2(S)} &\leq C\,\varepsilon^{-1/4}, \\ \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \widetilde{\boldsymbol{z}}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1(S)} &\leq C\,\varepsilon^{1/4}, \\ \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \widetilde{\boldsymbol{z}}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1\times\mathrm{H}^1\times\mathrm{L}^2(S)} &\leq C\,\varepsilon^{3/4}, \\ \|\boldsymbol{z}(\varepsilon) - \widetilde{\boldsymbol{z}}(\varepsilon)\|_{\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2\times\mathrm{L}^2(S)} &\leq C\,\varepsilon^{3/4}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Preuve. Un opérateur de flexion est par définition égal à $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^0 + \boldsymbol{H}$ où $\boldsymbol{F}^0$ est l'opérateur de flexion standard intrinsèque, et où $\boldsymbol{H}$ est un opérateur 2D dont les ordres de dérivations sont représentés par la matrice

$$\deg \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tous les modèles 2D admissibles, on a vu que les opérateurs $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0$ étaient identiques. Pour calculer l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{1/2}$, on définit tout d'abord les opérateurs

$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\varepsilon)(T,s;\partial_T,\partial_s)$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\varepsilon)(T,s;\partial_T,\partial_s)$ sur la variété $\breve{S}$ à partir des opérateurs $\boldsymbol{M}(\varepsilon)(r,s;\partial_r,\partial_s)$ et $\boldsymbol{F}(\varepsilon)(r,s;\partial_r,\partial_s)$ par les équations

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\varepsilon)(T,s;\partial_T,\partial_s) := \boldsymbol{M}(T\varepsilon^{1/2},s;\varepsilon^{-1/2}\partial_T,\partial_s),$$

et

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\varepsilon)(T,s;\partial_T,\partial_s) := \boldsymbol{F}(T\varepsilon^{1/2},s;\varepsilon^{-1/2}\partial_T,\partial_s).$$

Si $\boldsymbol{Z}$ est un champ de 1-forme sur la variété $\breve{S}$, on a alors $\breve{\boldsymbol{Z}} = (Z_T, Z_s, \varepsilon^{1/2}Z_3)$, et on définit les opérateurs

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\varepsilon)(\breve{\boldsymbol{Z}}) := \big(\varepsilon\mathcal{M}_T(\varepsilon)(\boldsymbol{Z}), \varepsilon\mathcal{M}_s(\varepsilon)(\boldsymbol{Z}), \varepsilon^{1/2}\mathcal{M}_3(\varepsilon)(\boldsymbol{Z})\big),$$

et

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(\varepsilon)(\breve{\boldsymbol{Z}}) := \big(\varepsilon\mathcal{F}_T(\varepsilon)(\boldsymbol{Z}), \varepsilon\mathcal{F}_s(\varepsilon)(\boldsymbol{Z}), \varepsilon^{1/2}\mathcal{F}_3(\varepsilon)(\boldsymbol{Z})\big).$$

Les développements de Taylor en $T=0$ des coefficients des opérateurs $\breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\varepsilon)$ et $\breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(\varepsilon)$ déterminent deux séries formelles

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^{k/2} \quad \text{et} \quad \breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq -4}\varepsilon^{k/2}\breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^{k/2},$$

et on a alors par définition la relation

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}[\varepsilon^{1/2}] = \breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}[\varepsilon^{1/2}] + \varepsilon^2\breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}[\varepsilon^{1/2}].$$

Or par définition, l'opérateur $\boldsymbol{F}$ s'écrit d'après l'équation (1.3) du chapitre IV,

$$\begin{cases} F_\sigma(\boldsymbol{z}) &=& H_\sigma(\boldsymbol{z}), \\ F_3(\boldsymbol{z}) &=& \dfrac{1}{3}\widetilde{\lambda}\mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}^\alpha\mathrm{D}_\beta\mathrm{D}^\beta z_3 + \dfrac{2}{3}\mu\mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}^\beta\mathrm{D}_\beta\mathrm{D}^\alpha z_3 + H_3(\boldsymbol{z}). \end{cases}$$

Dans le calcul de l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^{-3/2}$, l'opérateur $\boldsymbol{H}$ n'intervient pas, et on trouve que pour tout opérateur de flexion $\boldsymbol{F}$, on a

$$\begin{cases} \breve{\mathcal{F}}_T^{-3/2}\breve{\boldsymbol{Z}} &=& 0, \\ \breve{\mathcal{F}}_s^{-3/2}\breve{\boldsymbol{Z}} &=& 0, \\ \breve{\mathcal{F}}_3^{-3/2}\breve{\boldsymbol{Z}} &=& \dfrac{2}{3}\widetilde{\lambda}\,\Gamma_{ss}^r(0,s)\,\partial_{TTT}\breve{Z}_3, \end{cases} \tag{3.18}$$

où $\Gamma_{ss}^r(r,s)$ est un symbole de Christoffel en coordonnées (r,s) (voir l'équation (1.4)). Ainsi, l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{1/2} = \breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^{1/2} + \breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^{-3/2}$ est indépendant de l'opérateur de flexion $\boldsymbol{F}$ choisi.

En revanche, pour le modèle en carte, l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{1/2}$ est égal à $\breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^{1/2}$ car l'opérateur de flexion $\widetilde{\boldsymbol{F}}$ est précisemment construit en omettant les symboles de Christoffel par rapport à l'opérateur de flexion standard $\boldsymbol{F}^0$, et on a donc $\breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^{-3/2} = 0$ avec les notations ci-dessus. L'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{1/2}$ est donc différent dans le cas du modèle en carte.

Désignons par $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ et $\big(\boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}]\big)$ les séries formelles données par le théorème 2.1 appliqué aux opérateurs $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ et $\boldsymbol{K}'(\varepsilon)$ pour le même second membre $\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{g}^{k/2}$, $\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}] = 0$ et $\vec{\boldsymbol{c}}\,[\varepsilon^{1/2}] = 0$. La démonstration du théorème 2.1 montre que ces développements en séries formelles ont les mêmes termes $\boldsymbol{\zeta}^0$, $\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}$ et $\boldsymbol{\zeta}^{1/2}$ (voir les équations (2.13) et (2.14)). Compte tenu des second membres, les termes $\breve{\boldsymbol{Z}}^1$ et $\boldsymbol{\zeta}^1$ sont solutions des équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^1) &=& -\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{1/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}) \quad \text{dans} \quad \breve{S}, \\ \breve{Z}^1_3\big|_{T=0} &=& -\zeta^{1/2}_3\big|_{\partial S}, \\ \partial_T \breve{Z}^1_3\big|_{T=0} &=& -\partial_r \zeta^0_3\big|_{\partial S}, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^1) &=& 0 \quad \text{dans} \quad S, \\ \zeta^1_r\big|_{\partial S} &=& -\breve{Z}^1_T\big|_{T=0}, \\ \zeta^1_s\big|_{\partial S} &=& -\breve{Z}^1_s\big|_{T=0}. \end{array}\right. \tag{3.19}$$

Puisque les opérateurs $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{1/2}$ sont les mêmes, on en déduit que les termes $\breve{\boldsymbol{Z}}^1$ et $\boldsymbol{\zeta}^1$ sont identiques dans les développements des séries formelles $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ et $\big(\boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}]\big)$. En revanche, l'équation vérifiée par $\breve{\boldsymbol{Z}}^{3/2}$ fait intervenir dans le second membre l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^1$ qui diffère selon le modèle 2D admissible choisi. On en déduit que la différence entre les séries formelles $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ et $\big(\boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}]\big)$ est du type

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] - \boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}] &= \varepsilon^{3/2}\boldsymbol{e}^{3/2} + \sum_{k\geq 4} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{e}^{k/2} \quad \text{et} \\ \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{k/2}] - \boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{k/2}] &= (0, \varepsilon\, E^1_3) + \sum_{k\geq 3} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{E}^{k/2}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

où $\boldsymbol{e}^{k/2}$ et $\boldsymbol{E}^{k/2}$ désignent des termes génériques des espaces $\Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ et $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$ respectivement. Les $\boldsymbol{e}^{k/2}$ sont donc des éléments de $\Gamma(T_1 S) \times \mathscr{C}^\infty(S)$ indépendants de ε et les $\boldsymbol{E}^{k/2}\big(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}, s\big)$ sont des termes de couches limites tels que $\boldsymbol{E}^{k/2}(T,s) \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$.

De même, l'équation (3.19) montre qu'entre le développement $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ de la solution en séries formelles d'un modèle 2D classique et la solution en série formelle $\big(\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}[\varepsilon^{1/2}], \widetilde{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ du problème (2.10) écrit pour le modèle en carte, les termes $\breve{\boldsymbol{Z}}^1$ ne sont pas les mêmes, car l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{1/2}$ est différent. On en déduit donc qu'on a cette fois

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] - \boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}] &= \varepsilon\, \boldsymbol{e}^1 + \sum_{k\geq 2} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{e}^{k/2} \quad \text{et} \\ \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{k/2}] - \boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{k/2}] &= (0, \varepsilon^{1/2} E^1_3) + \sum_{k\geq 2} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{E}^{k/2}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

avec la même convention d'écriture que précédemment pour les termes génériques d'un développement en séries formelles.

En utilisant le théorème 3.5 pour N assez grand, on peut estimer la différence entre la solution $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ et une somme finie de termes provenant du développement en séries formelles $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$. En faisant la même chose pour $\boldsymbol{z}'(\varepsilon)$, les estimations du théorème reviennent alors à estimer des différences de sommes partielles des développements $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ et $\big(\boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}]\big)$. La formule (3.20) et les équations (3.12) permettent alors de conclure. La formule (3.21) montre de même le résultat pour les estimations concernant le modèle en carte. ∎

Chapitre VI

Développement asymptotique tridimensionnel complet

Dans ce chapitre, on construit un développement asymptotique du déplacement *shifté* $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$ solution des équations de l'élasticité tridimensionnelle après changement d'échelle sur une coque dont la surface moyenne est elliptique. Le champ $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$ est donc solution des équations

$$\left\{\begin{array}{rcll} \boldsymbol{L}(\varepsilon)\boldsymbol{w}(\varepsilon) & = & -\boldsymbol{f}^{\varepsilon}(\varepsilon) & \text{dans} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{B}(\varepsilon)\boldsymbol{w}(\varepsilon) & = & 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{\pm}, \\ \boldsymbol{w}(\varepsilon) & = & 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{0}, \end{array}\right. \tag{0.1}$$

où les opérateurs $\boldsymbol{L}(\varepsilon)$ et $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$ sont définis par l'équation (2.22) du chapitre II, et où $\boldsymbol{f}^{\varepsilon}(\varepsilon)$ satisfait l'hypothèse 4.2 du chapitre II.

Dans ce but, on introduit une nouvelle échelle de développement constituée de termes de couches limites en r/ε, comme dans le cas des plaques. L'introduction de cette échelle et l'utilisation de la réduction canonique du chapitre III ramènent le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel posé sous forme de séries formelles, avec conditions aux limites sur le bord de la surface. On appelle ce problème un *problème réduit théorique*.

Tel qu'il est posé, le problème réduit théorique ne possède pas de solution. Comme dans le chapitre V, on passe dans des algèbres de séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$ en introduisant des termes de couches limites en $r/\sqrt{\varepsilon}$ pour obtenir un *problème réduit effectif* qui possède alors une solution. On construit ensuite un développement asymptotique du déplacement qui contient trois types de termes : des termes indépendants de ε sur S_0, des termes de couches limites 2D en $r/\sqrt{\varepsilon}$, et des termes de couches limites 3D en r/ε. La validation de ce développement fait l'objet de la dernière section de ce chapitre. Enfin, les résultats concernant le déplacement *shifté* permettent de déduire des résultats similaires pour le déplacement 3D *non shifté*, et ainsi de comparer les solutions des modèles 2D admissibles et la solution 3D.

1 Séries formelles de couches limites tridimensionnelles

Dans le chapitre III, on a montré comment la réduction canonique (et plus généralement les réductions admissibles) permet de réduire le problème 3D d'une dimension en omettant les conditions d'encastrement sur le bord latéral. Néanmoins, ces réductions sont insuffisantes pour décrire la solution des équations de l'élasticité 3D avec les conditions de Dirichlet sur le bord latéral. Comme dans le cas des plaques (voir [17] et [43]), il est nécessaire d'introduire une nouvelle échelle de développement asymptotique, ce qui induit un nouveau problème en séries formelles.

Dans tout ce chapitre, on travaille avec la réduction canonique introduite dans le lemme 2.1 du chapitre III. Tous les résultats sont cependant encore valable dans le cas d'une réduction admissible quelconque.

Toute cette première section est indépendante du fait que la surface S_0 est supposée elliptique. Elle est en particulier commune au cas des plaques, et les résultats concernant les propriétés de l'opérateur fournissant les termes de couches limites 3D sont identiques à ceux figurant dans [18, 19] et [16]. Le but est d'étudier l'opérateur d'élasticité 3D dans un système de coordonnées qui contient une variable rapide différente de celle introduite au chapitre V. Cette étude induit naturellement un problème dans des espaces de séries formelles à coefficients exponentiellement décroissants. On montre alors un théorème liant la réduction canonique du chapitre III aux termes de couches limites par des conditions au bord. Ce théorème permet de dégager la notion de *problème réduit théorique*.

1.1 Motivations

Dans toute la suite de ce chapitre, la série formelle $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ désigne la série $\boldsymbol{f}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{f}^k$ associée au champ de 1-formes $\boldsymbol{f}^\varepsilon(\varepsilon)$ en utilisant l'hypothèse 4.2 du chapitre II.

On rappelle qu'on note $(\boldsymbol{V}[\varepsilon], \boldsymbol{Q}[\varepsilon], \boldsymbol{A}[\varepsilon], \boldsymbol{G}[\varepsilon])$ la réduction canonique (voir la définition 2.6 du chapitre III), et que si $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ est une série formelle à coefficients générateurs 2D (voir la définition 1.2 du chapitre III) satisfaisant l'équation

$$\boldsymbol{A}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \boldsymbol{G}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon],$$

alors la série formelle

$$\boldsymbol{w}[\varepsilon] = \boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon] \tag{1.1}$$

est solution des équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{L}[\varepsilon]\boldsymbol{w}[\varepsilon] & = & -\boldsymbol{f}[\varepsilon], \\ \boldsymbol{B}[\varepsilon]\boldsymbol{w}[\varepsilon] & = & 0. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

En revanche, on peut montrer que quelle que soit la série formelle $\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{z}^k$ à coefficients générateurs 2D, la trace

$$\boldsymbol{w}[\varepsilon]\big|_{\Gamma_0} = \big(\boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]\big)\big|_{\Gamma_0}$$

est non nulle en général.

Le but de cette section est de montrer que sous certaines conditions, on peut trouver une série formelle

$$\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{\varphi}^k(R, s, x_3)$$

à coefficients termes de couches limites $\boldsymbol{\varphi}^k(R, s, x_3)$ exponentiellement décroissant en $R = r/\varepsilon$, et satisfaisant les équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}[\varepsilon]\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] & = & 0, \\ \mathscr{B}[\varepsilon]\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] & = & 0, \\ \boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]\big|_{R=0} + \big(\boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]\big)\big|_{\Gamma_0} & = & 0, \end{array} \right. \tag{1.3}$$

où les séries formelles $\mathscr{L}[\varepsilon]$ et $\mathscr{B}[\varepsilon]$ sont obtenues en effectuant les changement de variables $(r, s, x_3) \mapsto (R, s, x_3)$ dans les séries formelles $\boldsymbol{L}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{B}[\varepsilon]$ (voir la définition 1.1 ci-dessous).

On montre alors que pour qu'il existe une série formelle $\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]$ à coefficients exponentiellement décroissants satisfaisant les équations (1.3), la série formelle $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ doit satisfaire une condition qui s'écrit

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon],$$

où $\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon]$ est une série formelle à coefficients opérateurs à valeurs dans $\mathscr{C}^\infty(\partial S_0)^4$ et telle que

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}^0\boldsymbol{z} = (z_r, z_s, z_3, \partial_r z_3)\big|_{\partial S_0}.$$

Ainsi, si $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ vérifie les équations

$$\left\{\begin{array}{rcl}\boldsymbol{A}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] & = & \boldsymbol{G}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon],\\ \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] & = & \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon],\end{array}\right. \tag{1.4}$$

alors il existe une série formelle $\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]$ de termes de couches limites 3D vérifiant (1.3), et de plus, la série formelle $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ définie par l'équation (1.1) satisfait le système (1.2). Le problème (1.4) s'appelle *problème réduit théorique*.

Posé sous cette forme, ce problème n'admet en général pas de solution $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ à coefficients générateurs 2D. Comme dans le chapitre V, il est alors nécessaire d'introduire des termes de couches limites en $r/\sqrt{\varepsilon}$, et ainsi de reformuler le problème réduit théorique pour obtenir un *problème réduit effectif* qui possède une solution. Ce problème réduit effectif diffère du problème réduit théorique par l'introduction d'une nouvelle équation en séries formelles portant sur les termes de couches limites 2D, et d'une condition au bord qui mixe les différent types de termes (voir l'équation (2.28)).

Dans la suite de cette section, on étudie donc la mise en équation du *problème réduit théorique* en introduisant les termes de couches limites 3D exponentiellement décroissants en $R = r/\varepsilon$.

1.2 Opérateurs de couches limites 3D

Comme dans le chapitre V, on note (r, s) le système de coordonnées *normales* le long du bord ∂S_0 par rapport à la surface S_0. La fonction r est donc la distance géodésique à ∂S_0, et la restriction de s au bord est l'abscisse curviligne le long de ∂S_0. On note alors

$$R = \frac{r}{\varepsilon} \qquad \text{soit} \qquad \partial_r = \frac{1}{\varepsilon}\partial_R. \tag{1.5}$$

La variable R est donc une variable rapide différente de la variable $T = r/\sqrt{\varepsilon}$ introduite dans le chapitre V.

Le système de coordonnées (R, x_3, s) existe sur la variété $\Sigma^+ \times \partial S_0$ où

$$\Sigma^+ := \mathbb{R}^+ \times I \ni (R, x_3)$$

est une demi-bande. La frontière de Σ^+ est composée d'un bord latéral

$$\gamma_0 := \{R = 0\} \times I,$$

et de deux demi-droites

$$\gamma_\pm := \mathbb{R}^+ \times \{x_3 = \pm 1\}.$$

Les deux coins de la demi-bande sont les points de coordonnées $(R=0, x_3=\pm 1)$. Il s'agit des points où la frontière de Σ^+ n'est pas régulière.

Rappelons que les opérateurs d'élasticité 3D, $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{B}$, sont définis par les formules (2.20) et (2.21) du chapitre II. Dans le système de coordonnées (r,s,h) au voisinage du bord Γ_0 de la coque, on note encore

$$\boldsymbol{L}(r,s,h;\partial_r,\partial_s,\partial_h) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B}(r,s,h;\partial_r,\partial_s,\partial_h)$$

ces opérateurs. Remarquons que les dérivées partielles ont ici une existence globale dans un voisinage du bord Γ_0, car le système de coordonnées (r,s,x_3) est global dans un voisinage tubulaire de ce bord latéral. On pose alors la définition suivante :

Définition 1.1 Pour tout $\varepsilon \le \varepsilon_0$, on appelle *opérateur d'élasticité* 3D *en variables rapides* (R,s,x_3) l'opérateur $\big(\mathscr{L}(\varepsilon),\mathscr{B}(\varepsilon)\big)$ défini par

$$\begin{cases} \mathscr{L}(\varepsilon)(R,s,x_3;\partial_R,\partial_s,\partial_3) := \boldsymbol{L}(\varepsilon R, s, \varepsilon x_3; \varepsilon^{-1}\partial_R, \partial_s, \varepsilon^{-1}\partial_3) \quad \text{et} \\ \mathscr{B}(\varepsilon)(R,s,x_3;\partial_R,\partial_s,\partial_3) := \boldsymbol{B}(\varepsilon R, s, \varepsilon x_3; \varepsilon^{-1}\partial_R, \partial_s, \varepsilon^{-1}\partial_3). \end{cases} \tag{1.6}$$

On définit alors $\big(\mathscr{L}[\varepsilon],\mathscr{B}[\varepsilon]\big)$ les séries formelles en puissances de ε associées à ces opérateurs par le développement de Taylor en $R=0$ et $x_3=0$ des coefficients des opérateurs définis dans l'équation (1.6). ■

On note alors ces séries formelles

$$\mathscr{L}[\varepsilon] = \varepsilon^{-2}\sum_{k\ge 0}\varepsilon^k \mathscr{L}^k \quad \text{et} \quad \mathscr{B}[\varepsilon] = \varepsilon^{-1}\sum_{k\ge 0}\varepsilon^k \mathscr{B}^k,$$

où

$$\mathscr{L}^k : \mathscr{C}^\infty\big(\Sigma^+ \times \partial S_0\big)^3 \to \mathscr{C}^\infty\big(\Sigma^+ \times \partial S_0\big)^3$$

et

$$\mathscr{B}^k : \mathscr{C}^\infty\big(\Sigma^+ \times \partial S_0\big)^3 \to \mathscr{C}^\infty\big(\gamma_\pm \times \partial S_0\big)^3$$

sont des opérateurs de degrés 2 et polynomiaux en R et en x_3.

Compte tenu des relations (1.2) et (1.3) du chapitre V, la restriction à Γ_0 de la métrique en coordonnées (r,s,x_3) est la métrique représentée par la matrice identité. On calcule alors que le premier terme de la série formelle $\mathscr{L}[\varepsilon]$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^0_R(\boldsymbol{\psi}) &= \mu(\partial_{RR}\psi_R + \partial_{33}\psi_R) + (\lambda+\mu)\partial_R(\partial_R\psi_R + \partial_3\psi_3), \\ \mathscr{L}^0_s(\boldsymbol{\psi}) &= \mu(\partial_{RR}\psi_s + \partial_{33}\psi_s), \\ \mathscr{L}^0_3(\boldsymbol{\psi}) &= \mu(\partial_{RR}\psi_3 + \partial_{33}\psi_3) + (\lambda+\mu)\partial_3(\partial_R\psi_R + \partial_3\psi_3). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Cet opérateur est indépendant de l'abscisse curviligne s, et il est remarquable que cet opérateur ne dépend pas de la géométrie de la surface S_0. En particulier, il est identique dans le cas où S_0 est uniformément elliptique et dans le cas où S_0 est une plaque. De même, le premier terme de la série formelle $\mathscr{B}[\varepsilon]$ est l'opérateur sur les faces supérieures et inférieures qui s'écrit

$$\begin{aligned} \mathscr{B}^0_R(\boldsymbol{\psi}) &= \mu(\partial_3\psi_R + \partial_R\psi_3), \\ \mathscr{B}^0_s(\boldsymbol{\psi}) &= \mu\partial_3\psi_s, \\ \mathscr{B}^0_3(\boldsymbol{\psi}) &= (\lambda+2\mu)\partial_3\psi_3 + \lambda\partial_R\psi_R. \end{aligned} \tag{1.8}$$

On s'intéresse aux propriétés de ces opérateurs agissant dans des espaces de fonctions exponentiellement décroissantes. Dans le chapitre V, l'étude de l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0$ avait conduit à introduire les espaces $\boldsymbol{\mathfrak{T}}(\mathbb{R}^+)$ de fonctions exponentiellement décroissantes en $T = r/\sqrt{\varepsilon}$ (voir l'équation (1.33) et le théorème 1.7 du chapitre V). Par analogie, et comme dans [16], on introduit les espaces suivants : soit $\mathfrak{H}(\Sigma^+)$ l'espace des fonctions φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur toute la demi-bande fermée privée des points non réguliers du bord $(R=0, x_3=\pm1)$, possédant les propriétés de décroissance exponentielle lorsque $R\to\infty$ au sens suivant :

$$\forall\, i,j,k\in\mathbb{N}, \qquad e^{\delta R}\, R^k\, \partial_R^i\partial_3^j\varphi \in L^2(\Sigma^+),$$

où $\delta > 0$ est un réel inférieur au plus petit des exposants de Papkovich-Fadle (voir [31]). De plus, on impose le comportement au voisinage des deux coins de la demi-bande : si ρ désigne la distance d'un point de Σ^+ à un de ces coins $(R=0, x_3=\pm1)$, on suppose que tout élément φ de $\mathfrak{H}(\Sigma^+)$ vérifie

$$\forall\, i,j\in\mathbb{N},\ i+j\neq 0, \qquad \rho^{i+j-1}\, \partial_R^i\partial_3^j\varphi \in L^2(\Sigma^+).$$

On définit alors l'espace de déplacements correspondant

$$\boldsymbol{\mathfrak{H}}(\Sigma^+) := \big\{\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_R, \varphi_s, \varphi_3) \in \mathfrak{H}(\Sigma^+)^3\big\}.$$

Dans le cas présent où l'abscisse curviligne intervient comme paramètre, l'espace qui intervient dans les équations est l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{H}}(\Sigma^+)\big)$.

On définit alors les espaces images associés aux espaces précédents. On pose $\mathfrak{K}(\Sigma^+)$ l'espace des éléments $\psi\in\mathscr{C}^\infty(\Sigma^+)$ tels que

$$\forall\, i,j,k\in\mathbb{N}, \qquad e^{\delta R}\, R^k\, \partial_R^i\partial_3^j\psi \in L^2(\Sigma^+)$$

et

$$\forall\, i,j\in\mathbb{N}, \qquad \rho^{i+j+1}\, \partial_R^i\partial_3^j\psi \in L^2(\Sigma^+)$$

avec les notations précédentes. On introduit de même l'espace correspondant aux traces imposées sur les composantes $\gamma_\pm$ de la demi-bande : soit $\mathfrak{K}(\gamma_\pm)$ l'espace des couples de fonctions $\psi^\pm \in \mathscr{C}^\infty(\gamma_\pm)$ telles que

$$\forall\, i,k \in \mathbb{N}, \qquad e^{\delta R}\, R^k\, \partial_R^i \psi^\pm \in L^2(\gamma_\pm)$$

et

$$\forall\, i,j \in \mathbb{N}, \qquad \rho^{i+j+1/2}\, \partial_R^i \psi^\pm \in L^2(\gamma_\pm).$$

On définit alors les espaces

$$\boldsymbol{\mathfrak{K}}(\Sigma^+) := \big\{ \boldsymbol{\psi} = (\psi_R, \psi_s, \psi_3) \in \mathfrak{K}(\Sigma^+)^3 \big\},$$

et

$$\boldsymbol{\mathfrak{K}}(\gamma_\pm) := \big\{ \boldsymbol{\psi}^\pm = (\psi_R^\pm, \psi_s^\pm, \psi_3^\pm) \in \mathfrak{K}(\gamma_\pm)^3 \big\}.$$

Ainsi, les opérateurs $\mathscr{L}^0$ et $\mathscr{B}^0$ agissant sur l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{H}}(\Sigma^+)\big)$ prendront leurs valeurs respectivement dans les espaces $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{K}}(\Sigma^+)\big)$ et $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{K}}(\gamma_\pm)\big)$.

Pour étudier les propriétés des opérateurs $\mathscr{L}^0$ et $\mathscr{B}^0$, on introduit l'espace des déplacements rigides $\boldsymbol{\mathfrak{Z}}$ engendré par les quatre déplacements écrits en coordonnées (R, s, x_3) (voir [19]) :

$$\boldsymbol{\mathscr{Z}}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mathscr{Z}}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mathscr{Z}}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mathscr{Z}}^4 = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Ces déplacements sont dans le noyau de l'opérateur $(\mathscr{L}^0, \mathscr{B}^0)$ sans conditions aux limites sur le bord latéral. La proposition suivante montre quel est leur rôle dans la recherche de solutions exponentiellement décroissantes.

Rappelons que γ_0 désigne le bord latéral de la demi-bande Σ^+, et que Γ_0 est le bord latéral de la coque correspondant à $\partial S_0 \times I$ dans une paramétrisation normale. Les opérateurs $\mathscr{L}^0$ et $\mathscr{B}^0$ possèdent alors les propriétés suivantes (voir par exemple [19, section 5]) :

Proposition 1.2 *Soient* $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathfrak{K}}(\Sigma^+)$, $\boldsymbol{\psi}^\pm \in \boldsymbol{\mathfrak{K}}(\gamma_\pm)$ *et* $\boldsymbol{v} \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\gamma}_0)^3$. *Il existe alors un unique* $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathfrak{H}}(\Sigma^+)$ *et un unique* $\boldsymbol{\mathscr{Z}} \in \boldsymbol{\mathfrak{Z}}$ *tels que*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}^0(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\mathscr{Z}}) & = & \boldsymbol{\psi} \quad \textit{dans} \quad \Sigma^\pm, \\ \mathscr{B}^0(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\mathscr{Z}}) & = & \boldsymbol{\psi}^\pm \quad \textit{sur} \quad \gamma_+ \times \gamma_-, \\ (\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\mathscr{Z}})\big|_{R=0} + \boldsymbol{v}\big|_{\gamma_0} & = & 0. \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Remarquons que puisque dans l'équation précédente, $\boldsymbol{\mathcal{Z}} \in \mathfrak{Z}$, les membres de gauche des deux premières équations sont encore égaux à $\mathscr{L}^0(\boldsymbol{\varphi})$ et $\mathscr{B}^0(\boldsymbol{\varphi})$.

Dans la suite, cette proposition est utile pour déterminer la structure des opérateurs à valeurs dans les espaces de couches limites 3D. Le corollaire suivant est immédiat, en tenant compte du fait que l'opérateur $(\mathscr{L}^0, \mathscr{B}^0)$ est indépendant de s :

Corollaire 1.3 *Si dans la proposition précédente, on a* $\boldsymbol{\psi} \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{K}(\Sigma^+)\big)$, $\boldsymbol{\psi}^\pm \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{K}(\gamma_\pm)\big)$ *et* $\boldsymbol{v} \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Gamma}_0)^3$ *alors les fonctions solutions du problème* (1.10) *sont dans les espaces* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{H}(\Sigma^+)\big)$ *et* $\boldsymbol{\mathcal{Z}} \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{Z}\big)$.

1.3 Résolution formelle

Comme il était annoncé dans la sous-section 1.1, et compte tenu des propriétés de l'opérateur $(\mathscr{L}^0, \mathscr{B}^0)$ énoncées dans la sous-section précédente, on cherche alors à résoudre le problème suivant : supposons donnée une série formelle $\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{z}^k$ à coefficients générateurs 2D, et soit $(\boldsymbol{V}[\varepsilon], \boldsymbol{Q}[\varepsilon], \boldsymbol{A}[\varepsilon], \boldsymbol{G}[\varepsilon])$ la réduction canonique, on cherche une série formelle

$$\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{\varphi}^k(R, s, x_3)$$

à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{H}(\Sigma^+)\big)$ satisfaisant les relations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}[\varepsilon]\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] & = & 0, \\ \mathscr{B}[\varepsilon]\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] & = & 0, \\ \boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]\big|_{R=0} + \big(\boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]\big)\big|_{\Gamma_0} & = & 0. \end{array}\right. \tag{1.11}$$

En notant $\boldsymbol{w}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{w}^k = \boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]$, le système précédent est équivalent à la collection d'équations suivante, pour tout $k \geq 0$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}^0\boldsymbol{\varphi}^k & = & -\sum_{\ell=1}^k \mathscr{L}^\ell\boldsymbol{\varphi}^{k-\ell} \quad \text{dans} \quad \partial S_0 \times \Sigma^+, \\ \mathscr{B}^0\boldsymbol{\varphi}^k & = & -\sum_{\ell=1}^k \mathscr{B}^\ell\boldsymbol{\varphi}^{k-\ell} \quad \text{sur} \quad \partial S_0 \times \gamma_+ \times \gamma_-, \\ \boldsymbol{\varphi}^k\big|_{R=0} + \boldsymbol{w}^k\big|_{\Gamma_0} & = & 0. \end{array}\right.$$

Comme dans le chapitre V, la somme $\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]\big|_{R=0} + \boldsymbol{w}[\varepsilon]\big|_{\Gamma_0}$ n'a de sens que sur le bord, et le bord est l'unique lieu où les termes des deux échelles différentes peuvent entrer en interaction. De plus, dans le système de coordonnées (r, s, x_3) , cette somme s'écrit

$$\begin{array}{l} \varphi_R[\varepsilon]\big|_{R=0} + w_r[\varepsilon]\big|_{\Gamma_0}, \\ \varphi_s[\varepsilon]\big|_{R=0} + w_s[\varepsilon]\big|_{\Gamma_0}, \\ \varphi_3[\varepsilon]\big|_{R=0} + w_3[\varepsilon]\big|_{\Gamma_0}, \end{array}$$

c'est-à-dire que la composante r de $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ est liée avec la composante R de $\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]$.

D'après le résultat de la proposition 1.2 concernant l'opérateur $(\mathscr{L}^0, \mathscr{B}^0)$, on peut s'attendre à ce que le système (1.11) possède une solution qui se décompose en somme de deux séries formelles à coefficients respectivement dans l'espace

$$\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{H}}(\Sigma^+)\big)$$

de fonctions exponentiellement décroissantes et dans l'espace $\boldsymbol{\mathfrak{Z}}$ des déplacements rigides. Ainsi, l'existence d'une série formelle $\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]$ à coefficients exponentiellement décroissants satisfaisant l'équation (1.11) dépend de la condition d'annulation de la partie appartenant à $\boldsymbol{\mathfrak{Z}}$. Ces termes dépendant de $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$, on trouve ainsi une nouvelle équation liant ces deux séries formelles.

Le but de cette sous-section est alors de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.4 *Le quadruplet* $(\boldsymbol{V}[\varepsilon], \boldsymbol{Q}[\varepsilon], \boldsymbol{A}[\varepsilon], \boldsymbol{G}[\varepsilon])$ *désignant la réduction canonique, il existe pour tout* $k \geq 0$

- *un opérateur* $\boldsymbol{\Psi}^k : \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0) \to \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{H}}(\Sigma^+)\big)$,
- *un opérateur* $\boldsymbol{\Theta}^k : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{H}}(\Sigma^+)\big)$,
- *un opérateur* $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}^k : \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0) \to \mathscr{C}^\infty(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{Z}})$,
- *un opérateur* $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}^k : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{Z}})$,

tels que si $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ *est une série formelle à coefficients générateurs* 2D *satisfaisant la relation*

$$\vec{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon],$$

alors la série formelle

$$\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] := \boldsymbol{\Psi}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{\Theta}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]$$

est une solution du problème en séries formelles

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}[\varepsilon]\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] & = & 0, \\ \mathscr{B}[\varepsilon]\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] & = & 0, \\ \boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]\big|_{R=0} + \big(\boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]\big)\big|_{\Gamma_0} & = & 0. \end{array}\right. \tag{1.12}$$

De plus, $\boldsymbol{\Psi}^0$, $\boldsymbol{\Theta}^0$ *et* $\boldsymbol{\Theta}^1$, $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}^0$ *et* $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}^1$ *sont les opérateurs nuls, et on a*

$$\vec{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}^0\boldsymbol{z} = \big(z_r\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\mathcal{Z}}^1 + \big(z_s\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\mathcal{Z}}^2 + \big(z_3\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\mathcal{Z}}^3.$$

Remarque 1.5 En raison de son emploi ultérieur, ce théorème est énoncé pour la réduction canonique. Mais en réalité, il est plus général : d'une part, seules les séries formelles $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ de la réduction interviennent, et d'autre part, le fait que ces séries possèdent les propriétés de la réduction canonique (ainsi que celles des réductions admissibles) ne joue aucun rôle. Le même théorème est donc en fait valable pour deux séries formelles $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{Q}[\varepsilon]$ quelconques, à coefficients opérateurs

$$\boldsymbol{V}^k : \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0) \to \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$$

et

$$\boldsymbol{Q}^k : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big).$$

■

Preuve. Comme dans le lemme 2.1 du chapitre III, on montre séparément l'existence des séries formelles $\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon]$ et $\vec{\mathfrak{d}}[\varepsilon]$ agissant sur les générateurs 2D et celles des séries formelles $\boldsymbol{\Theta}[\varepsilon]$ et $\vec{\mathfrak{h}}[\varepsilon]$ agissant sur la série formelle $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$. On conclut ensuite par sommation.

1. Montrons tout d'abord l'existence de séries formelles $\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{\Psi}^k$ et $\vec{\mathfrak{d}}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \vec{\mathfrak{d}}^k$ satisfaisant les équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}[\varepsilon]\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon] & = & 0, \\ \mathscr{B}[\varepsilon]\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon] & = & 0, \\ \big(\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon] - \vec{\mathfrak{d}}[\varepsilon]\big)\big|_{R=0} + \boldsymbol{V}[\varepsilon]\big|_{\Gamma_0} & = & 0, \end{array}\right. \tag{1.13}$$

dans l'espace des séries formelles à coefficients opérateurs sur $\Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$.

Le fait que $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$ soit une série formelle dont le premier terme non nul est $\boldsymbol{V}^0$ montre que les puissances de démarrages des séries formelles $\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon]$ et $\vec{\mathfrak{d}}[\varepsilon]$ sont égales à 0.

Pour $k = 0$, les équations devant être vérifiées par $\boldsymbol{\Psi}^0$ et $\vec{\mathfrak{d}}^0$ sont, pour tout générateur 2D $\boldsymbol{z}$,

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathscr{L}^0\boldsymbol{\Psi}^0\boldsymbol{z} & = & 0 & \text{dans} \quad \partial S_0 \times \Sigma^+, \\ \mathscr{B}^0\boldsymbol{\Psi}^0\boldsymbol{z} & = & 0 & \text{sur} \quad \partial S_0 \times \gamma_+ \times \gamma_-, \\ (\boldsymbol{\Psi}^0\boldsymbol{z} - \vec{\mathfrak{d}}^0\boldsymbol{z})\big|_{R=0} + \boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z}\big|_{\Gamma_0} & = & 0. & \end{array}\right.$$

Compte tenu de l'expression de $\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{z} = \mathscr{I} \circ \boldsymbol{z}$, où $\mathscr{I}$ est le plongement canonique (voir l'équation (1.10) du chapitre III), on en déduit que $\boldsymbol{\Psi}^0 = 0$ et l'opérateur $\vec{\mathfrak{d}}^0$ donné dans l'énoncé de la proposition satisfont les équations précédentes.

Supposons les opérateurs $\boldsymbol{\Psi}^k$ et $\vec{\mathfrak{d}}^k$ construits pour $k \leq n$, où n est un entier. Soit $\boldsymbol{z}$ un générateur 2D. Considérons l'équation en $\boldsymbol{\psi}$:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathscr{L}^0\boldsymbol{\psi} & = & -\sum_{\ell=1}^{n+1} \mathscr{L}^\ell \boldsymbol{\Psi}^{n+1-\ell}\boldsymbol{z} & \text{dans} \quad \partial S_0 \times \Sigma^+, \\ \mathscr{B}^0\boldsymbol{\psi} & = & -\sum_{\ell=1}^{n+1} \mathscr{B}^\ell \boldsymbol{\Psi}^{n+1-\ell}\boldsymbol{z} & \text{sur} \quad \partial S_0 \times \gamma_+ \times \gamma_-, \\ \boldsymbol{\psi}\big|_{R=0} + \boldsymbol{V}^{n+1}\boldsymbol{z}\big|_{\Gamma_0} & = & 0. & \end{array}\right. \tag{1.14}$$

D'après les propriétés des opérateurs $\mathscr{L}^\ell$ et $\mathscr{B}^\ell$, les seconds membres des deux premières équations de ce système appartiennent respectivement aux espaces

$$\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{K}}(\Sigma^+)\big) \quad \text{et} \quad \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{K}}(\gamma_\pm)\big).$$

Le corollaire 1.3 montre alors l'existence de $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{H}}(\Sigma^+)\big)$ et d'un terme $\boldsymbol{\mathcal{Z}} \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{Z}}\big)$ telle que $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ soit solution de ce système.

En posant alors $\boldsymbol{\Psi}^{n+1}\boldsymbol{z} := \boldsymbol{\varphi}$ et $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}^{n+1}\boldsymbol{z} := \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, on obtient l'existence des opérateurs au rang $n+1$, compte tenu du fait que les éléments de $\boldsymbol{\mathfrak{Z}}$ sont dans le noyau de l'opérateur $(\mathscr{L}^0, \mathscr{B}^0)$.

2. De même, on montre l'existence de séries formelles $\boldsymbol{\Theta}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \boldsymbol{\Theta}^k$ et $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}^k$ satisfaisant les équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}[\varepsilon]\boldsymbol{\Theta}[\varepsilon] & = & 0, \\ \mathscr{B}[\varepsilon]\boldsymbol{\Theta}[\varepsilon] & = & 0, \\ \big(\boldsymbol{\Theta}[\varepsilon] + \vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}[\varepsilon]\big)\big|_{R=0} + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\big|_{\Gamma_0} & = & 0, \end{array}\right. \tag{1.15}$$

dans l'espace des séries formelles à coefficients opérateurs agissant sur l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$.

Cette fois, le fait que $\boldsymbol{Q}^0 = \boldsymbol{Q}^1 = 0$ montre que les puissances de démarrages des séries formelles $\boldsymbol{\Theta}[\varepsilon]$ et $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}[\varepsilon]$ sont égales à 2, ce qui revient à prendre pour $\boldsymbol{\Theta}^0$, $\boldsymbol{\Theta}^1$, $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}^0$ et $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}^1$ les opérateurs nuls.

Pour $k = 2$, les équations devant être vérifiées par $\boldsymbol{\Theta}^2$ et $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}^2$ sont pour tout champ de 1-formes $\boldsymbol{f}$,

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathscr{L}^0\boldsymbol{\Theta}^2\boldsymbol{f} & = & 0 & \text{dans} \quad \partial S_0 \times \Sigma^+, \\ \mathscr{B}^0\boldsymbol{\Theta}^2\boldsymbol{f} & = & 0 & \text{sur} \quad \partial S_0 \times \gamma_+ \times \gamma_-, \\ (\boldsymbol{\Theta}^2\boldsymbol{f} + \vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}^2\boldsymbol{f})\big|_{R=0} + \boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{f}\big|_{\Gamma_0} & = & 0, & \end{array}\right.$$

et le corollaire 1.3 montre l'existence des opérateurs $\boldsymbol{\Theta}^2$ et $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}^2$. Remarquons que l'expression de l'opérateur $\boldsymbol{Q}^2$ (voir l'équation (3.79) du chapitre III) montre que les opérateurs $\boldsymbol{\Theta}^2$ et $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}^2$ sont non nuls. Supposons les opérateurs $\boldsymbol{\Theta}^k$ et $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}^k$ construits pour $k \leq n$, où n est un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\boldsymbol{f}$ une 1-forme 2D. Considérons l'équation en $\boldsymbol{\psi}$:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathscr{L}^0\boldsymbol{\psi} & = & -\sum_{\ell=1}^{n+1} \mathscr{L}^\ell\boldsymbol{\Theta}^{n+1-\ell}\boldsymbol{f} & \text{dans} \quad \partial S_0 \times \Sigma^+, \\ \mathscr{B}^0\boldsymbol{\psi} & = & -\sum_{\ell=1}^{n+1} \mathscr{B}^\ell\boldsymbol{\Theta}^{n+1-\ell}\boldsymbol{f} & \text{sur} \quad \partial S_0 \times \gamma_+ \times \gamma_-, \\ \boldsymbol{\psi}\big|_{R=0} + \boldsymbol{Q}^{n+1}\boldsymbol{f}\big|_{\Gamma_0} & = & 0. & \end{array}\right.$$

D'après les propriétés des opérateurs $\mathscr{L}^\ell$ et $\mathscr{B}^\ell$, les seconds membres des deux premières équations de ce système appartiennent respectivement aux espaces

$$\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{K}}(\Sigma^+)\big) \quad \text{et} \quad \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{K}}(\gamma_\pm)\big).$$

Le corollaire 1.2 montre alors l'existence de $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{H}}(\Sigma^+)\big)$ et d'un terme $\boldsymbol{\mathcal{Z}} \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{Z}}\big)$ tels que $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ soit solution du système précédent. En posant alors $\boldsymbol{\Theta}^{n+1}\boldsymbol{z} := \boldsymbol{\varphi}$ et $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}^{n+1}\boldsymbol{z} := -\boldsymbol{\mathcal{Z}}$, on obtient l'existence des opérateurs au rang $n+1$.

3. Soit maintenant $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ une série formelle à coefficients générateurs 2D. En sommant alors les équations du système (1.13) appliquées à $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ et celles du système (1.15) appliquées à $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$, on voit que la série formelle $\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] := \boldsymbol{\Psi}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{\Theta}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ satisfait les équations

$$\begin{cases} \mathscr{L}[\varepsilon]\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] &= 0, \\ \mathscr{B}[\varepsilon]\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] &= 0, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]\big|_{R=0} + \big(\boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]\big)\big|_{\Gamma_0} + \big(-\vec{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]\big)\big|_{R=0} = 0.$$

On déduit alors immédiatement le théorème de ces relations. ■

Remarque 1.6 Comme dans le chapitre III, il n'y a pas unicité du quadruplet de séries formelles $(\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon], \boldsymbol{\Theta}[\varepsilon], \vec{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}[\varepsilon], \vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}[\varepsilon])$ associé à la réduction canonique par le théorème 1.4. Toutefois, si la distinction avait de l'importance dans le chapitre III en raison de la nécessité de pousser les calculs jusqu'à l'ordre 2 pour l'opérateur réduit, il n'est pas nécessaire d'entrer dans ces distinctions pour les opérateurs de couches limites 3D. ■

Comme dans le chapitre III on peut contrôler les ordres de dérivation des opérateurs exhibés dans le théorème précédent. Cela permettra dans la suite de définir l'action de ces opérateurs sur les séries formelles dont les coefficients sont des termes de couches limites 2D appartenant à l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{T}}(\mathbb{R}^+)\big)$ (voir le chapitre V).

1.4 Contrôle des ordres des opérateurs

Rappelons que l'opérateur $\boldsymbol{V}^1$ de la réduction canonique est défini par la formule

$$\boldsymbol{V}^1(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} -x_3\theta_\sigma(\boldsymbol{z}), \\ -x_3 p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}), \end{cases}$$

avec $\theta_\sigma(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\sigma z_3 + b_\sigma^\alpha z_\alpha$, $\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}^\alpha z_\alpha - b_\alpha^\alpha z_3$ et $p = \lambda(\lambda+2\mu)^{-1}$. Le résultat suivant donne alors la valeur des opérateurs $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}^1$ et $\boldsymbol{\Psi}^1$ donnés dans le théorème 1.4.

Proposition 1.7 *Soit* $\boldsymbol{z}$ *un générateur* 2D.

(i) *L'opérateur* $\vec{\mathfrak{d}}^1$ *a pour expression*

$$\vec{\mathfrak{d}}^1 \boldsymbol{z} = \big(c_1 p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\mathcal{Z}}^1 + \big(\theta_r(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\mathcal{Z}}^4, \tag{1.16}$$

où c_1 *est un coefficient numérique ne dépendant que des coefficients de Lamé* λ *et* μ *.*

(ii) *L'opérateur* $\boldsymbol{\Psi}^1$ *a pour expression*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Psi_R^1 \boldsymbol{z} &=& \big(p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)\overline{\varphi}_R^1, \\ \Psi_s^1 \boldsymbol{z} &=& \big(\theta_s(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)\overline{\varphi}_s^1, \\ \Psi_3^1 \boldsymbol{z} &=& \big(p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)\overline{\varphi}_3^1, \end{array}\right. \tag{1.17}$$

où $\overline{\boldsymbol{\varphi}}^1 = (\overline{\varphi}_R^1, \overline{\varphi}_s^1, \overline{\varphi}_3^1)$ *est un élément de* $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{H}(\Sigma^+)\big)$ *indépendant de* ε *.*

Preuve. Les équations vérifiées par les opérateurs $\boldsymbol{\Psi}^1$ et $\vec{\mathfrak{d}}^1$ du théorème 1.4 s'écrivent pour tout générateur 2D $\boldsymbol{z}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}^0 \boldsymbol{\Psi}^1 \boldsymbol{z} &=& 0, \\ \mathscr{B}^0 \boldsymbol{\Psi}^1 \boldsymbol{z} &=& 0, \\ \big(\boldsymbol{\Psi}^1 \boldsymbol{z} - \vec{\mathfrak{d}}^1 \boldsymbol{z}\big)\big|_{R=0} + \boldsymbol{V}^1 \boldsymbol{z}\big|_{\partial S_0} &=& 0. \end{array}\right. \tag{1.18}$$

Rappelons que les composantes de l'opérateur $\boldsymbol{V}^1$ en coordonnées (r, s, x_3) agissant sur $\boldsymbol{z}$ s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{rcl} V_r^1(\boldsymbol{z}) &=& -x_3\theta_r(\boldsymbol{z}), \\ V_s^1(\boldsymbol{z}) &=& -x_3\theta_s(\boldsymbol{z}), \\ V_3^1(\boldsymbol{z}) &=& -x_3 p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}). \end{array}\right.$$

On remarque alors que l'opérateur $(\mathscr{L}^0, \mathscr{B}^0)$ ne dépend pas de s et n'agit pas sur la variable s. Puisque l'opérateur $\boldsymbol{V}^1$ n'apparaît dans l'équation (1.18) que par la trace $\boldsymbol{V}^1\boldsymbol{z}\big|_{\partial S_0}$, on en déduit ainsi par linéarité qu'on peut factoriser le second membre dépendant de $\boldsymbol{V}^1$ par les traces $\theta_r(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}$, $\theta_s(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}$ et $p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}$ et décomposer ainsi la solution du problème (1.18) en trois problèmes faisant intervenir une seule des composantes $\boldsymbol{V}^1$ réduite au monôme $-x_3$.

1. Etudions donc tout d'abord la solution $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\mathcal{Z}})$ du problème

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}^0 \boldsymbol{\varphi} &=& 0, \\ \mathscr{B}^0 \boldsymbol{\varphi} &=& 0, \\ (\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\mathcal{Z}})\big|_{R=0} + (-x_3, 0, 0)\big|_{\partial S_0} &=& 0. \end{array}\right.$$

Rappelons que l'élément $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^4$ de la base (1.9) s'écrit $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^4 = (-x_3, 0, R)$. La solution du système précédent est donc simplement le couple $\boldsymbol{\varphi} = 0$ et $\boldsymbol{\mathcal{Z}} = \boldsymbol{\mathcal{Z}}^4$. Par linéarité, on vérifie alors que le couple

$$\boldsymbol{\varphi} = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\mathcal{Z}} = \big(\theta_r(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\mathcal{Z}}^4$$

vérifie les équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}^0\boldsymbol{\varphi} &=& 0, \\ \mathscr{B}^0\boldsymbol{\varphi} &=& 0, \\ (\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\mathcal{Z}})\big|_{R=0} + (V_r^1(\boldsymbol{z}), 0, 0)\big|_{\partial S_0} &=& 0, \end{array}\right. \tag{1.19}$$

en utilisant le fait que $(\mathscr{L}^0, \mathscr{B}^0)$ ne dépend pas de s et n'agit pas sur la variable s, si bien qu'on a

$$(\mathscr{L}^0, \mathscr{B}^0)\big(\theta_r(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\mathcal{Z}}^4 = \big(\theta_r(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)(\mathscr{L}^0, \mathscr{B}^0)\boldsymbol{\mathcal{Z}}^4 = 0.$$

2. Considérons maintenant le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}^0\boldsymbol{\varphi} &=& 0, \\ \mathscr{B}^0\boldsymbol{\varphi} &=& 0, \\ (\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\mathcal{Z}})\big|_{R=0} + (0, -x_3, 0)\big|_{\partial S_0} &=& 0. \end{array}\right. \tag{1.20}$$

On remarque alors que les opérateurs $\mathscr{L}^0$ et $\mathscr{B}^0$ se découplent en deux parties : les opérateurs $\mathscr{L}_s^0$ et $\mathscr{B}_s^0$ agissant sur la composante φ_s d'une part, et les opérateurs $(\mathscr{L}_R^0, \mathscr{L}_3^0)$ et $(\mathscr{B}_R^0, \mathscr{B}_3^0)$ agissant sur (φ_R, φ_3) d'autre part. En particulier, les composantes φ_R et φ_3 ainsi que les composantes de $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ sur les vecteurs $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^1$, $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^3$ et $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^4$ des éléments $\boldsymbol{\varphi}$ et $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ vérifiant le système (1.20) sont nulles.

D'autre part, d'après la proposition 5.4 et le lemme 5.5 de [19], il existe un unique élément non nul $\overline{\varphi}_s^1$ de l'espace $\mathfrak{H}(\Sigma^+)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathscr{L}_s^0\overline{\varphi}_s^1 &=& 0 & \text{dans} \quad \Sigma^+, \\ \mathscr{B}_s^0\overline{\varphi}_s^1 &=& 0 & \text{sur} \quad \gamma_+ \times \gamma_-, \\ \overline{\varphi}_s^1\big|_{R=0} &=& x_3. & \end{array}\right.$$

Les termes $\boldsymbol{\varphi} = (0, \overline{\varphi}_s^1, 0)$ et $\boldsymbol{\mathcal{Z}} = 0$ sont alors solutions des équations (1.20). On vérifie donc que pour tout générateur 2D, les termes

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}} = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varphi} = \big(\theta_s(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)(0, \overline{\varphi}_s^1, 0)$$

vérifient les équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}^0\boldsymbol{\varphi} &=& 0,\\ \mathscr{B}^0\boldsymbol{\varphi} &=& 0,\\ (\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\mathcal{Z}})\big|_{R=0}+(0,V_s^1(\boldsymbol{z}),0)\big|_{\partial S_0} &=& 0. \end{array}\right. \tag{1.21}$$

3. Etudions enfin les équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}^0\boldsymbol{\varphi} &=& 0,\\ \mathscr{B}^0\boldsymbol{\varphi} &=& 0,\\ (\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\mathcal{Z}})\big|_{R=0}+(0,0,-x_3)\big|_{\partial S_0} &=& 0. \end{array}\right. \tag{1.22}$$

Le découplage de l'opérateur $(\mathscr{L}^0,\mathscr{B}^0)$ en composantes s d'une part et (R,x_3) d'autre part montre que les composantes s des solutions $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ du système (1.22) sont nulles.

D'autre part, d'après les équations (6.4) et (6.5) de [19] qui utilisent la parité des opérateurs $\mathscr{L}^0$ et $\mathscr{B}^0$, il existe un unique élément $(\overline{\varphi}_R^1,\overline{\varphi}_3^1)$ de l'espace $\mathfrak{H}(\Sigma^+)^2$ et une unique constante c_1 ne dépendant que de λ et μ, tels que

$$\left\{\begin{array}{rcll} (\mathscr{L}_R^0,\mathscr{L}_3^0)(\overline{\varphi}_R^1,\overline{\varphi}_3^1) &=& 0 & \text{dans}\quad \Sigma^+,\\ (\mathscr{B}_R^0,\mathscr{B}_3^0)(\overline{\varphi}_R^1,\overline{\varphi}_3^1) &=& 0 & \text{sur}\quad \gamma_+\times\gamma_-,\\ \overline{\varphi}_R^1\big|_{R=0}-c_1 &=& 0, &\\ \overline{\varphi}_3^1\big|_{R=0} &=& x_3. & \end{array}\right.$$

Le couple $\boldsymbol{\varphi}=(\overline{\varphi}_R^1,0,\overline{\varphi}_3^1)$ et $\boldsymbol{\mathcal{Z}}=c_1\boldsymbol{\mathcal{Z}}^1$ est alors solution du système (1.22). On en déduit donc que le couple

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}}=\big(c_1p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\mathcal{Z}}^1 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varphi}=\big(p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)(\overline{\varphi}_R^1,0,\overline{\varphi}_3^1)$$

est solution des équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}^0\boldsymbol{\varphi} &=& 0,\\ \mathscr{B}^0\boldsymbol{\varphi} &=& 0,\\ (\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\mathcal{Z}})\big|_{R=0}+(0,0,V_3^1(\boldsymbol{z}))\big|_{\partial S_0} &=& 0. \end{array}\right. \tag{1.23}$$

Par sommation des identités précédentes, on en déduit que les éléments $\vec{\mathfrak{d}}^1(\boldsymbol{z})$ et $\boldsymbol{\Psi}^1(\boldsymbol{z})$ donnés par les équations (1.16) et (1.17) sont solutions des équations (1.18), d'où le résultat. ∎

Pour tout entier k, on peut décomposer les opérateurs $\vec{\mathfrak{d}}^k$ en 4 opérateurs

$$\mathfrak{d}_i^k:\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\to\mathscr{C}^\infty(\partial S_0)$$

pour $i = 1, 2, 3$ et 4, déterminés par l'équation suivante, valable pour tout générateur 2D $\boldsymbol{z}$ et pour tout $k \geq 0$:

$$\vec{\mathfrak{d}}^k \boldsymbol{z} := (\mathfrak{d}_1^k \boldsymbol{z})\boldsymbol{\mathcal{Z}}^1 + (\mathfrak{d}_2^k \boldsymbol{z})\boldsymbol{\mathcal{Z}}^2 + (\mathfrak{d}_3^k \boldsymbol{z})\boldsymbol{\mathcal{Z}}^3 + (\mathfrak{d}_4^k \boldsymbol{z})\boldsymbol{\mathcal{Z}}^4.$$

De même, les opérateurs $\vec{\mathfrak{h}}^k$ se décomposent en 4 opérateurs

$$\mathfrak{h}_i^k : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty(\partial S_0)$$

pour $i = 1, 2, 3$ et 4, correspondant aux traces sur les éléments $\{\boldsymbol{\mathcal{Z}}^1, \boldsymbol{\mathcal{Z}}^2, \boldsymbol{\mathcal{Z}}^3, \boldsymbol{\mathcal{Z}}^4\}$ constituant une base de $\mathfrak{Z}$.

D'après le théorème 1.4, on a

$$\mathfrak{d}_1^0 \boldsymbol{z} = z_r\big|_{\partial S_0}, \quad \mathfrak{d}_2^0 \boldsymbol{z} = z_s\big|_{\partial S_0}, \quad \mathfrak{d}_3^0 \boldsymbol{z} = z_3\big|_{\partial S_0}, \quad \text{et} \quad \mathfrak{d}_4^0 \boldsymbol{z} = 0.$$

De plus, d'après la proposition précédente, l'opérateur $\mathfrak{d}_1^4$ est l'opérateur défini par la relation suivante, où $\boldsymbol{z}$ est un générateur 2D :

$$\mathfrak{d}_4^1 \boldsymbol{z} = (\partial_r z_3 + b_r^r z_r + b_r^s z_s)\big|_{\partial S_0}. \tag{1.24}$$

Dans le lemme suivant, on donne plus généralement la structure des opérateurs $\mathfrak{d}_i^k$:

Lemme 1.8 *Soient $\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon]$ et $\vec{\mathfrak{d}}[\varepsilon]$ les séries formelles associées à la réduction canonique par le théorème 1.4. Alors pour tout k fixé, il existe un sous ensemble fini F_k de $\mathbb{N}$ tel que*

- *pour tout $j \in F_k$, il existe des fonctions $\boldsymbol{\varphi}^{k,j}$ de l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{H}(\Sigma^+)\big)$, ne dépendant que de S_0 et de λ et μ.*

- *pour tout $j \in F_k$, il existe des opérateurs 2D à valeurs scalaires, notés P_j^k, de degrés de dérivation au plus k en la variable r dans le système de coordonnées (r, s) sur S_0,*

- *pour tout $i = 1, 2, 3, 4$, il existe des opérateurs 2D à valeurs scalaires, notés $\mathfrak{D}_i^k$, de degrés de dérivation au plus k en la variable r dans le système de coordonnées (r, s) sur S_0,*

tels que pour tout $k \geq 0$ et pour tout générateur 2D $\boldsymbol{z}$, on ait

$$\boldsymbol{\Psi}^k \boldsymbol{z} = \sum_{j \in F_k} (P_j^k \boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0} \boldsymbol{\varphi}^{k,j} \quad \textit{et} \quad \vec{\mathfrak{d}}^k \boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^4 (\mathfrak{D}_i^k \boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0} \boldsymbol{\mathcal{Z}}^i. \tag{1.25}$$

Preuve. Montrons le résultat par récurrence.

Rappelons que pour $k = 0$, on a $\boldsymbol{\Psi}^0 = 0$ et

$$\vec{\mathfrak{d}}^0 \boldsymbol{z} = \big(z_r\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\mathcal{Z}}^1 + \big(z_s\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\mathcal{Z}}^2 + \big(z_3\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\mathcal{Z}}^3.$$

Cette écriture montre donc la formule (1.25) au rang $k = 0$ en posant $F_0 = \emptyset$, $\mathfrak{D}_1^0 \boldsymbol{z} = z_r$, $\mathfrak{D}_2^0 \boldsymbol{z} = z_s$, $\mathfrak{D}_3^0 \boldsymbol{z} = z_3$ et $\mathfrak{D}_4^0 \boldsymbol{z} = 0$.

Pour $k = 1$, l'équation (1.17) de la proposition 1.7 montre que l'on peut écrire

$$\boldsymbol{\Psi}^1 \boldsymbol{z} = \big(p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\varphi}^{1,1} + \big(\theta_s(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\varphi}^{1,2}$$

avec

$$\boldsymbol{\varphi}^{1,1} = (\overline{\varphi}_R^1, 0, \overline{\varphi}_3^1) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varphi}^{1,2} = (0, \overline{\varphi}_s^1, 0).$$

La première équation de la formule (1.25) est donc valable pour $k = 1$ en posant $F_1 = \{1, 2\}$ et

$$P_1^1 \boldsymbol{z} = p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) \quad \text{et} \quad P_2^1 \boldsymbol{z} = \theta_s(\boldsymbol{z}).$$

De plus, d'après l'équation (1.16) on a

$$\vec{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}^1 \boldsymbol{z} = \big(c_1 p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\mathscr{Z}}^1 + \big(\theta_r(\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\big)\boldsymbol{\mathscr{Z}}^4,$$

ce qui montre que la deuxième formule de l'équation (1.25) pour $k = 1$ en posant

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{D}_1^1 \boldsymbol{z} &=& c_1 p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}), \\ \mathfrak{D}_2^1 \boldsymbol{z} &=& 0, \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathfrak{D}_3^1 \boldsymbol{z} &=& 0, \\ \mathfrak{D}_4^1 \boldsymbol{z} &=& \theta_r(\boldsymbol{z}). \end{array}$$

Ceci montre donc le résultat pour $k = 1$.

Supposons le résultat vrai pour $k \in \mathbb{N}$ fixé. D'après la démonstration du théorème 1.4, les opérateurs $\boldsymbol{\Psi}^{k+1}$ et $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}^{k+1}$ sont obtenus par la résolution du problème en $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}^0 \boldsymbol{\varphi} &=& -\sum_{\ell=1}^{k+1} \mathscr{L}^\ell \boldsymbol{\Psi}^{k+1-\ell} \boldsymbol{z} \quad \text{dans} \quad \partial S_0 \times \Sigma^+, \\ \mathscr{B}^0 \boldsymbol{\varphi} &=& -\sum_{\ell=1}^{k+1} \mathscr{B}^\ell \boldsymbol{\Psi}^{k+1-\ell} \boldsymbol{z} \quad \text{sur} \quad \partial S_0 \times \gamma_+ \times \gamma_-, \\ \boldsymbol{\varphi}\big|_{R=0} + \boldsymbol{V}^{k+1} \boldsymbol{z}\big|_{\Gamma_0} &=& 0, \end{array} \right.$$

où $\boldsymbol{V}^{k+1}$ est l'opérateur intervenant dans la série formelle $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$ de la réduction canonique. En particulier, les composantes V_σ^{k+1} et V_3^{k+1} définissent des opérateurs 2D d'ordres au plus $k+1$, d'après les estimations 2.32 du chapitre III pour les ordres de dérivations de $\boldsymbol{V}^{k+1}$.

La solution du problème précédent se décompose en somme des solutions des deux problèmes suivants : d'une part le problème en $\boldsymbol{\varphi}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}^0 \boldsymbol{\varphi} &=& 0 \quad \text{dans} \quad \partial S_0 \times \Sigma^+, \\ \mathscr{B}^0 \boldsymbol{\varphi} &=& 0 \quad \text{sur} \quad \partial S_0 \times \gamma_+ \times \gamma_-, \\ \boldsymbol{\varphi}\big|_{R=0} + \boldsymbol{V}^{k+1} \boldsymbol{z}\big|_{\Gamma_0} &=& 0, \end{array} \right. \tag{1.26}$$

et d'autre part la solution du problème en $\boldsymbol{\psi}$

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathscr{L}^0\boldsymbol{\psi} &=& -\sum_{\ell=1}^{k+1}\mathscr{L}^\ell\boldsymbol{\Psi}^{k+1-\ell}\boldsymbol{z} & \text{dans}\quad \partial S_0\times\Sigma^+,\\ \mathscr{B}^0\boldsymbol{\psi} &=& -\sum_{\ell=1}^{k+1}\mathscr{B}^\ell\boldsymbol{\Psi}^{k+1-\ell}\boldsymbol{z} & \text{sur}\quad \partial S_0\times\gamma_+\times\gamma_-,\\ \boldsymbol{\psi}\big|_{R=0} &=& 0. & \end{array}\right. \tag{1.27}$$

Considérons le premier problème (1.26). L'opérateur $\boldsymbol{V}^{k+1}$ est un polynôme en x_3 de degré $k+1$ à coefficients opérateurs 2D de degrés au plus $k+1$. On peut alors décomposer le problème (1.26) par linéarité en problèmes similaires où l'opérateur $\boldsymbol{V}^{k+1}\boldsymbol{z}$ est remplacé par un opérateur dont une seule composante n'est pas nulle, et où cette composante est du type $x_3^j(P\boldsymbol{z})$ où j est un entier et où P est un opérateur 2D scalaire de degré de dérivation au plus $k+1$.

La proposition 1.2 montre alors l'existence d'une solution $\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ à ce dernier problème qui est simplement la multiplication par $(P\boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}$ de la solution particulière fournie par le cas où le second membre $(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\psi}^\pm,\boldsymbol{v})$ est nul, sauf une composante de $\boldsymbol{v}$, qui est égale à x_3^j.

On en déduit donc l'existence d'un ensemble fini F_{k+1}^1 tel que la solution $\boldsymbol{\varphi}$ du problème (1.26) se décompose en la somme d'une solution exponentiellement décroissante de l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0,\mathfrak{H}(\gamma_\pm)\big)$ et d'un élément de l'espace $\mathfrak{Z}$ qui admettent des décompositions du type (1.25) pour l'ensemble F_{k+1}^1. Il est alors clair que les opérateurs 2D intervenant dans cette décomposition sont de degrés au plus $k+1$.

Considérons maintenant le problème (1.27). Les opérateurs $\boldsymbol{\Psi}^\ell$, pour $\ell=0,\dots,k$ admettent par hypothèse de récurrence une décomposition du type de l'équation (1.25).

Grâce aux propriétés des opérateurs $\mathscr{L}^k$ et $\mathscr{B}^k$, les seconds membres de l'équation (1.27) admettent donc aussi des décomposition du type de l'équation (1.25) : ces seconds membres sont des combinaisons linéaires d'éléments des espaces de fonctions exponentiellement décroissantes $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0,\mathfrak{K}(\Sigma^+)\big)$ et $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0,\mathfrak{K}(\gamma_\pm)\big)$, à coefficients restrictions sur ∂S_0 d'opérateurs 2D sur S_0 de degrés de dérivation au plus k en r.

En raisonnant comme précédemment en introduisant des solutions fondamentales fournies par le corollaire 1.3 avec des seconds membres exponentiellement décroissants, on en déduit l'existence d'un ensemble F_k^2 tel que la solution du problème (1.27) admette une décomposition du type de l'équation (1.25) associée à l'ensemble F_k^2.

En réunissant alors ces deux résultats, et en formant l'ensemble $F_k=F_k^1\cup F_k^2$, on en déduit le lemme. ∎

1.5 Problème 2D en séries formelles

Avant de regrouper les propriétés de la réduction canonique et le résultat du théorème 1.4, on transforme l'équation $\vec{\mathfrak{d}}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \vec{\mathfrak{h}}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ en équation en séries formelles à valeurs dans l'espace $\mathscr{C}^\infty(\partial S_0)^4$, en tenant compte des formes particulières des opérateurs $\vec{\mathfrak{d}}[\varepsilon]$ et $\vec{\mathfrak{h}}[\varepsilon]$.

Le fait que $\mathfrak{d}_4^0$ soit nul, ainsi que $\mathfrak{h}_4^0$, et la forme de l'opérateur $\mathfrak{d}_4^1$ incite à poser la définition suivante :

Définition 1.9 Le quadruplet $(\boldsymbol{V}[\varepsilon], \boldsymbol{Q}[\varepsilon], \boldsymbol{A}[\varepsilon], \boldsymbol{G}[\varepsilon])$ désignant la réduction canonique, et en notant $(\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon], \boldsymbol{\Theta}[\varepsilon], \vec{\mathfrak{d}}[\varepsilon], \vec{\mathfrak{h}}[\varepsilon])$ le quadruplet de séries formelles à coefficients opérateurs associé par le théorème 1.4, on définit alors les séries formelles $\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon]$ et $\vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon]$ à coefficients

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}^k : \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0) \to \mathscr{C}^\infty(\partial S_0)^4,$$

et

$$\vec{\boldsymbol{H}}^k : \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big) \to \mathscr{C}^\infty(\partial S_0)^4,$$

par les équations suivantes :

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon] = \big(\delta_r[\varepsilon], \delta_s[\varepsilon], \delta_3[\varepsilon], \delta_n[\varepsilon]\big) \tag{1.28}$$

avec

$$\begin{cases} \delta_r[\varepsilon] &= \mathfrak{d}_1[\varepsilon], \\ \delta_s[\varepsilon] &= \mathfrak{d}_2[\varepsilon], \\ \delta_3[\varepsilon] &= \mathfrak{d}_3[\varepsilon], \\ \delta_n[\varepsilon] &= \varepsilon^{-1}\mathfrak{d}_4[\varepsilon] - b_r^r\mathfrak{d}_1[\varepsilon] - b_r^s\mathfrak{d}_2[\varepsilon], \end{cases} \tag{1.29}$$

et

$$\vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon] = \big(H_r[\varepsilon], H_s[\varepsilon], H_3[\varepsilon], H_n[\varepsilon]\big), \tag{1.30}$$

avec

$$\begin{cases} H_r[\varepsilon] &= \mathfrak{h}_1[\varepsilon], \\ H_s[\varepsilon] &= \mathfrak{h}_2[\varepsilon], \\ H_3[\varepsilon] &= \mathfrak{h}_3[\varepsilon], \\ H_n[\varepsilon] &= \varepsilon^{-1}\mathfrak{h}_4[\varepsilon] - b_r^r\mathfrak{h}_1[\varepsilon] - b_r^s\mathfrak{h}_2[\varepsilon], \end{cases} \tag{1.31}$$

où b_r^r et b_r^s désignent les composantes $b_r^r(r,s)$ et $b_r^s(r,s)$ évaluées sur le bord ∂S_0, et où les séries formelles $\mathfrak{d}_i[\varepsilon]$ et $\mathfrak{h}_i[\varepsilon]$ pour $i = 1,2,3,4$ sont les séries formelles formées à partir des coefficients des séries formelles $\vec{\mathfrak{d}}[\varepsilon]$ et $\vec{\mathfrak{h}}[\varepsilon]$ dans la base formée des $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^i$ pour $i = 1,2,3,4$. ∎

Les équations (1.29) et (1.31) signifient donc que pour tout $k \geq 0$, on a

$$\delta_r^k = \mathfrak{d}_1^k, \quad \delta_s^k = \mathfrak{d}_2^k, \quad \delta_3^k = \mathfrak{d}_3^k, \quad \delta_n^k = \mathfrak{d}_4^{k+1} - b_r^r \mathfrak{d}_1^k - b_r^s \mathfrak{d}_2^k, \tag{1.32}$$

et

$$H_r^k = \mathfrak{h}_1^k, \quad H_s^k = \mathfrak{h}_2^k, \quad H_3^k = \mathfrak{h}_3^k, \quad H_n^k = \mathfrak{h}_4^{k+1} - b_r^r \mathfrak{h}_1^k - b_r^s \mathfrak{h}_2^k.$$

On en déduit en particulier que $\vec{\boldsymbol{H}}^0$ est l'opérateur nul, mais que l'opérateur $\vec{\boldsymbol{H}}^1$ n'est pas nul en général. L'opérateur $\vec{\boldsymbol{\delta}}^0$ est alors défini par la formule

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}^0 \boldsymbol{z} = (z_r, z_s, z_3, \partial_r z_3)\big|_{\partial S_0}. \tag{1.33}$$

Les séries formelles $\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon]$ et $\vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon]$ possèdent alors la propriété suivante :

Proposition 1.10 *Soient* $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ *une série formelle à coefficients générateurs* 2D, *alors les équations en séries formelles*

$$\vec{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon] \quad \textit{et} \quad \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon],$$

sont équivalentes.

Preuve. En effet la première équation est encore équivalente aux 4 équations en séries formelles, pour $i = 1, 2, 3, 4$,

$$\mathfrak{d}_i[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \mathfrak{h}_i[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon].$$

Or l'application qui détermine les séries formelles $\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon]$ et $\vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon]$ en fonction des séries formelles $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}[\varepsilon]$ et $\vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}[\varepsilon]$ est inversible, et on a

$$\vec{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}[\varepsilon] = \big(\delta_r[\varepsilon], \delta_s[\varepsilon], \delta_3[\varepsilon], \varepsilon\,\delta_n[\varepsilon] + \varepsilon\, b_r^r \delta_r[\varepsilon] + \varepsilon\, b_r^s \delta_s[\varepsilon]\big)$$

et

$$\vec{\boldsymbol{\mathfrak{h}}}[\varepsilon] = \big(H_r[\varepsilon], H_s[\varepsilon], H_3[\varepsilon], \varepsilon\, H_n[\varepsilon] + \varepsilon\, b_r^r H_r[\varepsilon] + \varepsilon\, b_r^s H_s[\varepsilon]\big).$$

On en déduit alors immédiatement l'équivalence des deux équations en séries formelles de l'énoncé. ∎

En utilisant le lemme 1.8, on peut contrôler les ordres des opérateurs $\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon]$. Remarquons tout d'abord que ce lemme implique que les opérateurs δ_r^k, δ_s^k, δ_3^k et δ_n^k sont des traces sur S_0 d'opérateurs 2D sur S_0 à valeurs dans $\mathscr{C}^\infty(S_0)$. On pose donc la définition suivante :

Définition 1.11 On définit les opérateurs 2D

$$\vec{\boldsymbol{D}}^k : \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0) \to \mathscr{C}^\infty(S_0)^4$$

tels que si on note

$$\vec{\boldsymbol{D}}^k = (D_r^k, D_s^k, D_3^k, D_n^k)$$

ses composantes, on a les équations suivantes, similaires aux équations (1.32) :

$$D_r^k = \mathfrak{D}_1^k, \quad D_s^k = \mathfrak{D}_2^k, \quad D_3^k = \mathfrak{D}_3^k, \quad D_n^k = \mathfrak{D}_4^{k+1} - b_r^r \mathfrak{D}_1^k - b_r^s \mathfrak{D}_2^k,$$

où les opérateurs $\mathfrak{D}_i^k$ sont ceux apparaissant dans le lemme 1.8. On a alors

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}^k \boldsymbol{z} = (\vec{\boldsymbol{D}}^k \boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}. \tag{1.34}$$

■

On a alors le résultat suivant :

Proposition 1.12 *Soit* $\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon]$ *la série formelle de la définition* 1.9 *associée à la réduction canonique. Alors, avec la définition* 1.11*, les opérateurs* D_r^k *,* D_s^k *et* D_3^k *sont des opérateurs à valeurs dans* $\mathscr{C}^\infty(S_0)$ *de degré de dérivation en* r *au plus égal à* k *, tandis que* D_n^k *est un opérateur d'ordre au plus* $k+1$ *en* r *.*

Preuve. Le résultat est clair d'après le lemme 1.8 et les équations (1.32). ■

On regroupe alors les propriétés de la réduction canonique avec le résultat du théorème 1.4 :

Théorème 1.13 *Rappelons que* $(\boldsymbol{V}[\varepsilon], \boldsymbol{Q}[\varepsilon], \boldsymbol{A}[\varepsilon], \boldsymbol{G}[\varepsilon])$ *est la réduction canonique, et que* $(\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon], \boldsymbol{\Theta}[\varepsilon], \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon], \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon])$ *est le quadruplet de séries formelles à coefficients opérateurs associé par le théorème* 1.4 *et la définition* 1.9*. Ces deux quadruplets de séries formelles possèdent la propriété suivante : si* $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ *est le champ de 1-forme* 3D *associé à* $\boldsymbol{f}^\varepsilon(\varepsilon)$ *, et si* $\boldsymbol{z}[\varepsilon]$ *est une série formelle à coefficients générateurs* 2D *satisfaisant les équations*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{A}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] & = & \boldsymbol{G}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon], \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] & = & \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon], \end{array} \right. \tag{1.35}$$

alors les séries formelles $\boldsymbol{w}[\varepsilon] := \boldsymbol{V}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ *et* $\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] := \boldsymbol{\Psi}[\varepsilon]\boldsymbol{z}[\varepsilon] + \boldsymbol{\Theta}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ *sont solutions des équations*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{L}[\varepsilon]\boldsymbol{w}[\varepsilon] & = & -\boldsymbol{f}[\varepsilon], \\ \boldsymbol{B}[\varepsilon]\boldsymbol{w}[\varepsilon] & = & 0, \end{array} \right. \quad \textit{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}[\varepsilon]\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] & = & 0, \\ \mathscr{B}[\varepsilon]\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon] & = & 0, \end{array} \right.$$

avec la condition au bord

$$\boldsymbol{w}[\varepsilon]\big|_{\Gamma_0} + \boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]\big|_{R=0} = 0.$$

Définition 1.14 L'équation (1.35) associée à la réduction canonique s'appelle la *problème réduit théorique.* ■

Le théorème 1.13 ramène donc le problème 3D à un problème 2D en séries formelle avec conditions aux limites. La section suivante étudie ce problème réduit dans le cas où la surface S_0 est elliptique. On verra que posé sous cette forme, le problème réduit n'a pas de solution, et il est nécessaire d'introduire une nouvelle échelle de séries formelles, entraînant ainsi une reformulation du problème réduit théorique, pour obtenir un *problème réduit effectif* qui possède alors une solution.

Remarque 1.15 Dans le cas des plaques (voir [17]), on montre que le problème réduit (1.35) admet une solution dans l'algèbre des séries formelles à coefficients générateurs 2D sous l'hypothèse que la série formelle $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ a une puissance de démarrage égale à 2 en ε. Des estimations d'erreurs analogues à celles de la section 4 ci-dessous montrent alors l'existence d'un développement asymptotique du déplacement 3D qui comporte des termes indépendants de ε sur la surface moyenne, ainsi que des termes de couches limites en r/ε (multipliés par une fonction de troncature comme dans le chapitre V).

D'autre part, en réduisant le problème d'une dimension (c'est-à-dire en considérant que la "variété moyenne" S_0 est une courbe plongée dans $\mathbb{R}^2$), et en supposant la courbe moyenne convexe, on peut montrer que le problème réduit (1.35) admet une solution sous l'hypothèse que $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ démarre en ε^2 (voir [26]). ∎

Remarque 1.16 Le théorème 1.13 s'énonce aussi pour des conditions aux limites différentes des conditions aux limites encastrées sur le bord latéral. On montre en effet sans difficulté l'existence d'un problème réduit théorique semblable à (1.35) dont la solution possède les mêmes propriétés que précédemment, mais où les séries formelles $\boldsymbol{w}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]$ données dans le théorème 1.13 satisfont les conditions au limites

$$\mathscr{T}[\varepsilon]\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon]\big|_{R=0} + \boldsymbol{T}[\varepsilon]\boldsymbol{w}[\varepsilon]\big|_{\partial S_0} = 0,$$

où $\boldsymbol{T}[\varepsilon]$ est la série formelle issue d'un opérateur associé au problème 3D sur le bord latéral, et où $\mathscr{T}[\varepsilon]$ est la série formelle obtenue à partir de la série $\boldsymbol{T}[\varepsilon]$ après changement de variable $(r, s, x_3) \mapsto (R, s, x_3)$. L'opérateur $\vec{\boldsymbol{\delta}}^0$ dépend alors de l'opérateur $\boldsymbol{T}[\varepsilon]$. ∎

2 Problème réduit effectif

Dans cette section, on étudie le problème réduit théorique (1.35) pour dégager un nouveau problème en série formelle qui soit résoluble. Remarquons que si on pose $\boldsymbol{g}[\varepsilon] := \boldsymbol{G}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ et $\vec{\boldsymbol{c}}[\varepsilon] := \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon]\boldsymbol{f}[\varepsilon]$, alors le problème réduit s'écrit

$$\begin{cases} (\boldsymbol{M} + \varepsilon^2\boldsymbol{A}^2 + \varepsilon^3\boldsymbol{A}^3 + \cdots)\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \boldsymbol{g}^0 + \varepsilon\,\boldsymbol{g}^1 + \cdots \\ (\vec{\boldsymbol{\delta}}^0 + \varepsilon\,\vec{\boldsymbol{\delta}}^1 + \cdots)\boldsymbol{z}[\varepsilon] = \varepsilon\,\vec{\boldsymbol{c}}^1 + \varepsilon^2\vec{\boldsymbol{c}}^2 + \cdots, \end{cases}$$

où $\boldsymbol{M}$ est l'opérateur de membrane, et $\vec{\boldsymbol{\delta}}^0$ l'opérateur de Dirichlet (1.33).

Le problème (1.35) ressemble donc, au moins au regard de ses premiers termes, aux problèmes étudiés dans le chapitre V concernant les modèles 2D admissibles. Comme dans ce chapitre, on peut "résoudre" le problème réduit à condition d'introduire une nouvelle échelle de développement en série formelle, échelle constitués de termes exponentiellement décroissants en $T = r/\sqrt{\varepsilon}$.

L'introduction de cette nouvelle échelle nécessite de poser les problèmes dans des algèbres de séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$. On montre donc pour commencer comment les équations en séries formelles en ε sont naturellement des équations en séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$. On introduit alors une nouvelle notation pour désigner les séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$. Enfin, on dégage à partir du problème réduit théorique un *problème réduit effectif* contenant des termes en séries formelles de couches limites 2D. On montre alors un théorème d'existence pour le problème réduit effectif analogue au théorème 2.1 du chapitre V.

2.1 Séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$

On introduit tout d'abord une notation pour les séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$:

Notation 2.1 Dans toute la suite, la notation $a[\varepsilon^{1/2}]$ désigne une série formelle en puissances de $\varepsilon^{1/2}$:

$$a[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} a^{k/2}.$$

Si $b[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k b^k$ est une série formelle en ε , on fait alors la convention que $b[\varepsilon^{1/2}]$ désigne la série formelle

$$b[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} b^{k/2}, \quad \text{avec} \quad \forall\, \ell \geq 0, \quad \begin{cases} b^{(2\ell+1)/2} = 0 \quad \text{et} \\ b^{(2\ell)/2} = b^\ell. \end{cases}$$

■

Ainsi, toute série formelle en ε peut aussi être vue comme série formelle en $\varepsilon^{1/2}$ avec ses "termes impairs" tous égaux à 0 . Dans toute la suite de ce chapitre, les séries formelles sont toujours considérées comme des séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$. En particulier, la série formelle $\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}]$ désigne la série formelle $\boldsymbol{f}[\varepsilon]$ vue comme série formelle en puissances de $\varepsilon^{1/2}$.

Si $(\boldsymbol{V}[\varepsilon], \boldsymbol{Q}[\varepsilon], \boldsymbol{A}[\varepsilon], \boldsymbol{G}[\varepsilon])$ la réduction canonique, on appelle encore réduction canonique le quadruplet de séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$ noté

$$(\boldsymbol{V}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Q}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]).$$

De même, si $(\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon], \boldsymbol{\Theta}[\varepsilon], \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon], \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon])$ est le quadruplet de séries formelles associé à la réduction canonique par le théorème 1.4 et la définition 1.9, on note

$$(\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{\Theta}[\varepsilon^{1/2}], \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}], \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}])$$

ce quadruplet vu comme quadruplet de séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$. Le théorème 1.13 est alors encore valable dans des espaces de séries formelles en $\varepsilon^{1/2}$, avec la différence que la série

$$\boldsymbol{z}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{z}^{k/2}$$

est une "vraie" série formelle à coefficients générateurs 2D, c'est-à-dire que tous les termes $\boldsymbol{z}^{k/2}$ sont non nuls à priori. Dans ce cas, la série formelle

$$\boldsymbol{w}[\varepsilon^{1/2}] := \boldsymbol{V}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{z}[\varepsilon^{1/2}] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}]$$

est alors aussi une série formelle comprenant des termes non nuls à tous les ordres en $\varepsilon^{1/2}$.

D'autre part, remarquons que ce résultat est encore valable si la série formelle $\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}]$ a tous ses termes éventuellement non nuls. Ainsi, on pourrait remplacer l'hypothèse 4.2 du chapitre II sur $\boldsymbol{f}^\varepsilon(\varepsilon)$ par l'hypothèse plus générale que $\boldsymbol{f}^\varepsilon(\varepsilon)$ admet un développement asymptotique en $\varepsilon^{1/2}$.

2.2 Position du problème réduit effectif

Rappelons que dans le chapitre V, l'étude des modèles 2D admissibles avait conduit à poser des équations en séries formelles pour deux types de termes : d'une part les termes $\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$, et d'autre part les termes de couches limites exponentiellement décroissants $\boldsymbol{Z} \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$ (voir l'équation (1.33) du chapitre V) après avoir effectué le changement de variable $T = \varepsilon^{-1/2} r$ dans les équations initiales.

Dans cette sous-section, on donne à partir du problème réduit (1.35) les équations devant être vérifiées par ces deux types de termes. Il s'agit donc de la *définition* d'un nouveau problème, appelé *problème réduit effectif*, et qui s'inspire du problème réduit théorique.

Equations à l'intérieur.

Supposons donc que $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ est une série formelle à coefficients générateurs 2D. On peut alors considérer l'équation

$$\boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}] \tag{2.1}$$

dans l'espace des séries formelles en puissances de $\varepsilon^{1/2}$ à coefficients générateurs 2D. Cette équation signifie donc par définition

$$\forall n \geq 0, \qquad \sum_{\ell=0}^{n} \boldsymbol{A}^{\ell/2} \boldsymbol{\zeta}^{(n-\ell)/2} = \sum_{\ell=0}^{n} \boldsymbol{G}^{\ell/2} \boldsymbol{f}^{(n-\ell)/2}.$$

Pour donner un sens aux équations portant sur les termes de couches limites 2D, il est nécessaire de faire le changement de variable $(r,s) \mapsto (T,s)$ avec $T = r/\sqrt{\varepsilon}$. Considérons la série formelle $\boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{A}^{k/2}$. Lors du changement de variables $(r,s) \mapsto (T,s)$, les opérateurs différentiels $\boldsymbol{A}^k$ deviennent alors des opérateurs dépendant de ε dans les variables (T,s). Comme dans l'équation (1.16) du chapitre V, on pose alors la définition suivante :

Définition 2.2 Pour tout $k \geq 0$, on définit l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(k)}(\varepsilon)$ sur $\breve{S} := \mathbb{R}^+ \times \partial S_0$ en variables (T,s) à partir de l'opérateur $\boldsymbol{A}^k(r,s;\partial_r,\partial_s)$ par l'équation

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(k)}(\varepsilon)(T,s;\partial_T,\partial_s) := \boldsymbol{A}^k(\varepsilon^{1/2}T, s; \varepsilon^{-1/2}\partial_T, \partial_s).$$

■

Ces opérateurs dépendent donc en fait de $\varepsilon^{1/2}$, et comportent des puissances négatives de $\varepsilon^{1/2}$ qui dépendent des degrés des opérateurs. Les développements de Taylor en $T = 0$ des coefficients permettent alors d'associer à ces opérateurs des séries formelles $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]$ à coefficients opérateurs dans les variables (T,s). On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.3 *Les développements de Taylor en $T = 0$ des coefficients des opérateurs $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(k)}(\varepsilon)$ déterminent des opérateurs $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{k,\ell/2}$ sur la variété $\breve{S}$, polynomiaux en T, tels que pour tout k, on ait*

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{\ell \geq -(k+2)} \varepsilon^{\ell/2} \boldsymbol{\mathcal{A}}^{k,\ell/2}. \tag{2.2}$$

Preuve. C'est une conséquence des majorations des ordres de dérivations des opérateurs $\boldsymbol{A}^k$ (voir l'équation (2.34) du chapitre III) qui montrent que les composantes des opérateurs $\boldsymbol{A}^k$ sont des opérateurs de degré au plus $k+2$. ■

Le calcul des premiers termes des série (2.2) s'effectue manière similaire aux calculs des premiers termes de la série formelle $\boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}]$ du chapitre V (voir les équations (1.19) et (1.20) du chapitre V). D'après l'expression de $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{M}$ et la définition des opérateurs $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{0,\ell/2}$, on voit facilement que

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(0)}[\varepsilon] = \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{0,-1} + \varepsilon^{-1/2}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{0,-1/2} + \cdots,$$

où $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{0,-1}$ est l'opérateur défini par l'équation

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{A}_T^{0,-1}(\boldsymbol{Z}) & = & -(\widetilde{\lambda}+2\mu)\,\partial_{TT}Z_T, \\ \mathcal{A}_s^{0,-1}(\boldsymbol{Z}) & = & -\mu\,\partial_{TT}Z_s, \\ \mathcal{A}_3^{0,-1}(\boldsymbol{Z}) & = & 0. \end{array}\right. \tag{2.3}$$

De plus, la composante transverse $\mathcal{A}_3^{0,-1/2}$ de l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{0,-1/2}$ s'écrit

$$\mathcal{A}_3^{0,-1/2}(\boldsymbol{Z}) = -2(\widetilde{\lambda}H+\mu b_{rr})\,\partial_T Z_T - 2\mu b_{rs}\,\partial_T Z_s. \tag{2.4}$$

D'autre part, l'opérateur $\boldsymbol{A}^1$ est nul, donc aussi tous les opérateurs $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{1,\ell/2}$. Enfin, d'après l'expression de $\boldsymbol{A}^2$, on a

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(2)}[\varepsilon] = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{2,-2} + \varepsilon^{-3/2}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{2,-3/2} + \cdots$$

où l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{2,-2}$ fait intervenir les parties d'ordre 4 de l'opérateur $\boldsymbol{A}^2$. En particulier, la composante transverse de cet opérateur s'écrit

$$\mathcal{A}_3^{2,-2}(\boldsymbol{Z}) = \frac{1}{3}(\widetilde{\lambda}+2\mu)\,\partial_{TTTT}Z_3. \tag{2.5}$$

On peut alors considérer la *série formelle à coefficients séries formelles* formée à partir des séries formelles $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]$, puis identifier les coefficients en puissances de $\varepsilon^{1/2}$:

Définition 2.4 On définit la série formelle $\boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}]$ par l'équation

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}] := \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]. \tag{2.6}$$

■

Cette définition a bien un sens grâce à (2.2). En effet, on calcule que

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}] := \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k \sum_{\ell\geq -(k+2)}\varepsilon^{\ell/2}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{k,\ell/2},$$

soit

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}] := \sum_{k\geq 0}\sum_{\ell\geq 0}\varepsilon^{(2k+\ell-k-2)/2}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{k,(\ell-k-2)/2}$$

d'où

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}] := \sum_{n\geq -2}\varepsilon^{n/2}\sum_{k=0}^{n+2}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{k,(n-2k)/2},$$

en tenant compte du fait que $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{k,\ell/2} = 0$ si $\ell < -(k+2)$. On a donc la formule

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}] := \sum_{n\geq -2} \varepsilon^{n/2} \boldsymbol{\mathcal{A}}^{n/2} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}^{n/2} = \sum_{k=0}^{n+2} \boldsymbol{\mathcal{A}}^{k,(n-2k)/2}. \tag{2.7}$$

C'est pour éviter la confusion entre les coefficients $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{n/2}$ et la série formelle $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]$ qu'on note cette dernière avec un indice entre parenthèse.

La série formelle $\boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon]$ s'écrit donc

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon] = \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1} + \varepsilon^{-1/2}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1/2} + \boldsymbol{\mathcal{A}}^{0} + \cdots,$$

avec, d'après l'équation (2.7) et le fait que les opérateurs $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{1,\ell/2}$ sont nuls,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1} & = & \boldsymbol{\mathcal{A}}^{0,-1}, \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1/2} & = & \boldsymbol{\mathcal{A}}^{0,-1/2}, \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}^{0} & = & \boldsymbol{\mathcal{A}}^{0,0} + \boldsymbol{\mathcal{A}}^{2,-2}, \end{cases} \tag{2.8}$$

où l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{0,-1}$ est donné par l'équation (2.3). Remarquons que l'opérateur $\boldsymbol{A}^2$ n'intervient que dans l'expression de l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{A}}^0$.

Dans la suite de cette section, on s'intéresse donc au problème suivant : trouver une série formelle $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$ satisfaisant l'équation

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = 0. \tag{2.9}$$

Comme dans le chapitre V, on homogénéise l'opérateur en série formelle $\boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}]$ de manière à obtenir un nouveau problème en série formelle dont le premier terme non nul ait toutes ses composantes non nulles, et fasse intervenir les deux opérateurs $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{A}^2$. Dans ce but, rappelons que si $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{Z}^{k/2}$ est une série formelle à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$, la série formelle $\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}]$ est définie par les relations suivantes (voir les équations (1.21) du chapitre V) :

$$\begin{cases} \breve{Z}_\sigma[\varepsilon^{1/2}] = Z_\sigma[\varepsilon^{1/2}], \\ \breve{Z}_3[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon^{1/2} Z_3[\varepsilon^{1/2}]. \end{cases} \tag{2.10}$$

On définit alors la série formelle $\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}[\varepsilon^{1/2}]$ par l'équation suivante (voir l'équation (1.22) du chapitre V)

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = \big(\varepsilon\,\mathcal{A}_\sigma[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\,,\,\varepsilon^{1/2}\mathcal{A}_3[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big). \tag{2.11}$$

Le problème (2.9) est alors équivalent au problème

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = 0. \tag{2.12}$$

Compte tenu des ordres des opérateurs $\boldsymbol{A}^k$, il suffit pour calculer le premier terme de la série $\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}[\varepsilon^{1/2}]$, de calculer les contributions des opérateurs $\boldsymbol{A}^0$ et $\boldsymbol{A}^2$. Les équations (2.3), (2.4), (2.5) et la définition de la série formelle $\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}[\varepsilon]$ montrent alors qu'on a

$$\begin{aligned}
\breve{\mathcal{A}}^0_T(\breve{\boldsymbol{Z}}) &= -\,(\widetilde{\lambda}+2\mu)\,\partial_{TT}\breve{Z}_T + 2\big(\widetilde{\lambda}H+\mu b_{rr}\big)\,\partial_T\breve{Z}_3,\\
\breve{\mathcal{A}}^0_s(\breve{\boldsymbol{Z}}) &= -\,\mu\,\partial_{TT}\breve{Z}_s + 2\mu b_{rs}\,\partial_T\breve{Z}_3,\\
\breve{\mathcal{A}}^0_3(\breve{\boldsymbol{Z}}) &= -\,2\big(\widetilde{\lambda}H+\mu b_{rr}\big)\,\partial_T\breve{Z}_T - 2\mu b_{rs}\,\partial_T\breve{Z}_s\\
&\qquad + \tfrac{1}{3}(\widetilde{\lambda}+2\mu)\,\partial_{TTTT}\breve{Z}_3 + 4\big((\widetilde{\lambda}+2\mu)H^2-\mu K\big)\,\breve{Z}_3.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Le changement d'échelle (2.10) a ramené la partie $\mathcal{A}_3^{2,-2}$ intervenant dans la série formelle $\boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon]$ au niveau du terme $\mathcal{A}_3^{0,-1/2}$ (voir l'équation (2.8)).

L'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^0$ est donc identique à l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0$ donné par l'équation (1.24) du chapitre V. En particulier, l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^0$ possède les même propriétés que l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0$ et vérifie le théorème 1.7 du chapitre V.

Ainsi, le problème que nous allons considérer est constitué des équations à l'intérieur (2.1) sur la série formelle inconnue $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ et (2.9) sur la série formelle inconnue $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$. Ce sont les équations aux bords qui vont introduire des termes de couplages entre ces deux types d'inconnues.

Conditions au bord.

Comme précédemment, si $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ est une série formelle à coefficients générateurs 2D, on peut considérer la série formelle

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{n\geq 0}\varepsilon^{n/2}\Big(\sum_{\ell=0}^{n}\vec{\boldsymbol{\delta}}^{\ell/2}\boldsymbol{\zeta}^{(n-\ell)/2}\Big), \tag{2.14}$$

à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty(\partial S_0)^4$.

Pour donner un sens aux équations sur les termes de couches limites, rappelons qu'à la série formelle $\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]$ on associe la série formelle $\vec{\boldsymbol{D}}[\varepsilon^{1/2}]$ à coefficients opérateurs sur S telle que $\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]\boldsymbol{z} = \big(\vec{\boldsymbol{D}}[\varepsilon^{1/2}]\boldsymbol{z}\big)\big|_{\partial S_0}$ pour tout générateur 2D $\boldsymbol{z}$ (voir la définition 1.11).

Comme précédemment, on fait d'abord le changement de variable $T = \varepsilon^{-1/2}r$ dans les opérateurs $\vec{\boldsymbol{D}}^k$:

Définition 2.5 Pour tout $k \geq 0$, on définit l'opérateur $\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{(k)}(\varepsilon)$ sur la variété $\breve{S} := \mathbb{R}^+ \times \partial S_0$ en variables (T, s) à partir de l'opérateur $\vec{\boldsymbol{D}}^k(r, s; \partial_r, \partial_s)$ par l'équation

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{(k)}(\varepsilon)(T, s; \partial_T, \partial_s) := \vec{\boldsymbol{D}}^k(\varepsilon^{1/2}T, s; \varepsilon^{-1/2}\partial_T, \partial_s).$$

■

En effectuant des développements de Taylor en $T = 0$ des coefficients des opérateurs $\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{(k)}(\varepsilon)$, on peut associer à ces opérateurs des séries formelles $\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]$ à coefficients opérateurs dans les variables (T, s) et polynomiaux en T. On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.6 *Les développements de Taylor des coefficients en $T = 0$ des opérateurs $\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{(k)}(\varepsilon)$ déterminent des opérateurs $\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{k,\ell/2}$ sur la variété $\breve{S}$, polynomiaux en T et à valeurs dans $\mathscr{C}^\infty(\partial S_0)^4$, tels que pour tout k, on ait*

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{\ell \geq -(k+1)} \varepsilon^{\ell/2} \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{k,\ell/2}. \tag{2.15}$$

Preuve. C'est une conséquence du fait que pour tout $k \geq 0$, les opérateurs D_r^k, D_s^k et D_3^k sont d'ordre au plus k, tandis que l'opérateur D_n^k est d'ordre au plus $k+1$. ■

On définit alors la série formelle de séries formelles suivantes :

Définition 2.7 On définit la série formelle $\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}[\varepsilon^{1/2}]$ par l'équation

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}].$$

■

Cette définition a bien un sens, car on a

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \sum_{\ell \geq -(k+1)} \varepsilon^{\ell/2} \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{k,\ell/2},$$

soit

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{(2k+\ell-k-1)/2} \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{k,(\ell-k-1)/2},$$

d'où

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{n \geq -1} \varepsilon^{n/2} \sum_{k=0}^{n+1} \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{k,(n-2k)/2},$$

compte tenu du fait que $\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{k,\ell/2} = 0$ pour $\ell < -(k+1)$. On a donc la relation

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq -1} \varepsilon^{n/2} \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{n/2} \quad \text{avec} \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{n/2} = \sum_{k=0}^{n+1} \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{k,(n-2k)/2}.$$

Enfin, on pose la définition suivante :

Définition 2.8 On définit la série formelle $\vec{\boldsymbol{d}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq -1} \varepsilon^{k/2} \vec{\boldsymbol{d}}^{k/2}$ à coefficients opérateurs

$$\vec{\boldsymbol{d}}^{k/2} : \Gamma(T_1\breve{S}) \times \mathscr{C}^\infty(\breve{S}) \to \mathscr{C}^\infty(\partial S_0)^4,$$

par l'équation suivante, valable pour tout $\boldsymbol{Z} \in \Gamma(T_1\breve{S}) \times \mathscr{C}^\infty(\breve{S})$,

$$\vec{\boldsymbol{d}}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{Z} = \big(\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{Z}\big)\big|_{T=0}.$$

■

On note alors

$$\vec{\boldsymbol{d}}^{k/2} = \big(d_T^{k/2}, d_s^{k/2}, d_3^{k/2}, d_n^{k/2}\big)$$

les composantes des opérateurs $\vec{\boldsymbol{d}}^{k/2}$.

D'après l'équation (1.33), l'opérateur $\vec{\boldsymbol{D}}^0$ est donné par l'équation

$$\vec{\boldsymbol{D}}^0 \boldsymbol{z} = (z_r, z_s, z_3, \partial_r z_3). \tag{2.16}$$

Compte tenu des ordres de dérivation des opérateurs $\vec{\boldsymbol{D}}^k$, on en déduit donc que la série formelle $\vec{\boldsymbol{d}}[\varepsilon^{1/2}]$ s'écrit

$$\vec{\boldsymbol{d}}[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon^{-1/2} \vec{\boldsymbol{d}}^{-1/2} + \vec{\boldsymbol{d}}^0 + \cdots,$$

avec

$$\vec{\boldsymbol{d}}^{-1/2} \boldsymbol{Z} = (0, 0, 0, \partial_T Z_3)\big|_{T=0}, \tag{2.17}$$

et

$$\vec{\boldsymbol{d}}^0 \boldsymbol{Z} = \big(Z_r, Z_s, Z_3, d_n^0(\boldsymbol{Z})\big)\big|_{T=0}. \tag{2.18}$$

Dans la suite, on considère donc le problème au bord suivant : trouver $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ une série formelle à coefficients générateur 2D et $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ une série formelle à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{T}}(\mathbb{R}^+)\big)$ satisfaisant l'équation

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + \vec{\boldsymbol{d}}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}]. \tag{2.19}$$

Remarquons que dans cette expression, la série formelle $\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]$ à une puissance de démarrage égale à 0, tandis que la série $\vec{\boldsymbol{d}}[\varepsilon^{1/2}]$ démarre en $\varepsilon^{-1/2}$. Ainsi, il y a une *inhomogénéité* des termes opérateurs constituant la condition au bord. Comme on le verra dans la suite, c'est grâce à ce manque d'homogénéité en $\varepsilon^{1/2}$ que le problème admet une solution.

Enfin, comme les équations à l'intérieur seront étudiées sous la forme (2.12) faisant intervenir l'inconnue $\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}]$, on définit la série formelle $\breve{\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}}[\varepsilon^{1/2}]$ par l'équation

$$\breve{\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] := \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]. \tag{2.20}$$

et de même, on définit la série formelle $\breve{\vec{\boldsymbol{d}}}[\varepsilon^{1/2}]$ par l'équation

$$\breve{\vec{\boldsymbol{d}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}} = \big(\breve{\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}}\big)\big|_{T=0} \tag{2.21}$$

pour tout $\breve{\boldsymbol{Z}} \in \Gamma(T_1\breve{S}) \times \mathscr{C}^\infty(\breve{S})$. On note $\breve{d}_T[\varepsilon^{1/2}]$, $\breve{d}_s[\varepsilon^{1/2}]$, $\breve{d}_3[\varepsilon^{1/2}]$ et $\breve{d}_n[\varepsilon^{1/2}]$ les composantes de $\breve{\vec{\boldsymbol{d}}}[\varepsilon^{1/2}]$.

Ainsi, l'équation (2.19) est encore équivalente à l'équation

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + \breve{\vec{\boldsymbol{d}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}]. \tag{2.22}$$

Rappelons que l'équation (2.10) liant les séries formelles $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}]$ est équivalente aux équations sur les coefficients :

$$\forall\, k, \quad \begin{cases} \breve{Z}_\sigma^{k/2} = Z_\sigma^{k/2} \quad \text{et,} \\ \breve{Z}_3^{k/2} = Z_3^{(k-1)/2}. \end{cases} \tag{2.23}$$

La série formelle $\breve{\vec{\boldsymbol{d}}}[\varepsilon^{1/2}]$ s'écrit donc

$$\breve{\vec{\boldsymbol{d}}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq -2} \varepsilon^{k/2}\breve{\vec{\boldsymbol{d}}}^{k/2} = \varepsilon^{-1}\breve{\vec{\boldsymbol{d}}}^{-1} + \varepsilon^{-1/2}\breve{\vec{\boldsymbol{d}}}^{-1/2} + \breve{\vec{\boldsymbol{d}}}^{0} + \cdots,$$

avec, composantes par composantes,

$$\breve{d}_n^{-1}\breve{\boldsymbol{Z}} = \partial_T \breve{Z}_3\big|_{T=0}, \tag{2.24}$$

et

$$\begin{cases} \breve{d}_3^{-1}\breve{\boldsymbol{Z}} & = & 0, \\ \breve{d}_3^{-1/2}\breve{\boldsymbol{Z}} & = & \breve{Z}_3\big|_{T=0}. \end{cases} \tag{2.25}$$

De plus, on a

$$\begin{cases} \breve{d}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{Z}} &= 0, \\ \breve{d}_T^{-1/2}\breve{\boldsymbol{Z}} &= 0, \\ \breve{d}_T^{0}\breve{\boldsymbol{Z}} &= \breve{Z}_T\big|_{T=0}, \end{cases} \tag{2.26}$$

et enfin

$$\begin{cases} \breve{d}_s^{-1}\breve{\boldsymbol{Z}} &= 0, \\ \breve{d}_s^{-1/2}\breve{\boldsymbol{Z}} &= 0, \\ \breve{d}_s^{0}\breve{\boldsymbol{Z}} &= \breve{Z}_s\big|_{T=0}. \end{cases} \tag{2.27}$$

Ainsi, dans l'équation (2.22), les puissances de démarrage des diverses composantes ne sont pas identiques : la composante n démarre en ε^{-1}, la composante 3 démarre en $\varepsilon^{-1/2}$ et les autres composantes démarrent en ε^0.

Les équations (2.1), (2.9) et (2.19) définissent un nouveau problème :

Définition 2.9 On appelle *problème réduit effectif* le problème suivant : trouver une série formelle $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ à coefficients dans l'espace $\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)$ et une série formelle $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\boldsymbol{Z}^{k/2}$ à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$ satisfaisant les relations

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] &= \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] &= 0, \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + \vec{\boldsymbol{d}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] &= \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}]. \end{cases} \tag{2.28}$$

■

Dans la sous-section suivante, on montre que ce problème admet une solution.

2.3 Résolution du problème réduit effectif

On étudie maintenant le système (2.28). La méthode employée est proche de celle utilisée dans la démonstration du théorème 2.1 du chapitre V. On a le résultat suivant :

Théorème 2.10 *Considérons la réduction canonique, et soient* $\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]$ *et* $\vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]$ *les opérateurs associés de la définition* 1.9*, et* $\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}]$ *la série formelle à coefficients dans l'espace* $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$ *associée au second membre* $\boldsymbol{f}^\varepsilon(\varepsilon)$. *Alors, sous l'hypothèse que la surface moyenne* S_0 *est elliptique, il existe une unique série* *formelle* $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ *à coefficients dans l'espace* $\Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$ *et une unique série formelle* $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{Z}^{k/2}$ *à coefficients dans l'espace* $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$ *satisfaisant les relations*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] &=& \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] &=& 0, \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + \vec{\boldsymbol{d}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] &=& \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \end{array}\right. \tag{2.29}$$

où les séries formelles $\boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}]$ *et* $\vec{\boldsymbol{d}}[\varepsilon^{1/2}]$ *sont décrites dans la sous-section précédente.*

Preuve. Afin de simplifier les équations, on pose

$$\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}] := \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}] \quad \text{et} \quad \vec{\boldsymbol{c}}[\varepsilon^{1/2}] := \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}].$$

Ces équations définissent des séries formelles $\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{g}^{k/2}$ et $\boldsymbol{c}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{c}^{k/2}$, avec respectivement $\boldsymbol{g}^{k/2} \in \Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)$, et $\vec{\boldsymbol{c}}^{k/2} \in \mathscr{C}^\infty(\partial S_0)^4$. Remarquons que le fait que $\vec{\boldsymbol{H}}^0$ soit l'opérateur nul implique que $\vec{\boldsymbol{c}}^0 = 0$.

Dans toute la suite, les séries formelles $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}]$ sont liées par l'équation (2.10). Les deux dernières équations du système (2.29) sont donc équivalentes aux équations

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = 0 \tag{2.30}$$

et

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + \vec{\breve{\boldsymbol{d}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}]. \tag{2.31}$$

Soient deux séries formelles

$$\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\zeta}^{k/2} \quad \text{et} \quad \breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\breve{\boldsymbol{Z}}^{k/2}$$

à coefficients $\boldsymbol{\zeta}^{k/2} \in \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$ et $\boldsymbol{Z}^{k/2} \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$. La série formelle $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ vérifie la première équation du système (2.29) si on a pour tout $k \geq 0$,

$$\boldsymbol{A}^0(\boldsymbol{\zeta}^{k/2}) = -\sum_{\ell=1}^{k} \boldsymbol{A}^{\ell/2}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-\ell)/2}) + \boldsymbol{g}^{k/2} \quad \text{dans} \quad S_0.$$

De même, l'équation (2.30) s'écrit, pour tout $k \geq 0$,

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^{k/2}) = -\sum_{\ell=1}^{k} \breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{\ell/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k-\ell)/2}) \quad \text{dans} \quad \breve{S}.$$

Enfin, compte tenu du fait que la série formelle $\breve{\vec{\boldsymbol{d}}}[\varepsilon^{1/2}]$ démarre en ε^{-1}, le terme en $\varepsilon^{k/2}$ pour $k \geq -2$ dans l'équation (2.31) donne encore l'équation

$$\sum_{\ell=0}^{k} \vec{\boldsymbol{\delta}}^{\ell/2}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-\ell)/2}) + \breve{\vec{\boldsymbol{d}}}^{-1}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k+2)/2}) + \breve{\vec{\boldsymbol{d}}}^{-1/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k+1)/2}) + \sum_{\ell=0}^{k} \breve{\vec{\boldsymbol{d}}}^{\ell/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k-\ell)/2}) = \vec{\boldsymbol{c}}^{k/2}.$$

En utilisant les équations (2.24)-(2.27) donnant les expressions des premiers termes de la série $\breve{\vec{\boldsymbol{d}}}[\varepsilon^{1/2}]$, et compte tenu de l'expression (1.33) de l'opérateur $\boldsymbol{\delta}^0$ ces équations s'écrivent encore composantes par composantes :

$$\zeta_r^{k/2}\big|_{\partial S_0} + \sum_{\ell=1}^{k} \delta_r^{\ell/2}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-\ell)/2}) + \breve{Z}_T^{k/2}\big|_{T=0} + \sum_{\ell=1}^{k} \breve{d}_T^{\ell/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k-\ell)/2}) = c_T^{k/2},$$

et

$$\zeta_s^{k/2}\big|_{\partial S_0} + \sum_{\ell=1}^{k} \delta_s^{\ell/2}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-\ell)/2}) + \breve{Z}_s^{k/2}\big|_{T=0} + \sum_{\ell=1}^{k} \breve{d}_s^{\ell/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k-\ell)/2}) = c_s^{k/2},$$

pour les composantes surfaciques. De plus, d'après l'équation (2.25) donnant l'expression de l'opérateur $\breve{d}_3^{-1/2}$, on a

$$\zeta_3^{k/2}\big|_{\partial S_0} + \sum_{\ell=1}^{k} \delta_3^{\ell/2}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-\ell)/2}) + \breve{Z}_3^{(k+1)/2}\big|_{T=0} + \sum_{\ell=0}^{k} \breve{d}_3^{\ell/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k-\ell)/2}) = c_3^{k/2},$$

et de même, d'après l'expression (2.24) donnant l'expression de l'opérateur $\breve{d}_n^{-1}$, on a

$$\partial_r\zeta_3^{k/2}\big|_{\partial S_0} + \sum_{\ell=1}^{k} \delta_n^{\ell/2}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-\ell)/2}) + \partial_T\breve{Z}_3^{(k+2)/2}\big|_{T=0} + \sum_{\ell=-1}^{k} \breve{d}_n^{\ell/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k-\ell)/2}) = c_n^{k/2}.$$

Remarquons que les deux dernières équations permettent de déterminer les termes $\breve{Z}_3^{(k+1)/2}\big|_{T=0}$ et $\partial_T\breve{Z}_3^{(k+2)/2}\big|_{T=0}$ en fonction de termes d'ordres inférieurs en k. D'autre part, ces deux termes correspondent aux conditions aux limites que l'on peut imposer lors de la résolution de l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^0$. En effectuant alors des changements d'indices dans les équations précédentes, et en regroupant les termes en fonction des propriétés des opérateurs, on voit que les séries formelle $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ sont solutions du problème réduit effectif si on a, pour tout $k \geq 0$, les équations :

$$\begin{aligned}
\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^{k/2}) &= -\textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{\ell/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k-\ell)/2}) \quad \text{dans} \quad \breve{S},\\
\breve{Z}_3^{k/2}\big|_{T=0} &= c_3^{(k-1)/2} - \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \breve{d}_3^{(\ell-1)/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k-\ell)/2})\\
&\quad -\zeta_3^{(k-1)/2}\big|_{\partial S_0} - \textstyle\sum_{\ell=1}^{k-1} \delta_3^{\ell/2}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-1-\ell)/2}),\\
\partial_T \breve{Z}_3^{k/2}\big|_{T=0} &= c_n^{(k-2)/2} - \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \breve{d}_n^{(\ell-2)/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k-\ell)/2})\\
&\quad -\partial_r\zeta_3^{(k-2)/2}\big|_{\partial S_0} - \textstyle\sum_{\ell=1}^{k-2} \delta_n^{\ell/2}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-2-\ell)/2}),
\end{aligned} \tag{2.32}$$

ainsi que les équations suivantes, en rappelant que $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{M}$, l'opérateur de membrane (voir la définition 3.1 du chapitre III)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^{k/2}) &= -\textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \boldsymbol{A}^{\ell/2}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-\ell)/2}) + \boldsymbol{g}^{k/2} \quad \text{dans} \quad S_0,\\
\zeta_r^{k/2}\big|_{\partial S_0} &= c_r^{k/2} - \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \delta_r^{\ell/2}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-\ell)/2}) - \breve{Z}_T^{k/2}\big|_{T=0} - \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \breve{d}_T^{\ell/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k-\ell)/2})\big|_{\partial S_0},\\
\zeta_s^{k/2}\big|_{\partial S_0} &= c_s^{k/2} - \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \delta_s^{\ell/2}(\boldsymbol{\zeta}^{(k-\ell)/2}) - \breve{Z}_s^{k/2}\big|_{T=0} - \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \breve{d}_s^{\ell/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{(k-\ell)/2})\big|_{\partial S_0},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

avec la convention que les termes $\boldsymbol{c}^{\ell/2}$, $\boldsymbol{\zeta}^{\ell/2}$ et $\boldsymbol{Z}^{\ell/2}$ sont nuls pour $\ell \leq 0$.

Comme dans la démonstration du théorème 2.1 du chapitre V, l'existence des termes se montre par récurrence, en utilisant les théorèmes 1.5 et 1.7 du chapitre V.

Pour $k = 0$, les équations (2.32) et (2.33) sont identiques aux équations (2.13) du chapitre V, et s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned}
\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^0) &= 0 \quad \text{dans} \quad \breve{S},\\
\breve{Z}_3^0\big|_{T=0} &= 0,\\
\partial_T\breve{Z}_3^0\big|_{T=0} &= 0,
\end{aligned}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{aligned}
\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^0) &= \boldsymbol{g}^0 \quad \text{dans} \quad S_0,\\
\zeta_r^0\big|_{\partial S_0} &= c_r^0 - \breve{Z}_T^0\big|_{T=0},\\
\zeta_s^0\big|_{\partial S_0} &= c_s^0 - \breve{Z}_s^0\big|_{T=0}.
\end{aligned}\right.$$

Compte tenu de ce que $c_r^0 = c_s^0 = 0$, on donc peut prendre $\breve{\boldsymbol{Z}}^0 = 0$ et $\boldsymbol{\zeta}^0 \in \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$ solution du système

$$\left\{\begin{aligned}
&\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^0) = \boldsymbol{g}^0 \quad \text{dans} \quad S_0,\\
&\zeta_r\big|_{\partial S_0} = \zeta_s\big|_{\partial S_0} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Ceci montre donc l'existence des termes $\boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ et $\breve{\boldsymbol{Z}}^{k/2}$ pour $k = 0$.

Soit alors $k \geq 1$, et supposons alors les termes $\boldsymbol{\zeta}^{\ell/2}$ et $\breve{\boldsymbol{Z}}^{\ell/2}$ construits pour $\ell = 0, \ldots, k-1$ satisfaisant les équations (2.32) et (2.33) jusqu'à l'ordre $k-1$ inclus.

Si on considère l'équation (2.32) à l'ordre k, alors les seconds membres sont tous déterminés. En particulier, grâce aux propriétés des opérateurs $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\ell/2}$, le second membre à l'intérieur est un élément de l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{T}}(\mathbb{R}^+)\big)$. Le théorème 1.7

du chapitre V montre l'existence d'un terme $\breve{\boldsymbol{Z}}^{k/2} \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$ satisfaisant l'équation (2.32) à l'ordre k.

Le second membre de l'équation (2.33) écrite à l'ordre k est alors déterminé, et le théorème 1.5 du chapitre V montre l'existence d'un terme $\boldsymbol{\zeta}^{k/2} \in \Gamma(T_1 S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$ satisfaisant cette équation. Ceci termine la récurrence.

L'existence de la série formelle $\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}]$ implique alors l'existence de la série formelle $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$, et on en déduit ainsi le théorème. ■

Remarquons que le fait que $\breve{\boldsymbol{Z}}^0 = 0$ implique que le premier terme de la série formelle $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ s'écrit

$$\boldsymbol{Z}^0 = (0, 0, Z_3^0).$$

D'autre part, les trois composantes du premier terme $\boldsymbol{\zeta}^0$ sont non nulles en général, et on a $\zeta_r^0\big|_{\partial S_0} = \zeta_s^0\big|_{\partial S_0} = 0$.

Dans la section suivante, on analyse les premiers termes des séries $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$, et on les compare à ceux des séries analogues construites dans le chapitre V lors de l'étude des modèles 2D admissibles. Ceci permettra de comparer le développement asymptotique du déplacement 3D avec le développement asymptotique de la solution d'un modèle 2D admissible.

2.4 Comparaison avec les modèles 2D admissibles

Dans le chapitre V, l'étude du développement asymptotique de la solution des modèles 2D admissibles avait conduit à l'étude du problème en séries formelles

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] & = & \boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] & = & \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S_0} + \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S_0} & = & \boldsymbol{c}[\varepsilon^{1/2}], \\ \partial_r\zeta_3[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S_0} + \partial_r Z_3[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S_0} & = & c_n[\varepsilon^{1/2}]. \end{array}\right.$$

(voir l'équation (2.10) du chapitre V) faisant intervenir la série formelle $\boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2\boldsymbol{F}$ et la série formelle $\boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}]$ à coefficients opérateurs sur la variété $\breve{S}$, et pour des seconds membres donnés $\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}]$, $\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]$, $\boldsymbol{c}[\varepsilon^{1/2}]$ et $c_n[\varepsilon^{1/2}]$ dans les espaces de seconds membres correspondants. Compte tenu des expressions $\vec{\boldsymbol{\delta}}^0\boldsymbol{\zeta} =$

$(\zeta_r, \zeta_s, \zeta_3, \partial_r\zeta_3)\big|_{\partial S_0}$ et

$$\left\{\begin{array}{rcl} d_T^0\boldsymbol{Z} &=& Z_T\big|_{T=0}\,, \\ d_s^0\boldsymbol{Z} &=& Z_s\big|_{T=0}\,, \\ d_3^0\boldsymbol{Z} &=& Z_3\big|_{T=0}\,, \\ d_n^{-1/2}\boldsymbol{Z} &=& \partial_T Z_3\big|_{T=0}\,, \end{array}\right. \tag{2.34}$$

ce problème s'écrit encore de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] &=& \boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] &=& \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}], \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}^0\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + (d_T^0, d_s^0, d_3^0, \varepsilon^{-1/2}d_n^{-1/2})\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] &=& \big(\boldsymbol{c}[\varepsilon^{1/2}], c_n[\varepsilon^{1/2}]\big). \end{array}\right.$$

L'opérateur $(d_T^0, d_s^0, d_3^0, \varepsilon^{-1/2}d_n^{-1/2})$ correspond aux premiers termes non nuls composantes par composantes de la série formelle $\vec{\boldsymbol{d}}[\varepsilon^{1/2}]$ (voir les équations (2.17) et (2.18)). D'autre part, la série formelle $\boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}]$ correspond à une partie des premiers termes de la série formelle $\boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}]$: on a

$$\boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}] - \boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon^2\overline{\boldsymbol{A}}^2 + \cdots$$

avec un contrôle des ordres de l'opérateur $\overline{\boldsymbol{A}}^2$ (voir la définition 2.2 du chapitre IV). L'objet de la proposition suivante est de donner les différences entre les séries formelles données par le théorème 2.10 et celles données par le théorème 2.1 du chapitre V lors de l'étude des modèles 2D admissibles pour le second membre issu du problème tridimensionnel.

Proposition 2.11 *Soit $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ un modèle* 2D *admissible (voir la définition* 2.2 *du chapitre* IV*). Soient d'autre part $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ et $\big(\boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}]\big)$ les solutions respectives des équations*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] &=& \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] &=& 0, \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + \vec{\boldsymbol{d}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] &=& \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \end{array}\right. \tag{2.35}$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}] &=& \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}] &=& 0, \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}^0\,\boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}] + (d_T^0, d_s^0, d_3^0, \varepsilon^{-1/2}d_n^{-1/2})\boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}] &=& \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \end{array}\right. \tag{2.36}$$

fournies par le théorème 2.10 *et le théorème* 2.1 *du chapitre* V*. Alors on a :*

$$\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] - \boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon\, \boldsymbol{e}^1 + \sum_{k\geq 3} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{e}^{k/2},$$

et

$$\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] - \boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}] = (0, \varepsilon^{1/2} E_3^{1/2}) + \sum_{k\geq 2} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{E}^{k/2}$$

où les termes $\mathbf{e}^{k/2}$ *désignent des générateurs* 2D *et* $\boldsymbol{E}^{k/2}$ *des éléments de l'espace* $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$ *.*

Preuve. Rappelons qu'on note

$$\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}] \quad \text{et} \quad \vec{\boldsymbol{c}}[\varepsilon^{1/2}] = \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}].$$

On a alors $\vec{\boldsymbol{c}}^0 = 0$, et compte tenu du fait que les séries formelle $\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}]$, $\vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]$ ne comportent que des termes pairs en puissances de $\varepsilon^{1/2}$, on a aussi $\vec{\boldsymbol{c}}^{1/2} = 0$ et $\boldsymbol{g}^{1/2} = 0$. Pour la même raison, l'opérateur $\vec{\boldsymbol{\delta}}^{1/2}$ est l'opérateur nul.

D'après la démonstration du théorème 2.1 du chapitre V et celle du théorème précédent, les deux développements en séries formelles ont pour premiers termes communs $\breve{\boldsymbol{Z}}^0 = 0$ et $\boldsymbol{\zeta}^0$ solution du système

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^0) = \boldsymbol{G}^0 \boldsymbol{f}^0 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-1}^{1} \boldsymbol{f}^0 \mathrm{d}x_3 \quad \text{dans} \quad S_0, \\ \zeta_r \big|_{\partial S_0} = \zeta_s \big|_{\partial S_0} = 0. \end{cases}$$

Pour $k = 1$, les équations (2.32) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}) &= 0 \quad \text{dans} \quad \breve{S}, \\ \breve{Z}_3^{1/2} \big|_{T=0} &= -\zeta_3^0 \big|_{\partial S_0}, \\ \partial_T \breve{Z}_3^{1/2} \big|_{T=0} &= 0, \end{aligned}$$

et on vérifie, compte tenu de la relation $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0 = \breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^0$, que ce système est identique au premier système de l'équation (2.14) du chapitre V avec des seconds membres $\breve{\boldsymbol{G}}^0 = 0$ et $c_3^0 = 0$.

On en déduit que le terme $\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}$ solution du système précédent est commun dans les deux développements solutions des équations (2.35) et (2.36).

Les équations (2.33) s'écrivent alors, compte tenu de ce que $\boldsymbol{g}^{1/2} = 0$, $\vec{\boldsymbol{c}}^{1/2} = 0$, et du fait que $\vec{\boldsymbol{\delta}}^{1/2}$ est l'opérateur nul,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^{1/2}) &= 0 \quad \text{dans} \quad S_0, \\ \zeta_r^{1/2} \big|_{\partial S_0} &= -\breve{Z}_T^{1/2} \big|_{T=0}, \\ \zeta_s^{1/2} \big|_{\partial S_0} &= -\breve{Z}_s^{1/2} \big|_{T=0}, \end{aligned}$$

et on vérifie que les équations (2.12) du chapitre V pour $k = 1$ sont identiques. On en déduit que le terme $\boldsymbol{\zeta}^{1/2}$ solution de ce système est commun aux deux développements des séries $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}]$.

Enfin, pour $k = 2$, les équations (2.32) s'écrivent, compte tenu de ce que $\vec{\boldsymbol{c}}^0 = 0$ et de ce que $\vec{\boldsymbol{\delta}}^{1/2}$ est l'opérateur nul,

$$\begin{array}{rcl} \breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^1) & = & -\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{1/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}), \\ \breve{Z}_3^1\big|_{T=0} & = & -\breve{d}_3^0(\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}) - \zeta_3^{1/2}\big|_{\partial S_0}, \\ \partial_T \breve{Z}_3^1\big|_{T=0} & = & -\breve{d}_n^{-1/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}^{1/2}) - \partial_r \zeta_3^0\big|_{\partial S_0}, \end{array} \tag{2.37}$$

tandis que l'équation (2.11) du chapitre V associé au problème (2.36) s'écrit

$$\begin{array}{rcl} \breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0(\breve{\boldsymbol{Z}}'^1) & = & -\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{1/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}'^{1/2}), \\ \breve{Z}'^1_3\big|_{T=0} & = & -\zeta'^{1/2}_3\big|_{\partial S_0}, \\ \partial_T \breve{Z}'^1_3\big|_{T=0} & = & -\partial_r \zeta'^0_3\big|_{\partial S_0}. \end{array} \tag{2.38}$$

Nous allons maintenant montrer que dans les deux systèmes (2.37) et (2.38), les opérateurs $\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{1/2}$ et $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{1/2}$ sont identiques, l'opérateur $\breve{d}_3^0$ est nul, mais que l'opérateur $\breve{d}_n^{-1/2}$ est non nul. On en déduit ainsi les termes solutions $\breve{\boldsymbol{Z}}^1$ et $\breve{\boldsymbol{Z}}'^1$ diffèrent en général.

1. Commençons par comparer les opérateurs $\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{1/2}$ et $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{1/2}$. Pour cela, rappelons tout d'abord que d'après l'équation (2.34) du chapitre III, on a d'une part la majoration

$$\deg \boldsymbol{A}^3 \leq \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \tag{2.39}$$

et d'autre part, les opérateurs $\boldsymbol{A}^k$ sont d'ordre au plus $k+2$ pour $k \geq 4$.

En utilisant la définition (2.11) de la série formelle $\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}[\varepsilon^{1/2}]$, on voit qu'on a l'égalité suivante, similaire à l'équation (2.6) :

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}], \tag{2.40}$$

où les séries formelles $\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]$ se déduisent des séries formelles $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]$ de l'équation (2.2) par la relation

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = \big(\varepsilon\,\mathcal{A}_\sigma^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\,,\,\varepsilon^{1/2}\mathcal{A}_3^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big), \tag{2.41}$$

où les séries formelles $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}]$ sont reliées par les relations (2.10). Or en utilisant l'équation (2.41) et l'équation (2.2), on voit que pour tout k, on a une relation du type

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}] = \big(\textstyle\sum_{\ell \geq -(k+1)} \varepsilon^{\ell/2} \breve{\mathcal{A}}_\sigma^{k,\ell/2}, \sum_{\ell \geq -(k+2)} \varepsilon^{\ell/2} \breve{\mathcal{A}}_3^{k,\ell/2} \big).$$

On en déduit donc d'après les équations (2.40) et (2.41) que

$$\breve{\mathcal{A}}_\sigma[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \sum_{\ell \geq -(k+1)} \varepsilon^{\ell/2} \breve{\mathcal{A}}_\sigma^{k,\ell/2}$$

d'où

$$\breve{\mathcal{A}}_\sigma[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{(2k+\ell-k-1)/2} \breve{\mathcal{A}}_\sigma^{k,(\ell-k-1)/2}$$

et en définitive

$$\breve{\mathcal{A}}_\sigma[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{n \geq -1} \varepsilon^{n/2} \sum_{k=0}^{n+1} \breve{\mathcal{A}}_\sigma^{k,(n-2k)/2},$$

compte tenu du fait que $\breve{\mathcal{A}}_\sigma^{k,\ell/2} = 0$ pour $\ell \leq -(k+1)$. De même, on trouve pour la composante transverse

$$\breve{\mathcal{A}}_3[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \sum_{\ell \geq -(k+2)} \varepsilon^{\ell/2} \breve{\mathcal{A}}_3^{k,\ell/2}$$

d'où

$$\breve{\mathcal{A}}_3[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{(2k+\ell-k-2)/2} \breve{\mathcal{A}}_3^{k,(\ell-k-2)/2}$$

et donc

$$\breve{\mathcal{A}}_3[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{n \geq -2} \varepsilon^{n/2} \sum_{k=0}^{n+2} \breve{\mathcal{A}}_3^{k,(n-2k)/2}.$$

On en déduit donc que

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{n \geq -2} \varepsilon^{n/2} \breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{k/2},$$

avec

$$\breve{\mathcal{A}}_\sigma^{n/2} = \sum_{k=0}^{n+1} \breve{\mathcal{A}}_\sigma^{k,(n-2k)/2} \quad \text{et} \quad \breve{\mathcal{A}}_3^{n/2} = \sum_{k=0}^{n+2} \breve{\mathcal{A}}_3^{k,(n-2k)/2}.$$

En particulier, on trouve

$$\breve{\mathcal{A}}_\sigma^{1/2} = \breve{\mathcal{A}}_\sigma^{0,1/2} + \breve{\mathcal{A}}_\sigma^{1,-1/2} + \breve{\mathcal{A}}_\sigma^{2,-3/2} \tag{2.42}$$

et

$$\breve{\mathcal{A}}_3^{1/2} = \breve{\mathcal{A}}_3^{0,1/2} + \breve{\mathcal{A}}_3^{1,-1/2} + \breve{\mathcal{A}}_3^{2,-3/2} + \breve{\mathcal{A}}_3^{3,-5/2}. \tag{2.43}$$

De même, dans le calcul de l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{1/2}$, on trouve

$$\breve{\mathcal{K}}_\sigma^{1/2} = \breve{\mathcal{M}}_\sigma^{1/2} + \breve{\mathcal{F}}_\sigma^{-3/2} \tag{2.44}$$

et

$$\breve{\mathcal{K}}_3^{1/2} = \breve{\mathcal{M}}_3^{1/2} + + \breve{\mathcal{F}}_3^{-3/2}, \tag{2.45}$$

où l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}$ est défini par la relation, analogue à (2.41) :

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = \big(\varepsilon\,\mathcal{M}_\sigma[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\,,\,\varepsilon^{1/2}\mathcal{M}_3[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big),$$

avec $\boldsymbol{\mathcal{M}}[\varepsilon^{1/2}]$ la série formelle issue de l'opérateur de membrane $\boldsymbol{M}$ après le changement de variable $(r,s)\mapsto(T,s)$. De même, l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}$ est défini par l'équation

$$\breve{\boldsymbol{\mathcal{F}}}[\varepsilon^{1/2}]\,\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = \big(\varepsilon\,\mathcal{F}_\sigma[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\,,\,\varepsilon^{1/2}\mathcal{F}_3[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big),$$

avec $\boldsymbol{\mathcal{F}}[\varepsilon^{1/2}]$ la série formelle issue de l'opérateur de flexion $\boldsymbol{F}$ après le changement de variable $(r,s)\mapsto(T,s)$.

Les équations (2.42) et (2.43) montrent que pour $k\geq 4$, les opérateurs $\boldsymbol{A}^k$ n'interviennent pas dans le calcul de l'expression de l'opérateur $\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{1/2}$. D'autre part, l'équation (2.40) et la majoration (2.39), en particulier le fait que la partie agissant sur z_3 de l'opérateur A_3^3 ne soit que d'ordre 4 et pas d'ordre 5, montrent qu'on a

$$\breve{\mathcal{A}}_3^{3,-5/2} = 0.$$

L'opérateur $\boldsymbol{A}^1$ étant nul, on a

$$\breve{\mathcal{A}}_\sigma^{1,-1/2} = 0 \quad \text{et} \quad \breve{\mathcal{A}}_3^{1,-1/2} = 0.$$

L'opérateur $\boldsymbol{A}^0$ est l'opérateur de membrane $\boldsymbol{M}$, et donc on a

$$\breve{\mathcal{A}}_\sigma^{0,1/2} = \breve{\mathcal{M}}_\sigma^{1/2} \quad \text{et} \quad \breve{\mathcal{A}}_3^{0,1/2} = \breve{\mathcal{M}}_3^{1/2}.$$

Enfin, puisqu'on a

$$\deg \boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

on vérifie que seules les parties qui sont d'ordres 3 et 4 en z_3 dans la composante transverse interviennent dans le calcul des opérateur $\breve{\mathcal{A}}_\sigma^{2,-3/2}$ et $\breve{\mathcal{A}}_3^{2,-3/2}$. Or ces parties sont communes à l'opérateur $\boldsymbol{A}^2$ et à tous les opérateurs de flexion $\boldsymbol{F}$. On en déduit donc (voir l'équation (3.18) du chapitre V) qu'on a

$$\left\{\begin{array}{lllll} \breve{\mathcal{A}}_T^{3,-3/2}\breve{\boldsymbol{Z}} & = & \breve{\mathcal{F}}_T^{-3/2}\breve{\boldsymbol{Z}} & = & 0, \\ \breve{\mathcal{A}}_s^{3,-3/2}\breve{\boldsymbol{Z}} & = & \breve{\mathcal{F}}_s^{-3/2}\breve{\boldsymbol{Z}} & = & 0, \\ \breve{\mathcal{A}}_3^{3,-3/2}\breve{\boldsymbol{Z}} & = & \breve{\mathcal{F}}_3^{-3/2}\breve{\boldsymbol{Z}} & = & \dfrac{2}{3}\widetilde{\lambda}\,\Gamma_{ss}^r(0,s)\,\partial_{TTT}\breve{Z}_3, \end{array}\right.$$

En définitive, les équations (2.42), (2.43), (2.44) et (2.45) montrent qu'on a $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{1/2} = \breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{1/2}$.

2. Calculons maintenant l'opérateur $\breve{d}_3^0$. D'après l'équation (2.21), il suffit de calculer la composante $\breve{\mathcal{D}}_3^0$ de la série formelle opérateur $\breve{\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}}[\varepsilon^{1/2}]$. D'après la définition 2.7 et l'équation (2.20), on peut écrire la série formelle $\breve{\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}}[\varepsilon^{1/2}]$ sous la forme

$$\breve{\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \breve{\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}], \tag{2.46}$$

où les séries formelles $\breve{\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]$ se déduisent des séries formelles $\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]$ figurant dans l'équation (2.15) par la formule (voir l'équation (2.20)) :

$$\breve{\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}] = \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}], \tag{2.47}$$

avec les séries formelles $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\breve{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}]$ liées par l'équation (2.10). Rappelons que d'après l'équation (2.16), on a $D_3^0\boldsymbol{z} = z_3$. Les équations (1.16) et (1.32) et la définition des opérateurs $\vec{\boldsymbol{D}}^k$ montrent d'autre part que $D_3^1\boldsymbol{z} = 0$. De plus, pour $k \geq 2$ les opérateurs D_3^k sont d'ordres de dérivation au plus k en r. Similairement à l'équation (2.15), on voit donc que pour tout $k \geq 2$, on a

$$\breve{\mathcal{D}}_3^{(k)}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{\ell\geq -(k+1)} \varepsilon^{\ell/2}\breve{\mathcal{D}}_3^{k,\ell/2}.$$

Un calcul semblable aux calculs précédents montre alors que

$$\breve{\mathcal{D}}_3[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{n\geq -1} \varepsilon^{n/2}\breve{\mathcal{D}}_3^{n/2}$$

avec pour tout $n \geq -1$,

$$\breve{\mathcal{D}}_3^{n/2} = \sum_{k=0}^{n+1} \breve{\mathcal{D}}_3^{k,(n-2k)/2}.$$

On en déduit donc que

$$\breve{\mathcal{D}}_3^0 = \breve{\mathcal{D}}_3^{0,0} + \breve{\mathcal{D}}_3^{1,-1/2}.$$

L'opérateur D_3^1 étant l'opérateur nul, on en déduit que $\breve{\mathcal{D}}_3^{1,-1/2} = 0$. Enfin, on a aussi $\breve{\mathcal{D}}_3^{0,0} = 0$, compte tenu du fait que

$$\breve{\mathcal{D}}_3^{(0)}[\varepsilon^{1/2}]\breve{\boldsymbol{Z}} = \sum_{\ell\geq -1} \varepsilon^{\ell}\breve{\mathcal{D}}_3^{0,\ell/2}\breve{\boldsymbol{Z}} = \varepsilon^{-1/2}\breve{Z}_3.$$

En définitive, on trouve que $\breve{\mathcal{D}}_3^0$ est l'opérateur nul, et donc que $\breve{d}_3^0$ est aussi l'opérateur nul.

3. Enfin, on calcule l'opérateur $\breve{d}_n^{-1/2}$, soit encore d'après l'équation (2.21) l'opérateur $\breve{\mathcal{D}}_n^{-1/2}$. Rappelons que les opérateurs D_n^k sont de degrés au plus $k+1$ en r, et donc qu'on a l'équation

$$\breve{\mathcal{D}}_n^{(k)}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{\ell \geq -(k+2)} \varepsilon^{\ell/2} \breve{\mathcal{D}}_n^{k,\ell/2}.$$

Un calcul similaire aux calculs précédents montre alors que

$$\breve{\mathcal{D}}_n[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{\ell \geq -2} \varepsilon^{\ell/2} \breve{\mathcal{D}}_3^{\ell/2}$$

avec pour tout $\ell \geq -2$,

$$\breve{\mathcal{D}}_n^{\ell/2} = \sum_{k=0}^{\ell+2} \breve{\mathcal{D}}_3^{k,(\ell-2k)/2}.$$

On en déduit donc que

$$\breve{\mathcal{D}}_n^{-1/2} = \breve{\mathcal{D}}_n^{0,-1/2} + \breve{\mathcal{D}}_n^{1,-3/2}.$$

Or il est clair que $\breve{\mathcal{D}}_n^{0,-1/2} = 0$ compte tenu de l'expression $D_n^0 \boldsymbol{z} = \partial_r z_3$. Il suffit donc de calculer l'opérateur $\breve{\mathcal{D}}_n^{1,-3/2}$.

Pour cela, il suffit de connaître dans l'expression de l'opérateur $\mathfrak{d}_n^2$ (voir l'équation (1.32)) les termes comportant deux dérivées en r agissant sur la variable z_3.

Or on va montrer l'équation suivante, pour $\boldsymbol{z}$ un générateur 2D :

$$\mathfrak{d}_n^2 \boldsymbol{z} = \big(c_2 \partial_{rr} z_3 + P\boldsymbol{z} \big)\big|_{\partial S_0}, \tag{2.48}$$

où c_2 est une constante non nulle ne dépendant que de λ et μ, et P est un opérateur 2D à valeurs dans $\mathscr{C}^\infty(S_0)$ tel que dans le système de coordonnées (r,s), on ait

$$P\boldsymbol{z} = P^r z_r + P^s z_s + P^3 z_3,$$

où P^r et P^s sont des opérateurs 2D scalaires d'ordre 2 agissant sur z_r et z_s respectivement, et où

$$P^3 z_3 = p_1^3(r,s)\partial_{rs} z_3 + p_2^3(r,s)\partial_{ss} z_3 + Q^3 z_3,$$

avec Q^3 un opérateur d'ordre 1 agissant sur z_3 et p_1^3 et p_2^3 des fonctions des variables (r,s).

L'équation (2.48), la définition 2.5 et l'équation (2.47) montrent, après changement de variable, que

$$\breve{\mathcal{D}}_n^{(1)}[\varepsilon^{1/2}](\breve{\boldsymbol{Z}}) = \varepsilon^{-3/2} c_2 \partial_{TT} \breve{Z}_3 + \sum_{\ell \geq -2} \varepsilon^{\ell/2} \breve{\mathcal{D}}_n^{1,\ell/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}).$$

On en déduit donc que

$$\breve{\mathcal{D}}_n^{1,-3/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}) = c_2 \partial_{TT} \breve{Z}_3.$$

Finalement, on trouve

$$\breve{d}_n^{-1/2}(\breve{\boldsymbol{Z}}) = c_2 \partial_{TT} \breve{Z}_3 \big|_{T=0}.$$

En particulier, l'opérateur $\breve{d}_n^{-1/2}$ est non nul, et les deux systèmes (2.37) et (2.38) sont donc distincts.

Ainsi, dans les deux séries formelles $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}]$, les termes $\breve{\boldsymbol{Z}}^1$ et $\breve{\boldsymbol{Z}}'^1$ diffèrent, et ceci implique que les termes $\boldsymbol{\zeta}^1$ et $\boldsymbol{\zeta}'^1$ sont aussi distincts. Ceci termine la preuve de la proposition. ∎

Preuve de (2.48). D'après la démonstration du théorème 1.4, les opérateurs $\boldsymbol{\Psi}^2$ et $\vec{\mathfrak{d}}^2$ sont tels que si $\boldsymbol{z}$ est un générateur 2D, $\boldsymbol{\psi} := \boldsymbol{\Psi}^2\boldsymbol{z} - \vec{\mathfrak{d}}^2\boldsymbol{z}$ est l'unique solution du problème

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}^0\boldsymbol{\psi} & = & -\mathscr{L}^1\boldsymbol{\Psi}^1\boldsymbol{z} \quad \text{dans} \quad \partial S_0 \times \Sigma^+, \\ \mathscr{B}^0\boldsymbol{\psi} & = & -\mathscr{B}^1\boldsymbol{\Psi}^1\boldsymbol{z} \quad \text{sur} \quad \partial S_0 \times \gamma_+ \times \gamma_-, \\ \boldsymbol{\psi}\big|_{R=0} + \boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z}\big|_{\Gamma_0} & = & 0, \end{array}\right.$$

telle que $\boldsymbol{\Psi}^2\boldsymbol{z} \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{H}(\Sigma^+)\big)$ et $\vec{\mathfrak{d}}^2\boldsymbol{z} \in \mathfrak{Z}$ (voir l'équation (1.14)). Rappelons que l'opérateur $\boldsymbol{V}^2$ est donné par l'équation

$$\boldsymbol{V}^2(\boldsymbol{z}) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_3^2}{2} p\mathrm{D}_\sigma\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}), \\ \dfrac{x_3^2}{2}\Big(p\kappa_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) + \dfrac{p}{2\mu}M_3(\boldsymbol{z})\Big), \end{array}\right.$$

pour tout générateur 2D. Comme dans la démonstration du lemme 1.8, on décompose alors la solution $\boldsymbol{\psi}$ du système précédent en la solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}^0\boldsymbol{\psi} & = & -\mathscr{L}^1\boldsymbol{\Psi}^1\boldsymbol{z} \quad \text{dans} \quad \partial S_0 \times \Sigma^+, \\ \mathscr{B}^0\boldsymbol{\psi} & = & -\mathscr{B}^1\boldsymbol{\Psi}^1\boldsymbol{z} \quad \text{sur} \quad \partial S_0 \times \gamma_+ \times \gamma_-, \\ \boldsymbol{\psi}\big|_{R=0} & = & 0, \end{array}\right. \tag{2.49}$$

et la solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}^0\boldsymbol{\psi} & = & 0 \quad \text{dans} \quad \partial S_0 \times \Sigma^+, \\ \mathscr{B}^0\boldsymbol{\psi} & = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial S_0 \times \gamma_+ \times \gamma_-, \\ \boldsymbol{\psi}\big|_{R=0} + \boldsymbol{V}^2\boldsymbol{z}\big|_{\Gamma_0} & = & 0. \end{array}\right. \tag{2.50}$$

D'après l'expression (1.17) de l'opérateur $\boldsymbol{\Psi}^1$, le second membre du système (2.49) est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{K}(\Sigma^+)\big)$ dont les coefficients sont des traces sur ∂S_0 d'opérateurs 2D à valeurs dans l'espace des fonctions sur S_0, et de degrés de dérivations au plus 2 en z_σ et 1 en z_3. On en déduit que les parties des opérateurs $\boldsymbol{\Psi}^2$ et $\vec{\mathfrak{d}}^2$ ainsi construites n'interviennent que pour former l'opérateur P de l'équation (2.48).

De même, la solution du système (2.50) se décompose en somme de solutions de systèmes dont les seconds membres n'ont qu'une seule composante non nulle, polynomiale en x_3. La forme de l'opérateur $\boldsymbol{V}^2$ montre que dans le système de coordonnées (r,s), seul $V_3^2\boldsymbol{z}$ contient des dérivées d'ordres 2 en z_3. Les composantes $V_r^2\boldsymbol{z}$ et $V_s^2\boldsymbol{z}$ n'interviennent donc dans l'expression de $\mathfrak{d}_n^2$ qu'à travers l'opérateur P. Dans le système de coordonnées (r,s), on a

$$V_3^2\boldsymbol{z} = \frac{x_3^2}{2}p\partial_{rr}z_3 + \mathrm{Op}(\boldsymbol{z})$$

où $\mathrm{Op}(\boldsymbol{z})$ désigne un opérateur de degré 2 ne comprenant que des dérivées d'ordre 1 en r sur l'inconnue z_3. Comme précédemment (voir la démonstration de la proposition 1.7), on cherche la solution d'un système du type (2.50) avec un second membre polynomial, et on utilise la décomposition de l'opérateur $(\mathscr{L}^0,\mathscr{B}^0)$ en les opérateurs $(\mathscr{L}_s^0,\mathscr{B}_s^0)$ et $(\mathscr{L}_R^0,\mathscr{L}_3^0,\mathscr{B}_R^0,\mathscr{B}_3^0)$. On montre alors (voir la section 6.1 de [19]) qu'il existe $(\overline{\varphi}_R^2,\overline{\varphi}_3^2)\in\mathfrak{H}(\Sigma^+)^2$ et deux constantes c et c' telles que

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\mathscr{L}_R^0,\mathscr{L}_3^0)(\overline{\varphi}_R^2,\overline{\varphi}_3^2) &=& 0 \quad \text{dans} \quad \Sigma^+,\\ (\mathscr{B}_R^0,\mathscr{B}_3^0)(\overline{\varphi}_R^2,\overline{\varphi}_3^2) &=& 0 \quad \text{sur} \quad \gamma_+\times\gamma_-,\\ \overline{\varphi}_R^1\big|_{R=0} + c\,x_3 &=& 0,\\ \overline{\varphi}_3^1\big|_{R=0} - c' &=& x_3^2. \end{array}\right. \tag{2.51}$$

Les coefficients c et c' sont les coefficients devant les déplacements rigides $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^4$ et $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^3$ (voir [19]). Pour des raisons de parités en x_3, le coefficient devant le déplacement $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^1$ est nul, et le déplacement $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^2$ n'intervient pas, car son unique composante non nulle est la composante s. On peut alors montrer que le coefficient c' est non nul (voir le lemme 6.1 dans [19]).

On peut donc construire la partie de la solution $\boldsymbol{\psi}$ du problème (2.50) dépendant du terme $p\partial_{rr}z_3$ dans l'opérateur $\boldsymbol{V}^2$ en multipliant la solution du problème (2.51) par $-\frac{1}{2}p\partial_{rr}z_3$. On en déduit donc que $\mathfrak{d}_n^4\boldsymbol{z} = -\frac{1}{2}c'p\partial_{rr}z_3 + P\boldsymbol{z}$, où P vérifie les conditions de l'énoncé. On obtient ainsi le résultat en posant $c_2 = -\frac{1}{2}c'p \neq 0$. ∎

D'après la démonstration de la proposition précédente, en rappelant que l'on note

$$\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}] \quad \text{et} \quad \vec{\boldsymbol{c}}[\varepsilon^{1/2}] = \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}]$$

les séries formelles du second membre, seuls les termes $\boldsymbol{g}^0$, $\boldsymbol{g}^{1/2}$, $\vec{\boldsymbol{c}}^0$ et $\vec{\boldsymbol{c}}^{1/2}$ entrent en compte dans le calcul des termes $\boldsymbol{\zeta}^0$, $\boldsymbol{\zeta}^{1/2}$ et $\boldsymbol{Z}^{1/2}$ communs aux deux séries formelles de la proposition. Puisque $\boldsymbol{g}^{1/2}=0$ et $\vec{\boldsymbol{c}}^0=\vec{\boldsymbol{c}}^{1/2}=0$, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.12 *Soit $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ un modèle 2D admissible (voir la définition 2.2 du chapitre IV). Soient d'autre part $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}],\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ et $\big(\boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}],\boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}]\big)$ les solu-*

tions respectives des équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] &=& \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] &=& 0, \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + \vec{\boldsymbol{d}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] &=& \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \end{array}\right. \tag{2.52}$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}] &=& \boldsymbol{G}^0\boldsymbol{f}^0, \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}] &=& 0, \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}^0\,\boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}] + (d_T^0, d_s^0, d_3^0, \varepsilon^{-1/2}d_n^{-1/2})\boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}] &=& 0, \end{array}\right. \tag{2.53}$$

fournies par le théorème 2.10 *et le théorème* 2.1 *du chapitre* V*. Alors on a :*

$$\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] - \boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon\,\boldsymbol{e}^1 + \sum_{k\geq 3}\varepsilon^{k/2}\boldsymbol{e}^{k/2},$$

et

$$\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] - \boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}] = (0, \varepsilon^{1/2}E_3^{1/2}) + \sum_{k\geq 2}\varepsilon^{k/2}\boldsymbol{E}^{k/2}$$

où les termes $\mathbf{e}^{k/2}$ *désignent des générateurs* 2D *et* $\boldsymbol{E}^{k/2}$ *des éléments de l'espace* $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$.

L'intérêt de ce corollaire réside dans le fait que le problème en série formelle (2.53) est précisément celui qui intervient lors de l'étude du développement asymptotique de la solution d'un modèle 2D admissible avec le second membre le plus naturel provenant des équations tridimensionnelles. Le problème s'écrit alors : trouver $\boldsymbol{z}(\varepsilon) \in \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{K}(\varepsilon)\boldsymbol{z}(\varepsilon) &=& \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{f}^0\,\mathrm{d}x_3, \\ \boldsymbol{\delta}^0\boldsymbol{z}(\varepsilon) &=& 0, \end{array}\right.$$

où $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ est un modèle 2D admissible (voir le chapitre IV). Ce second membre est en fait constitué des premiers termes des séries formelles apparaissant dans n'importe quelle réduction admissible (voir le chapitre III). Ce second membre se retrouve dans tous les travaux classiques (voir en particulier [35, 34, 41, 9]), et fait partie intégrante de la modélisation bidimensionnelle des coques minces.

Remarque 2.13 Les mêmes résultats sont vrais pour le modèle 2D en carte (voir la définition 2.8 du chapitre IV), mais cette fois, les opérateurs $\breve{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{1/2}$ et $\breve{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{1/2}$ ne sont plus égaux. ■

On peut améliorer la performance d'un modèle 2D admissible en introduisant des termes au bord qui permettent de prendre en compte le terme $\breve{d}_n^{-1/2}$. Néanmoins, la constante c_2 n'est pas donnée de manière explicite, et il est nécessaire de calculer la solution du problème (2.51) pour la trouver. Cette constante apparaît dans le calcul des valeurs propres sur une plaque mince, et des investigations numériques sont en cours pour en tenir compte. En particulier, le calcul numérique de la constante c_2 , c'est-à-dire la résolution du problème (2.51) sur la demi-bande, permet de mettre en évidence les termes d'ordres 2 en ε dans une asymptotique des valeurs propres sur une poutre mince.

2.5 Factorisations possibles

Dans cette section, on étudie d'autres manières d'obtenir le résultat du théorème 2.10. Elles consistent à factoriser les équations en séries formelles constituant le problème réduit théorique pour se ramener à des problèmes plus simples à l'intérieur ou au bord. Les démonstrations des résultats qui suivent ne sont pas détaillées, car elles utilisent en général les mêmes ingrédients que ceux déjà utilisés dans les sous-sections précédentes (contrôles des ordres des opérateurs et actions sur les termes de couches limites 2D).

Le résultat suivant montre qu'on peut effectuer un changement de variable dans le problème réduit (1.35) pour se ramener à des conditions de Dirichlet plus simples au bord :

Lemme 2.14 *Il existe une série formelle inversible* $\boldsymbol{C}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{C}^{k/2}$ *à coefficients* $\boldsymbol{C}^{k/2} : \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0) \to \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)$ *opérateurs* 2D *d'ordres au plus* k *en la variable* r *, telle que* $\boldsymbol{C}^0 = \mathbf{Id}_{2\mathrm{D}}$ *, satisfaisant l'équation*

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}^0 \circ \boldsymbol{C}[\varepsilon^{1/2}] = \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]. \tag{2.54}$$

Preuve. Il suffit de montrer l'existence d'opérateurs $\boldsymbol{C}^{k/2}$ satisfaisant les relations

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}^0 \circ \boldsymbol{C}^{k/2} = \vec{\boldsymbol{\delta}}^{k/2}.$$

Le résultat est alors évident en utilisant des relèvements des opérateurs $\vec{\boldsymbol{\delta}}^k$ respectant les dérivations en r . Remarquons que puisque $\vec{\boldsymbol{\delta}}^{k/2} = 0$ pour k impair, la même formule est valable pour la série formelle $\boldsymbol{C}[\varepsilon^{1/2}]$ qui est donc aussi une série formelle en ε . ∎

Le fait que $\boldsymbol{C}^0 = \mathbf{Id}_{2\mathrm{D}}$ montre que la série formelle $\boldsymbol{C}[\varepsilon^{1/2}]$ est inversible. On peut alors faire le changement de variable

$$\overline{\boldsymbol{z}}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{C}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{z}[\varepsilon^{1/2}]. \tag{2.55}$$

Si $\boldsymbol{z}[\varepsilon^{1/2}]$ est une série formelle à coefficients opérateurs 2D, les équations en séries formelles

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{z}[\varepsilon^{1/2}] &= \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{z}[\varepsilon^{1/2}] &= \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}]\circ\boldsymbol{C}^{-1}[\varepsilon^{1/2}]\,\overline{\boldsymbol{z}}[\varepsilon^{1/2}] &= \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}^0\overline{\boldsymbol{z}}[\varepsilon^{1/2}] &= \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \end{cases}$$

où $\boldsymbol{C}^{-1}[\varepsilon^{1/2}]$ est la série formelle inverse de la série formelle $\boldsymbol{C}[\varepsilon^{1/2}]$, sont alors équivalentes. Le terme $(\boldsymbol{C}^{-1})^{k/2}$ désigne le terme d'ordre $k/2$ dans la série formelle $\boldsymbol{C}^{-1}[\varepsilon^{1/2}]$, et on a alors $(\boldsymbol{C}^{-1})^{k/2} = 0$ pour k impair. On pose alors

$$\overline{\boldsymbol{A}}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}]\circ\boldsymbol{C}^{-1}[\varepsilon^{1/2}].$$

Avec cette définition, et compte tenu du fait que $\boldsymbol{A}^1$ est l'opérateur nul, on a

$$\begin{aligned} &\overline{\boldsymbol{A}}^0 = \boldsymbol{M}, \\ &\overline{\boldsymbol{A}}^1 = \boldsymbol{M}\circ\big(\boldsymbol{C}^{-1}\big)^1, \quad \text{et} \\ &\overline{\boldsymbol{A}}^2 = \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{M}\circ\big(\boldsymbol{C}^{-1}\big)^2. \end{aligned} \tag{2.56}$$

On peut alors contrôler les ordres de dérivations des opérateurs $\overline{\boldsymbol{A}}^k$ grâces aux équations (2.34) du chapitre III.

On peut alors montrer un théorème équivalent au théorème 2.10 pour le problème

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{A}}[\varepsilon^{1/2}]\overline{\boldsymbol{z}}[\varepsilon^{1/2}] &= \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}^0\overline{\boldsymbol{z}}[\varepsilon^{1/2}] &= \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \end{cases}$$

après avoir reformulé ce problème en termes de séries formelles $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ à coefficients respectivement dans les espaces $\Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)$ et $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$.

Le fait de se ramener à un problème simplifié sur le bord peut jouer un rôle important dans la résolution des équations. C'est en particulier le cas lors de l'étude des valeurs propres sur une plaque (voir [16]).

On peut aussi effectuer une factorisation de la série formelle $\boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}]$ par un modèle 2D admissible. En effet, on a le résultat suivant :

Proposition 2.15 *Soit $\boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}]$ la série formelle associée à un modèle* 2D *admissible. Alors il existe une série formelle inversible $\boldsymbol{S}[\varepsilon^{1/2}]$ à coefficients*

$$\boldsymbol{S}^{k/2} : \Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0) \to \Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0),$$

telle que $\boldsymbol{S}^0 = \mathbf{Id}_{\text{2D}}$ *, satisfaisant l'équation*

$$\boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}] \circ \boldsymbol{S}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}] \tag{2.57}$$

dans l'algèbre des séries formelles à coefficients opérateurs 2D *à valeurs dans l'espace des générateurs* 2D*.*

Preuve. Tout d'abord, il est clair qu'on peut prendre $\boldsymbol{S}^{\ell/2} = 0$ pour ℓ un entier impair, car les séries formelles $\boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}]$ sont des séries formelles en ε . On montre alors l'existence des opérateurs $\boldsymbol{S}^k$ par récurrence.

L'équation (2.57) écrite pour $k = 0$ montre qu'on doit avoir $\boldsymbol{M} \circ \boldsymbol{S}^0 = \boldsymbol{M}$, d'où $\boldsymbol{S}^0 = \mathbf{Id}_{\text{2D}}$. On peut prendre pour $\boldsymbol{S}^1$ l'opérateur nul, ce qui implique l'équation (2.57) à l'ordre $k = 1$ en ε . Enfin, pour $k = 2$ en ε , on doit avoir, en notant $\boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{M} + \varepsilon^2 \boldsymbol{F}$,

$$\boldsymbol{M} \circ \boldsymbol{S}^2 + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}^2.$$

On peut alors prendre

$$\boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{F}), \tag{2.58}$$

où $\boldsymbol{M}^{-1}$ est l'inverse de l'opérateur de membrane associé aux conditions aux limites de Dirichlet.

On a alors pour tout $\boldsymbol{z}$ générateur 2D l'équation $\boldsymbol{M} \circ \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}$.

L'existence des opérateurs $\boldsymbol{S}^k$ se montre alors de manière similaire, en utilisant l'opérateur $\boldsymbol{M}^{-1}$. ■

On fait alors le changement de variable

$$\overline{\boldsymbol{z}}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{S}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{z}[\varepsilon^{1/2}],$$

et le problème réduit devient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}]\, \overline{\boldsymbol{z}}[\varepsilon^{1/2}] & = & \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \\ \overline{\vec{\boldsymbol{\delta}}}[\varepsilon^{1/2}]\, \overline{\boldsymbol{z}}[\varepsilon^{1/2}] & = & \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \end{array} \right. \tag{2.59}$$

où $\overline{\vec{\boldsymbol{\delta}}}[\varepsilon^{1/2}] = \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}] \circ \boldsymbol{S}[\varepsilon^{1/2}]$. On peut alors montrer un théorème équivalent au théorème 2.10 pour le problème (2.59). La partie concernant les équations à l'intérieur est alors exactement la même que dans le chapitre V. En revanche, il faut définir l'action de $\overline{\vec{\boldsymbol{\delta}}}[\varepsilon^{1/2}]$ sur des séries formelles à coefficients termes de couches limites 2D, et pour cela, définir l'action de l'opérateur $\boldsymbol{M}^{-1}$ sur les couples $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]\,,\, \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ de séries formelles à coefficients générateurs 2D et termes de couches limites 2D. Ceci fait l'objet du résultat suivant :

Proposition 2.16 *Soit $\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}]$ une série formelle à coefficients générateurs* 2D*, et soit $\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]$ une série formelle à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$. Alors il existe une unique série formelle $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ à coefficients générateurs* 2D*, une unique série formelle $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$, telles que*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{M}\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] & = & \boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{\mathcal{M}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] & = & \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}], \\ \zeta_r[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S_0} + Z_T[\varepsilon^{1/2}]\big|_{T=0} & = & 0, \\ \zeta_s[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\partial S_0} + Z_s[\varepsilon^{1/2}]\big|_{T=0} & = & 0, \end{array}\right.$$

où $\boldsymbol{\mathcal{M}}[\varepsilon^{1/2}]$ est la série formelle issue du changement de variable $(r,s)\mapsto(T,s)$ dans l'opérateur de membrane $\boldsymbol{M}$ suivi du développement de Taylor en $T=0$ des coefficients.

La preuve de cette proposition ne présente pas de difficulté particulière. Il suffit d'étudier les propriétés du premier terme de la série formelle $\boldsymbol{\mathcal{M}}[\varepsilon^{1/2}]$ (après homogénéisation pour que ce premier terme ait toutes ses composantes non nulles).

On montre cependant que si $\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]=0$, alors on a $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]=0$, tandis que si $\boldsymbol{g}[\varepsilon^{1/2}]=0$ mais $\boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\neq 0$, alors $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]\neq 0$. En raffinant un peu la proposition précédente, on peut contrôler les ordres de l'opérateur $\boldsymbol{M}^{-1}$ lors de son action sur les séries formelles à coefficients termes de couches limites 2D, et ainsi contrôler l'action de $\boldsymbol{S}[\varepsilon^{1/2}]$ sur ces séries formelles.

Les deux méthodes précédentes, qui sont des factorisations dans des équations en séries formelles, permettent de ramener le problème réduit à un problème analogue à ceux étudiés dans le chapitre V, au moins dans une des deux équations, soit à l'intérieur, soit au bord. En revanche, on ne peut pas trouver une changement de variable qui ramène l'étude du problème réduit à l'étude d'un problème du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}]\,\overline{\boldsymbol{z}}[\varepsilon^{1/2}] & = & \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}^0\overline{\boldsymbol{z}}[\varepsilon^{1/2}] & = & \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \end{array}\right.$$

dont l'étude découlerait alors directement des résultats du chapitre V.

Néanmoins, on pourrait résoudre le problème réduit en inversant non pas l'opérateur de membrane pour obtenir les termes à l'intérieur, mais directement un modèle 2D admissible $\boldsymbol{K}[\varepsilon^{1/2}]$. Les résultats du chapitre V montrent alors que les solutions intermédiaires ainsi obtenues sont des couples $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]\,,\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$. Le tableau 1 du chapitre V permet de contrôler les termes. Toutefois, cette approche est plus complexe que les précédentes, et nécessite une étude plus poussée des *séries formelles de séries formelles* déjà entrevues dans la sous-section 2.2.

3 Développement complet

Dans cette section, on construit 3 séries formelles :
une série $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{v}^{k/2}$ à coefficients

$$\boldsymbol{v}^{k/2}(x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big),$$

une série $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}] := \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{W}^{k/2}$ à coefficients

$$\boldsymbol{W}^{k/2}(T, s, x_3) \in \mathscr{C}^\infty\big(I \times \partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{T}}(\mathbb{R}^+)\big),$$

et une série $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\Phi}^{k/2}$ à coefficients

$$\boldsymbol{\Phi}^{k/2}(R, s, x_3) \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{H}}(\Sigma^+)\big),$$

satisfaisant à chaque fois les équations en séries formelles obtenues à partir des équations de l'élasticité 3D dans les différents systèmes de coordonnées utilisés, et vérifiant la condition

$$\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\Gamma_0} + \boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{T=0} + \boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{R=0} = 0.$$

Ces trois séries formelles sont construites à partir de la réduction canonique et de la solution du problème réduit effectif fournie par le théorème 2.10. Pour cela, il est nécessaire de définir l'action des séries formelles opérateurs $\boldsymbol{V}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon^{1/2}]$ sur les séries formelles à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(I \times \partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{T}}(\mathbb{R}^+)\big)$ des termes de couches limites 2D. Les séries formelles ainsi construites vérifient des équations faisant intervenir les développements en séries formelles des opérateurs $\boldsymbol{L}(\varepsilon)$ et $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$ dans les variables (T, s, x_3) et (R, s, x_3).

On verra dans la section suivante que ces séries formelles permettent de définir un développement asymptotique de la solution tridimensionnelle $\boldsymbol{w}$ des équations de l'élasticité sur la coque.

3.1 Construction des séries formelles

Rappelons que l'on note

$$\big(\boldsymbol{V}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Q}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\big)$$

la réduction canonique, et

$$\big(\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{\Theta}[\varepsilon^{1/2}], \vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}], \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\big)$$

les séries formelles associées à cette réduction par le théorème 1.4 et la définition 1.9.

Le théorème 2.10 fournit l'existence de séries formelles $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ satisfaisant les équations (2.29). Dans toute la suite, les séries formelles $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ désignent donc les solutions fournies par le théorème 2.10 pour la réduction canonique.

Construction de $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$.

D'après le théorème 1.13, il est logique de poser la définition :

Définition 3.1 On définit la série formelle

$$\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{V}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}],$$

à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0) \times \mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$. ∎

Puisque la série formelle $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ vérifie l'équation

$$\boldsymbol{A}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{G}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}],$$

par définition de la réduction canonique, on a la relation

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] &=& -\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{B}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] &=& 0. \end{cases}$$

Construction de $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$.

Pour définir la série formelle $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$, on effectue un changement de variable dans la série formelle opérateur $\boldsymbol{V}[\varepsilon^{1/2}]$. Rappelons que les opérateurs $\boldsymbol{V}^{k/2}$ sont nuls pour k impair. Si on note

$$\boldsymbol{V}^k(r, s, x_3; \partial_r, \partial_s)$$

l'opérateur $\boldsymbol{V}^k$ polynomial en x_3 dans le système de coordonnées (r, s, x_3) au voisinage de Γ_0, on pose alors, pour tout $k \geq 0$,

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^{(k)}(\varepsilon)\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{V}^k(\varepsilon^{1/2}T, s, x_3; \varepsilon^{-1/2}\partial_T, \partial_s)(\boldsymbol{Z}),$$

où $\boldsymbol{Z}$ est un champ de 1-formes sur la variété $\breve{S}$. On associe alors à ces opérateurs les séries formelles $\boldsymbol{\mathcal{V}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]$ en utilisant des développement de Taylor en $T = 0$

des coefficients des opérateurs. D'après les équations (2.32) du chapitre III, il est clair que l'on a

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{\ell\geq -k} \varepsilon^{\ell/2}\boldsymbol{\mathcal{V}}^{k,\ell/2}, \tag{3.1}$$

où les opérateurs $\boldsymbol{\mathcal{V}}^{k,\ell/2}$ définissent des opérateurs polynomiaux en T et x_3 agissant sur les champs de 1-formes sur $\breve{S}$ et à valeurs dans les champs de 1-formes dans $\breve{S}$. Comme précédemment, on définit alors :

Définition 3.2 On définit la série formelle $\boldsymbol{\mathcal{V}}[\varepsilon^{1/2}]$ par l'équation

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}[\varepsilon^{1/2}] := \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k}\boldsymbol{\mathcal{V}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]. \tag{3.2}$$

■

On vérifie en effet qu'on a d'après l'équation (3.1)

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k}\boldsymbol{\mathcal{V}}^{(k)}[\varepsilon^{1/2}] &= \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k} \sum_{\ell\geq -k} \varepsilon^{\ell/2}\boldsymbol{\mathcal{V}}^{k,\ell/2} \\ &= \sum_{k\geq 0}\sum_{\ell\geq 0} \varepsilon^{(2k+\ell-k)/2}\boldsymbol{\mathcal{V}}^{k,(\ell-k)/2} \\ &= \sum_{n\geq 0} \varepsilon^{n/2} \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{\mathcal{V}}^{k,(n-2k)/2},\end{aligned} \tag{3.3}$$

ce qui montre qu'on a

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{n\geq 0} \varepsilon^{n/2}\boldsymbol{\mathcal{V}}^{n/2}, \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\mathcal{V}}^{n/2} = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{\mathcal{V}}^{k,(n-2k)/2}. \tag{3.4}$$

Grâce aux propriétés de l'espace $\mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)$ (voir l'équation (1.33) du chapitre V), la série formelle $\boldsymbol{\mathcal{V}}[\varepsilon^{1/2}]$ a donc des coefficients opérateurs

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^{n/2} : \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big(I\times\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$$

polynomiaux en x_3. De plus, on a $\boldsymbol{\mathcal{V}}^0\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}$.

On définit alors naturellement

Définition 3.3 La série formelle $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ est définie par l'équation

$$\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}] := \boldsymbol{\mathcal{V}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}],$$

à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big)$. ■

Construction de $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$.

Tout d'abord, on remarque qu'on peut définir la série formelle

$$\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}],$$

car la série formelle $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ a des coefficients générateurs 2D. On cherche maintenant à définir l'action de la série formelle $\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon^{1/2}]$ sur la série $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$.

Rappelons que la série formelle $\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon^{1/2}]$ ne comporte que des termes pairs en puissances de $\varepsilon^{1/2}$, et que ces termes s'écrivent pour tout $k \geq 0$,

$$\boldsymbol{\Psi}^k \boldsymbol{z} = \sum_{j \in F_k} (P_j^k \boldsymbol{z})\big|_{\partial S_0}\, \boldsymbol{\varphi}^{k,j}$$

où F_k est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, où les $\boldsymbol{\varphi}^{k,j}(R,s,x_3)$ sont des éléments de l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{H}(\Sigma^+)\big)$ et où les opérateurs P_j^k sont des opérateurs 2D à valeurs dans $\mathscr{C}^\infty(S_0)$ de degré de dérivation au plus égal à k en la variable r . (voir l'équation (1.25)). On définit alors l'action des opérateurs $P_j^k(r,s;\partial_r,\partial_s)$ sur la série formelle $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$, en effectuant le changement de variable $(r,s) \mapsto (T,s)$. On pose donc pour $\boldsymbol{Z}$ un champ de 1-formes sur la variété $\breve{S}$,

$$\mathcal{P}_j^{(k)}(\varepsilon)\boldsymbol{Z} = P_j^k(\varepsilon^{1/2}T, s; \varepsilon^{-1/2}\partial_T, \partial_s)(\boldsymbol{Z}),$$

et on définit alors la série formelle associée $\mathcal{P}_j^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]$ en développant les coefficients de l'opérateur en $T = 0$. Le fait que P_j^k soit un opérateur d'ordre k en r montre que $\mathcal{P}_j^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]$ est une série formelle dont le premier terme non nul est un terme d'ordre $\varepsilon^{-k/2}$. On pose alors la définition suivante :

Définition 3.4 On définit la série formelle $\boldsymbol{\psi}[\varepsilon^{1/2}]$ à coefficients

$$\boldsymbol{\psi}^{k/2} : \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{T}}(\mathbb{R}^+)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{H}(\Sigma^+)\big),$$

par l'équation

$$\boldsymbol{\psi}[\varepsilon^{1/2}]\boldsymbol{Z} := \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \sum_{j \in F_k} \big(\mathcal{P}_j^{(k)}[\varepsilon^{1/2}]\boldsymbol{Z}\big)\big|_{T=0}\, \boldsymbol{\varphi}^{k,j}. \tag{3.5}$$

■

Comme précédemment, on vérifie que l'équation (3.5) définit bien une série formelle après identification des puissances de $\varepsilon^{1/2}$: on a pour tout k et pour tout j

$$\mathcal{P}_j^{(k)}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{\ell \geq -k} \varepsilon^{\ell/2} \mathcal{P}_j^{k,\ell/2}, \tag{3.6}$$

où les $\mathcal{P}_j^{k,\ell/2}$ sont des opérateurs 2D sur la variété $\breve{S}$ à valeurs dans l'espace des fonctions sur $\breve{S}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\sum_{j\in F_k}\boldsymbol{\varphi}^{k,j}\mathcal{P}_j^{(k)}[\varepsilon^{1/2}] &= \sum_{k\geq 0}\sum_{j\in F_k}\sum_{\ell\geq 0}\varepsilon^{(2k+\ell-k)/2}\mathcal{P}_j^{k,(\ell-k)/2},\\ &= \sum_{n\geq 0}\varepsilon^{n/2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j\in F_k}\mathcal{P}_j^{k,(\ell-2k)/2}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Le fait que les ensembles F_k soient finis garantit que la somme en facteur de $\varepsilon^{n/2}$ est finie, et donc que l'équation (3.5) définit bien une série formelle $\boldsymbol{\psi}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\psi}^{k/2}$.

On pose alors la définition suivante :

Définition 3.5 On définit la série formelle $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$ à coefficients dans l'espace $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{H}(\Sigma^+)\big)$ par la formule

$$\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}] := \boldsymbol{\Psi}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + \boldsymbol{\Theta}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}] + \boldsymbol{\psi}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}].$$

■

Dans la sous-section suivante, on montre quelles sont les propriétés des séries formelles $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$, $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$.

3.2 Equations formelles 3D

En écho à la définition 1.1, on pose la définition suivante :

Définition 3.6 Soit $\big(\boldsymbol{L},\boldsymbol{B}\big)$ l'opérateur d'élasticité sur la coque Ω^ε. Pour tout $\varepsilon\leq\varepsilon_0$, on appelle *opérateur d'élasticité* 3D *en variables rapides* (T,s,x_3) l'opérateur $\big(\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varepsilon),\boldsymbol{\mathcal{B}}(\varepsilon)\big)$ défini par l'équation suivante :

$$\begin{cases}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varepsilon)(T,s,x_3;\partial_T,\partial_s,\partial_3) := \boldsymbol{L}(\varepsilon^{1/2}T,s,\varepsilon x_3;\varepsilon^{-1/2}\partial_T,\partial_s,\varepsilon^{-1}\partial_3) \quad \text{et}\\ \boldsymbol{\mathcal{B}}(\varepsilon)(T,s,x_3;\partial_T,\partial_s,\partial_3) := \boldsymbol{B}(\varepsilon^{1/2}T,s,\varepsilon x_3;\varepsilon^{-1/2}\partial_T,\partial_s,\varepsilon^{-1}\partial_3).\end{cases} \tag{3.8}$$

On définit alors $\big(\boldsymbol{\mathcal{L}}[\varepsilon^{1/2}],\boldsymbol{\mathcal{B}}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ les séries formelles en puissances de $\sqrt{\varepsilon}$ associées à ces opérateurs par le développement de Taylor en $T=0$ et $x_3=0$ des opérateurs définis dans l'équation (3.8). ■

On en déduit donc l'existence d'opérateurs de degrés 2 et polynomiaux en T et x_3

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{k/2} : \mathscr{C}^\infty\big(I\times\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{T}}(\mathbb{R}^+)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big(I\times\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{T}}(\mathbb{R}^+)\big),$$

et

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}^{k/2} : \mathscr{C}^\infty\big(I \times \partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big),$$

tels que

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon^{-2} \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{\mathcal{L}}^{k/2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon^{-2} \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2} \boldsymbol{\mathcal{B}}^{k/2}.$$

On a donc 3 couples de séries formelles : $\big(\boldsymbol{L}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{B}[\varepsilon^{1/2}]\big)$, $\big(\boldsymbol{\mathcal{L}}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{\mathcal{B}}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ et $\big(\mathscr{L}[\varepsilon^{1/2}], \mathscr{B}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ qui correspondent aux développements en $\varepsilon^{1/2}$ de l'opérateur $\big(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{B}\big)$ dans les différents systèmes de coordonnées introduits précédemment.

Le but de cette sous-section est alors de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.7 *Les séries formelles $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$, $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$ construites dans la sous-section précédente (voir les définitions* 3.1, 3.3 *et* 3.5*) à partir de la solution $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ du problème* (2.29)*, vérifient les équations suivantes : la série formelle $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$ vérifie*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{L}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] &=& -\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{B}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] &=& 0, \end{array}\right. \tag{3.9}$$

la série $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\mathcal{L}}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}] &=& 0, \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}] &=& 0, \end{array}\right. \tag{3.10}$$

et la série $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}] &=& 0, \\ \mathscr{B}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}] &=& 0. \end{array}\right. \tag{3.11}$$

Enfin, on a la relation

$$\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\Gamma_0} + \boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{T=0} + \boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{R=0} = 0. \tag{3.12}$$

Preuve. Tout d'abord, il est clair que l'équation (3.9) est vérifiée d'après les propriétés de la réduction canonique.

D'autre part, la série formelle $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ vérifie l'équation

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}]\, \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = 0.$$

Par définition de la réduction canonique (voir le lemme 2.1 du chapitre III), les séries formelles $\boldsymbol{A}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$ vérifient les équations

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}[\varepsilon]\boldsymbol{V}[\varepsilon](\boldsymbol{z}) = -\mathscr{I} \circ \boldsymbol{A}[\varepsilon](\boldsymbol{z}), \\ \boldsymbol{B}[\varepsilon]\boldsymbol{V}[\varepsilon](\boldsymbol{z}) = 0. \end{cases}$$

En effectuant le changement de variables $(r,s) \mapsto (T,s)$ et en développant les équations en $T=0$ et $x_3=0$, on en déduit que pour tout $\boldsymbol{Z}$ champ de 1-formes sur $\breve{S}$, on a

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{L}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\mathcal{V}}[\varepsilon^{1/2}](\boldsymbol{Z}) = -\mathscr{I}\circ\boldsymbol{\mathcal{A}}[\varepsilon^{1/2}](\boldsymbol{Z}), \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\mathcal{V}}[\varepsilon^{1/2}](\boldsymbol{Z}) = 0, \end{cases}$$

ce qui montre l'équation (3.10) de manière évidente compte tenu de la relation $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{\mathcal{V}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$.

Enfin, rappelons que les séries formelles $\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon]$ et $\boldsymbol{\Theta}[\varepsilon]$ vérifient les équations (1.13) et (1.15), soit

$$\begin{cases} \mathscr{L}[\varepsilon]\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon] &= 0, \\ \mathscr{B}[\varepsilon]\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon] &= 0, \\ \big(\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon] - \vec{\mathfrak{d}}[\varepsilon]\big)\big|_{R=0} + \boldsymbol{V}[\varepsilon]\big|_{\Gamma_0} &= 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

et

$$\begin{cases} \mathscr{L}[\varepsilon]\boldsymbol{\Theta}[\varepsilon] &= 0, \\ \mathscr{B}[\varepsilon]\boldsymbol{\Theta}[\varepsilon] &= 0, \\ \big(\boldsymbol{\Theta}[\varepsilon] + \vec{\mathfrak{h}}[\varepsilon]\big)\big|_{R=0} + \boldsymbol{Q}[\varepsilon]\big|_{\Gamma_0} &= 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

En effectuant le changement de variables $(r,s) \mapsto (T,s)$ dans l'équation (3.13), on trouve, d'après la définition de la série formelle $\boldsymbol{\psi}[\varepsilon^{1/2}]$, que l'équation suivante est vérifiée :

$$\begin{cases} \mathscr{L}[\varepsilon^{1/2}]\boldsymbol{\psi}[\varepsilon^{1/2}] &= 0, \\ \mathscr{B}[\varepsilon^{1/2}]\boldsymbol{\psi}[\varepsilon^{1/2}] &= 0, \\ \big(\boldsymbol{\psi}[\varepsilon^{1/2}] - \vec{\mathfrak{c}}[\varepsilon^{1/2}]\big)\big|_{R=0} + \boldsymbol{\mathcal{V}}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\Gamma_0} &= 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

où la série formelle $\vec{\mathfrak{c}}[\varepsilon^{1/2}]$ est obtenue en effectuant le changement de variable $(r,s) \mapsto (T,s)$ dans les coefficients de la série formelle $\vec{\mathfrak{d}}[\varepsilon]$ en en calculant la série formelle de série formelle associée.

La série formelle $\vec{\mathfrak{c}}[\varepsilon^{1/2}]$ est donc reliée à la série formelle $\vec{\boldsymbol{d}}[\varepsilon^{1/2}]$ de la même façon que la série $\vec{\mathfrak{d}}[\varepsilon^{1/2}]$ est reliée à la série formelle $\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]$ (les coefficients de la transformation (1.32) ne dépendent pas de r). On en déduit en particulier que les équations

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + \vec{\boldsymbol{d}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = \vec{\boldsymbol{H}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}],$$

et

$$\vec{\mathfrak{d}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + \vec{\mathfrak{c}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = \vec{\mathfrak{h}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \tag{3.16}$$

sont équivalentes. En particulier, cette dernière est vérifiée pour les séries formelles $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ solutions du théorème 2.10.

En appliquant alors l'équation (3.13) à la série formelle $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$, l'équation (3.14) à la série formelle $\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}]$ et l'équation (3.15) à la série formelle $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$, et en additionnant les équations ainsi obtenues on trouve, compte tenu de la définition 3.5 de la série formelle $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$, qu'on a les relations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}] &=& 0, \\ \mathscr{B}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}] &=& 0, \end{array}\right.$$

ce qui montre (3.11). De même, on a la relation

$$\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{R=0} + \boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\Gamma_0} + \boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]\big|_{\Gamma_0} \\ - \vec{\mathfrak{d}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + \vec{\mathfrak{h}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}] - \vec{\mathfrak{c}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = 0,$$

compte tenu des relations

$$\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{V}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] \quad \text{et} \quad \boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{\mathcal{V}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}].$$

L'équation (3.16) montre alors (3.12)

Ceci termine la preuve du théorème. ∎

3.3 Comparaison avec les modèles 2D admissibles

Avant d'utiliser le théorème 3.7 pour construire un développement asymptotique de la solution des équations tridimensionnelles, on étudie ici les premiers termes des séries formelle $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$, $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$, en les comparant avec les termes constituant le développement asymptotique de la solution des équations liées à un problème 2D admissible.

Proposition 3.8 *Soient* $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$, $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ *et* $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$ *les séries formelles données par les définitions* 3.1, 3.3 *et* 3.5. *Alors les premiers termes de ces séries s'écrivent*

$$\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{\zeta}^0 + \varepsilon^{1/2}\boldsymbol{\zeta}^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}] = \left\{\begin{array}{rcll} W_T[\varepsilon^{1/2}] &=& \varepsilon^{1/2}(Z_T^{1/2} - x_3\partial_T Z_3^0) & + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ W_s[\varepsilon^{1/2}] &=& \varepsilon^{1/2} Z_s^{1/2} & + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ W_3[\varepsilon^{1/2}] &=& Z_3^0 \;+\; \varepsilon^{1/2} Z_3^{1/2} & + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{array}\right. \tag{3.18}$$

et

$$\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon\,\boldsymbol{\Phi}^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}), \tag{3.19}$$

où, si $\boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}]$ *et* $\boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}]$ *est la solution du problème en séries formelles* (2.53) *du corollaire* 2.12*, on a*

$$\boldsymbol{\zeta}^0 = \boldsymbol{\zeta}'^0, \quad \boldsymbol{\zeta}^{1/2} = \boldsymbol{\zeta}'^{1/2} \quad et \quad \boldsymbol{Z}^0 = \boldsymbol{Z}'^0,$$

ainsi que

$$Z_T^{1/2} = Z_T'^{\,1/2} \quad et \quad Z_s^{1/2} = Z_s'^{\,1/2}.$$

Preuve. D'après la proposition 2.11 et le corollaire 2.12, les premiers termes des séries formelles $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ vérifient $\boldsymbol{\zeta}^0 = \boldsymbol{\zeta}'^0$, $\boldsymbol{\zeta}^{1/2} = \boldsymbol{\zeta}'^{1/2}$, $\boldsymbol{Z}^0 = \boldsymbol{Z}'^0$, $Z_T^{1/2} = Z_T'^{\,1/2}$ et $Z_s^{1/2} = Z_s'^{\,1/2}$. Remarquons qu'en revanche, les termes $Z_3^{1/2}$ et $Z'^{1/2}_3$ sont distincts.

La série formelle $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$ s'écrit par définition

$$\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{V}[\varepsilon^{1/2}]\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + \boldsymbol{Q}[\varepsilon^{1/2}]\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}].$$

On a donc $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{v}^{k/2}$, avec

$$\forall k \geq 0, \qquad \boldsymbol{v}^{k/2} = \sum_{\ell=0}^{k} \boldsymbol{V}^{\ell/2}\boldsymbol{\zeta}^{(k-\ell)/2} + \sum_{\ell=0}^{k} \boldsymbol{Q}^{\ell/2}\boldsymbol{f}^{(k-\ell)/2}.$$

En utilisant le fait que $\boldsymbol{V}^{1/2} = 0$, que $\boldsymbol{V}^0 = \mathscr{I}$ l'injection canonique, et que $\boldsymbol{Q}^{\ell/2} = 0$ pour $\ell = 0, 1, 2, 3$, on trouve que $\boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{\zeta}^0$ et $\boldsymbol{v}^{1/2} = \boldsymbol{\zeta}^{1/2}$, ce qui montre l'équation (3.17).

D'autre part, on a d'après la définition 3.3,

$$\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{\mathcal{V}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}], \tag{3.20}$$

avec $\boldsymbol{\mathcal{V}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\mathcal{V}}^{k/2}$ la série formelle obtenue par le changement de variable $(r, s) \mapsto (T, s)$ dans la série $\boldsymbol{V}[\varepsilon]$. Or, puisque $\boldsymbol{V}^0 = \mathscr{I}$, on a aussi $\boldsymbol{\mathcal{V}}^0 = \mathscr{I}$, où cette fois, $\mathscr{I}$ désigne l'injection canonique

$$\mathscr{I} : \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big) \to \mathscr{C}^\infty\big(I \times \partial S_0, \mathfrak{T}(\mathbb{R}^+)\big).$$

D'autre part, les majorations des ordres des opérateurs $\boldsymbol{V}^k$ et le fait que

$$\begin{cases} V_\sigma^1 \boldsymbol{z} &= -x_3\theta_\sigma(\boldsymbol{z}), \\ V_3^1 \boldsymbol{z} &= -x_3 p \gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}), \end{cases}$$

avec $p = \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}$, $\theta_\sigma(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}_\sigma z_3 + b_\sigma^\alpha z_\alpha$ et $\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}^\alpha z_\alpha - b_\alpha^\alpha z_3$ montrent qu'on a

$$\begin{cases} \mathcal{V}_T^{1/2} \boldsymbol{Z} &= -x_3\partial_T Z_3, \\ \mathcal{V}_s^{1/2} \boldsymbol{Z} &= 0, \\ \mathcal{V}_3^{1/2} \boldsymbol{Z} &= -x_3 p \partial_T Z_T. \end{cases}$$

Or d'après l'équation (3.20), on a

$$\boldsymbol{W}^0 = \boldsymbol{\mathcal{V}}^0 \boldsymbol{Z}^0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{W}^{1/2} = \boldsymbol{\mathcal{V}}^0 \boldsymbol{Z}^{1/2} + \boldsymbol{\mathcal{V}}^{1/2} \boldsymbol{Z}^0,$$

et le fait que $\boldsymbol{Z}^0 = (0, 0, Z_3)$ montre alors l'équation (3.18).

Enfin, d'après la définition 3.5, on a

$$\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}] := \boldsymbol{\Psi}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] + \boldsymbol{\Theta}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}] + \boldsymbol{\psi}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}].$$

Or, on a vu dans le théorème 1.4 que les termes $\boldsymbol{\Psi}^0$, $\boldsymbol{\Psi}^{1/2}$, $\boldsymbol{\Psi}^1$, $\boldsymbol{\Theta}^0$, $\boldsymbol{\Theta}^{1/2}$ et $\boldsymbol{\Theta}^1$ étaient tous nuls. Il suffit donc, pour montrer l'équation (3.19) de montrer que la série

$$\boldsymbol{\varphi}[\varepsilon^{1/2}] := \boldsymbol{\psi}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] \tag{3.21}$$

vérifie $\boldsymbol{\varphi}^0 = \boldsymbol{\varphi}^{1/2} = 0$. Or rappelons qu'on a

$$\boldsymbol{\Psi}[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon\,\boldsymbol{\Psi}^1 + \sum_{k\geq 2} \varepsilon^k \boldsymbol{\Psi}^k,$$

où d'après l'équation (1.17) on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Psi_R^1 \boldsymbol{z} & = & \big(p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z})\,\big|_{\partial S_0}\big)\overline{\varphi}_R^1, \\ \Psi_s^1 \boldsymbol{z} & = & \big(\theta_s(\boldsymbol{z})\,\big|_{\partial S_0}\big)\overline{\varphi}_s^1, \\ \Psi_3^1 \boldsymbol{z} & = & \big(p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z})\,\big|_{\partial S_0}\big)\overline{\varphi}_3^1, \end{array}\right.$$

avec $\overline{\varphi}^1$ un élément de $\mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \mathfrak{H}(\Sigma^+)\big)$, et où les opérateurs $\boldsymbol{\Psi}^k$ admettent des décompositions (1.25). En particulier, pour $k \geq 2$, les opérateurs $\boldsymbol{\Psi}^k$ sont "d'ordre k" au sens où les opérateurs P_j^k de la décomposition (1.25) sont d'ordre k, et ils n'interviennent donc pas dans le calcul de l'opérateur $\boldsymbol{\psi}^{1/2}$.

D'après l'équation (3.5) définissant la série formelle $\boldsymbol{\psi}[\varepsilon^{1/2}]$, et les équations précédentes, on trouve donc que

$$\boldsymbol{\psi}^0 = 0, \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \psi_T^{1/2} \boldsymbol{Z} & = & \big(p\partial_T Z_T\,\big|_{T=0}\big)\overline{\varphi}_R^1, \\ \psi_s^{1/2} \boldsymbol{Z} & = & 0, \\ \psi_3^{1/2} \boldsymbol{Z} & = & \big(p\partial_T Z_T\,\big|_{T=0}\big)\overline{\varphi}_3^1. \end{array}\right.$$

Or on a d'après l'équation (3.21)

$$\boldsymbol{\varphi}^0 = \boldsymbol{\psi}^0 \boldsymbol{Z}^0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varphi}^{1/2} = \boldsymbol{\psi}^{1/2} \boldsymbol{Z}^0 + \boldsymbol{\psi}^0 \boldsymbol{Z}^{1/2}.$$

On a donc $\boldsymbol{\varphi}^0 = 0$, et le fait que $Z_\sigma^0 = 0$ montre alors que $\boldsymbol{\varphi}^{1/2} = 0$, ce qui montre l'équation (3.19).

Ceci termine la preuve de la proposition. ∎

Remarque 3.9 D'après la remarque 2.13, les premiers termes $\boldsymbol{\zeta}^0$, $\boldsymbol{\zeta}^{1/2}$, Z_3^0 et

$Z_\sigma^{1/2}$ intervenant dans le développement de la série formelle $\boldsymbol{w}[\varepsilon^{1/2}]$ sont aussi communs à la solution $\big(\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}[\varepsilon^{1/2}], \widetilde{\boldsymbol{Z}}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ du problème en série formelle (2.53) associé au modèle 2D *en carte* $\widetilde{\boldsymbol{K}}(\varepsilon)$ (voir la définition 2.8 du chapitre IV). ■

4 Développement asymptotique 3D

On s'intéresse au déplacement tridimensionnel shifté $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ qui est la solution des équations

$$\left\{\begin{array}{rcll} \boldsymbol{L}\boldsymbol{w}^\varepsilon &=& -\boldsymbol{f}^\varepsilon & \text{dans} \quad \Omega^\varepsilon, \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{w}^\varepsilon &=& 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\pm^\varepsilon, \\ \boldsymbol{w}^\varepsilon &=& 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0^\varepsilon, \end{array}\right.$$

où les opérateurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{B}$ sont définis par les équations (2.20) et (2.21) du chapitre II. Rappelons qu'afin d'étudier le comportement en ε de ce déplacement, on a effectué le changement d'échelle $\varepsilon x_3 = h$ et on a associé à $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ le champ $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$ sur la variété $\Omega = S \times (-1, 1)$. Ce champ de 1-formes vérifie alors les équations

$$\left\{\begin{array}{rcll} \boldsymbol{L}(\varepsilon)\boldsymbol{w}(\varepsilon) &=& -\boldsymbol{f}^\varepsilon(\varepsilon) & \text{dans} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{B}(\varepsilon)\boldsymbol{w}(\varepsilon) &=& 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\pm, \\ \boldsymbol{w}(\varepsilon) &=& 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

où les opérateurs $\boldsymbol{L}(\varepsilon)$ et $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$ sont donnés par l'équation (2.22) du chapitre II, et où $\boldsymbol{f}^\varepsilon(\varepsilon)$ désigne le champ de 1-forme $\boldsymbol{f}^\varepsilon$ après changement d'échelle (voir l'hypothèse 4.2 du chapitre II).

Dans cette section, on montre l'existence d'un développement asymptotique du champ $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$. Dans un premier temps, on définit ce développement asymptotique, puis on montre une estimation grossière entre la solution et les sommes partielles de ce développement. Comme dans le chapitre V, on utilise alors ces estimations grossières pour obtenir des estimations optimales. Le résultat est aussi du même type pour le déplacement *shifté* $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$ et pour le déplacement *non shifté* $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ défini par l'équation

$$\boldsymbol{u}(\varepsilon) = \boldsymbol{\mu}[\varepsilon]\big(\boldsymbol{w}(\varepsilon)\big),$$

où $\boldsymbol{\mu}[\varepsilon]$ est le shifter après changement d'échelle (voir l'équation (2.17) du chapitre II). En utilisant alors les résultats du chapitre V et le résultat de la proposition 3.8, on peut estimer la différence entre la solution 3D et la solution d'un modèle 2D admissible.

4.1 Proposition de développement

Les séries formelles $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$, $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$ ont des coefficients qui n'appartiennent pas aux mêmes espaces. La somme de ces coefficients n'a donc pas de sens en dehors du bord Γ_0. On définit alors les sommes partielles suivantes :

Définition 4.1 Soit $\chi(r)$ la fonction de troncature de la définition 3.1 du chapitre V, et soient $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$, $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$ les séries formelles des définitions 3.1, 3.3 et 3.5 construites à partir de la solution $\big(\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}], \boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]\big)$ du problème réduit, fournie par le théorème 2.10. Si $N \in \mathbb{N}$, alors on pose

$$\boldsymbol{w}^{[N]}(\varepsilon)(x_1,x_2,x_3) :=$$
$$\sum_{k=0}^{N} \varepsilon^{k/2}\Big(\boldsymbol{v}^{k/2}(x_1,x_2,x_3) + \chi(r)\boldsymbol{W}^{k/2}(\varepsilon^{-1/2}r,s,x_3) + \chi(r)\boldsymbol{\Phi}^{k/2}(\varepsilon^{-1}r,s,x_3)\Big), \quad (4.2)$$

ce qui définit un élément $\mathrm{H}^1(\Omega)^3$. On a alors

$$\boldsymbol{w}^{[N]}(\varepsilon) = \boldsymbol{v}^{[N]}(\varepsilon) + \chi(r)\boldsymbol{W}^{[N]}(\varepsilon) + \chi(r)\boldsymbol{\Phi}^{[N]}(\varepsilon), \quad (4.3)$$

avec

$$\boldsymbol{v}^{[N]}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{v}^{k/2}, \quad \boldsymbol{W}^{[N]}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{W}^{k/2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Phi}^{[N]}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\Phi}^{k/2}.$$

■

Le champs de 1-forme (4.2) vaut donc

$$\sum_{k=0}^{N} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{v}^{k/2}(x_1,x_2,x_3)$$

hors du support de χ, et

$$\sum_{k=0}^{N} \varepsilon^{k/2}\Big(\boldsymbol{v}^{k/2}(r,s,x_3) + \chi(r)\boldsymbol{W}^{k/2}(\varepsilon^{-1/2}r,s,x_3) + \chi(r)\boldsymbol{\Phi}^{k/2}(\varepsilon^{-1}r,s,x_3)\Big)$$

dans le système de coordonnées (r,s,x_3) au voisinage du bord. L'équation (3.12) implique alors que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{w}^{[N]}(\varepsilon)\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{w}^{[N]}(\varepsilon) \in V(\Omega),$$

où $V(\Omega)$ est l'espace variationnel

$$V(\Omega) = \big\{\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega)^3 \quad | \quad \boldsymbol{u}\big|_{\Gamma_0} = 0\big\}$$

associé au problème tridimensionnel (voir le chapitre I).

Le but de cette section est donc de trouver des estimations de la différence entre le champ de 1-formes $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$ solution des équations (4.1) et le champ $\boldsymbol{w}^{[N]}(\varepsilon)$.

Dans la suite, on note b^ε la forme bilinéaire définie sur $V(\Omega^\varepsilon)$ par la formule

$$b^\varepsilon(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) := \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijk\ell}\gamma_{k\ell}\big(\boldsymbol{\mu}(h)(\boldsymbol{w})\big)\gamma_{ij}\big(\boldsymbol{\mu}(h)(\boldsymbol{v})\big)\,\mathrm{d}V, \tag{4.4}$$

où $\boldsymbol{\mu}(h)$ est l'application issue du *shifter* définie par l'équation (1.14) du chapitre II. On note alors $b(\varepsilon)$ la forme bilinéaire sur l'espace $V(\Omega)$ associée à b^ε après le changement de variable $h = \varepsilon x_3$. Il est clair d'après l'équation (4.4) que la forme bilinéaire $b(\varepsilon)$ est la forme bilinéaire associée à l'opérateur $\big(\boldsymbol{L}(\varepsilon),\boldsymbol{B}(\varepsilon)\big)$.

Cherchons maintenant une inégalité de Korn vérifiée par la forme bilinéaire $b(\varepsilon)$. Pour cela, on remarque tout d'abord que le champ de tenseurs $A^{ijk\ell}$ après changement d'échelle est défini positif uniformément en ε pour ε assez petit sur l'espace des champs de tenseurs 2 fois covariants et symétriques : ceci est dû au fait que les coefficients de la métrique $a^{ij}(\varepsilon)$ dépendent de manière continue en ε et tendent vers la métrique $a^{ij}(0)$ qui est définie positive sur la variété Ω .

D'autre part, on a l'inégalité suivante, valable quelle que soit la géométrie de la surface S_0 , et dont on trouvera une démonstration dans la section 4 de [14] :

$$\forall\, \boldsymbol{w}\in V(\Omega),\quad \|\boldsymbol{w}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \le \varepsilon^{-1}C\|\gamma_{ij}(x_\alpha,\varepsilon\, x_3;\mathrm{D}_\alpha,\varepsilon^{-1}\partial_3)(\boldsymbol{w})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\,, \tag{4.5}$$

où C est une constante indépendante de ε , et où l'opérateur $\gamma_{ij}(x_\alpha,\varepsilon\, x_3;\mathrm{D}_\alpha,\varepsilon^{-1}\partial_3)$ est défini à partir de l'opérateur $\gamma_{ij}(x_\alpha,h;\mathrm{D}_\alpha,\partial_h)$ après changement d'échelle.

D'autre part, rappelons qu'on note $\boldsymbol{\mu}[\varepsilon]$ l'opérateur correspondant à l'opérateur $\boldsymbol{\mu}(h)$ après changement d'échelle

$$\boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w}) = \begin{cases} w_\sigma - \varepsilon x_3 b_\sigma^\alpha(x_1,x_2)w_\alpha, \\ w_3 \end{cases} \tag{4.6}$$

($\boldsymbol{\mu}[\varepsilon]$ est polynomial en ε , et on le confond donc avec la série formelle qui lui est associée). L'opérateur $\boldsymbol{\mu}[\varepsilon]$ envoie l'espace $V(\Omega)$ sur lui-même. De plus, cet opérateur est inversible dépend de manière continue de ε , avec une limite encore inversible. On en déduit donc qu'on a pour tout $\boldsymbol{w}$

$$c\|\boldsymbol{w}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \le \|\boldsymbol{\mu}[\varepsilon](\boldsymbol{w})\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \le C\|\boldsymbol{w}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3}\,, \tag{4.7}$$

où c et C sont des constantes indépendantes de ε . En définitive, grâce aux équations (4.5), (4.7) et à la définition de $b(\varepsilon)$, on trouve l'équation suivante :

$$\forall \boldsymbol{w}\in V(\Omega),\qquad \|\boldsymbol{w}\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \le \varepsilon^{-2}C_0 b(\varepsilon)(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}), \tag{4.8}$$

où C_0 est une constante indépendante de ε .

4.2 Validation

On montre tout d'abord une estimation grossière de la différence, en utilisant l'inégalité (4.8).

Lemme 4.2 *Avec les notations de la sous-section précédente, on a l'estimation*

$$\|\boldsymbol{w}(\varepsilon) - \boldsymbol{w}^{[N]}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \le C\varepsilon^{N/2-4}. \tag{4.9}$$

Preuve. On étudie successivement les 3 termes qui constituent $\boldsymbol{w}^{[N]}(\varepsilon)$ en utilisant le théorème 3.7.

Soit $\boldsymbol{u}$ un élément de $V(\Omega)$. D'après l'équation (3.9), la série formelle $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\ge 0} \varepsilon^{k/2}\boldsymbol{v}^{k/2}$ vérifie les équations

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] &= -\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}], \\ \boldsymbol{B}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}] &= 0. \end{cases}$$

Compte tenu du fait que l'opérateur $\big(\boldsymbol{L}(\varepsilon), \boldsymbol{B}(\varepsilon)\big)$ est d'ordre -2 en ε, on en déduit donc, après intégration par parties, que

$$b(\varepsilon)\big(\boldsymbol{w}^{[N]}(\varepsilon), \boldsymbol{u}\big) = \mathcal{O}(\varepsilon^{(N-3)/2})\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3}. \tag{4.10}$$

Considérons maintenant le terme $\chi(r)\boldsymbol{W}^{[N]}(\varepsilon)$. Compte tenu du fait que le support de la fonction $\partial_r\chi(r)$ est un intervalle compact à une distance strictement positive et indépendante de ε du bord ∂S_0, on a

$$\Big| b(\varepsilon)\big(\chi(r)\boldsymbol{W}^{[N]}(\varepsilon), \boldsymbol{u}\big) - b(\varepsilon)\big(\boldsymbol{W}^{[N]}(\varepsilon), \chi(r)\boldsymbol{u}\big)\Big| \le Ce^{-\beta/\sqrt{\varepsilon}}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3},$$

où $\eta_1 > \beta > 0$ (voir l'équation (1.27) du chapitre V). Ceci est dû au fait que les termes de couches limites 2D sont exponentiellement décroissants en $r/\sqrt{\varepsilon}$. De plus, d'après l'équation (3.10), la série formelle $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ vérifie les équations

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{L}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}] &= 0, \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}] &= 0, \end{cases}$$

où les opérateurs $\boldsymbol{\mathcal{L}}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}}[\varepsilon^{1/2}]$ se déduisent des opérateurs $\boldsymbol{L}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{B}[\varepsilon^{1/2}]$ après le changement de variable $(r, s, x_3) \mapsto (T, s, x_3)$. Or on a

$$\begin{aligned} b(\varepsilon)&\Big(\boldsymbol{W}^{[N]}(\varepsilon)(\varepsilon^{-1/2}r, s, x_3), \chi(r)\boldsymbol{u}(r, s, x_3)\Big) \\ &= \varepsilon^{1/2}\breve{b}(\varepsilon)\Big(\boldsymbol{W}^{[N]}(\varepsilon)(T, s, x_3), \chi(\varepsilon^{1/2}T)\boldsymbol{u}(\varepsilon^{1/2}T, s, x_3)\Big), \end{aligned}$$

où $\breve{b}(\varepsilon)$ est la forme bilinéaire associée à l'opérateur $\big(\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varepsilon), \boldsymbol{\mathcal{B}}(\varepsilon)\big)$ défini en (3.8) sur la variété $I \times \breve{S}$. En utilisant le fait que l'opérateur $\big(\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varepsilon), \boldsymbol{\mathcal{B}}(\varepsilon)\big)$ a une puissance de démarrage égale à -2, on a

$$\breve{b}(\varepsilon)\Big(\boldsymbol{W}^{[N]}(\varepsilon)(T,s,x_3),\chi(\varepsilon^{1/2}T)\boldsymbol{u}(\varepsilon^{1/2}T,s,x_3)\Big)$$
$$= \mathcal{O}(\varepsilon^{(N-3)/2})\|\chi(\varepsilon^{1/2}T)\boldsymbol{u}(\varepsilon^{1/2}T,s,x_3)\|_{\mathrm{H}^1(I\times\breve{S})^3}.$$

Or on a

$$\|\chi(\varepsilon^{1/2}T)\boldsymbol{u}(\varepsilon^{1/2}T,s,x_3)\|_{\mathrm{H}^1(I\times\breve{S})^3} \le C\varepsilon^{-1/4}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3}.$$

On en déduit donc que

$$b(\varepsilon)\big(\chi(r)\boldsymbol{W}^{[N]}(\varepsilon),\boldsymbol{u}\big) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N/2-7/4})\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3}. \tag{4.11}$$

Enfin, pour le terme $\chi(r)\boldsymbol{\Phi}^{[N]}(\varepsilon)$, on a comme précédemment

$$\Big|b(\varepsilon)\big(\chi(r)\boldsymbol{\Phi}^{[N]}(\varepsilon),\boldsymbol{u}\big) - b(\varepsilon)\big(\boldsymbol{\Phi}^{[N]}(\varepsilon),\chi(r)\boldsymbol{u}\big)\Big| \le Ce^{-\beta'/\varepsilon}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3},$$

où $\beta' > 0$ est une constante indépendante de ε et strictement inférieure au plus petit des exposants de Papkovich-Fadle. De plus, on a

$$b(\varepsilon)\Big(\boldsymbol{\Phi}^{[N]}(\varepsilon)(\varepsilon^{-1}r,s,x_3),\chi(r)\boldsymbol{u}(r,s,x_3)\Big)$$
$$= \varepsilon\,\overline{b}(\varepsilon)\Big(\boldsymbol{\Phi}^{[N]}(\varepsilon)(R,s,x_3),\chi(\varepsilon R)\boldsymbol{u}(\varepsilon R,s,x_3)\Big),$$

où $\overline{b}$ est la forme bilinéaire associée à l'opérateur $\big(\mathscr{L}(\varepsilon),\mathscr{B}(\varepsilon)\big)$ sur la variété $\partial S_0\times\Sigma^+$. Or la série formelle $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$ vérifie les équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}] &=& -\boldsymbol{f}[\varepsilon^{1/2}],\\ \mathscr{B}[\varepsilon^{1/2}]\,\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}] &=& 0. \end{array}\right.$$

On trouve donc

$$b(\varepsilon)\big(\boldsymbol{\Phi}^{[N]}(\varepsilon),\chi(r)\boldsymbol{u}\big) = \mathcal{O}(\varepsilon^{(N-1)/2})\|\chi(r)\boldsymbol{u}(\varepsilon R,s,x_3)\|_{\mathrm{H}^1(\partial S_0\times\Sigma^+)^3},$$

et compte tenu de la relation

$$\|\chi(r)\boldsymbol{u}(\varepsilon R,s,x_3)\|_{\mathrm{H}^1(\partial S_0\times\Sigma^+)^3} \le C\varepsilon^{-1/2}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3},$$

on trouve donc que

$$b(\varepsilon)\big(\chi(r)\boldsymbol{\Phi}^{[N]}(\varepsilon),\boldsymbol{u}\big) = \mathcal{O}(\varepsilon^{(N-2)/2})\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3}. \tag{4.12}$$

En définitive, les équations (4.10), (4.11) et (4.12) montrent que

$$\forall\boldsymbol{u}\in V(\Omega),\qquad b(\varepsilon)\big(\boldsymbol{w}^{[N]}(\varepsilon),\boldsymbol{u}\big) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N/2-7/4})\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3}.$$

Le fait que $\boldsymbol{w}^{[N]}(\varepsilon)$ appartienne à l'espace $V(\Omega)$ et l'inégalité (4.8) montrent alors le résultat. ∎

Comme dans le chapitre V, on se sert de cette proposition pour trouver des estimations optimales. Pour cela, il est nécessaire de contrôler la normes des termes présents dans le développement en fonction de ε. On regroupe ces résultats dans le lemme suivant :

Lemme 4.3 *Soient* $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$, $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ *et* $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$ *les séries formelles des définition* 3.1, 3.3 *et* 3.5, *et soit* χ *la fonction de troncature de la définition* 3.1 *du chapitre* V. *En notant* $v_i^{k/2}$, $W_i^{k/2}$ *et* $\Phi_i^{k/2}$ *les composantes des termes apparaissant dans les développements des séries formelles, on a pour tout* $k \geq 0$, *les estimations suivantes : tout d'abord*

$$\|v_i^{k/2}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C,$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} &\|\chi\, W_i^{k/2}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C\,\varepsilon^{1/4}, && &&\|\chi\, \Phi_i^{k/2}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C\,\varepsilon^{1/2},\\ &\|\chi\, W_i^{k/2}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\,\varepsilon^{-1/4}, &&\textit{et} &&\|\chi\, \Phi_i^{k/2}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\,\varepsilon^{-1/2}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

où les constantes C *présentes dans les inégalités sont indépendantes de* ε.

Preuve. Il s'agit de simples changements de variables dans les intégrales, en utilisant le fait que les termes $W_i^{k/2}\big(\varepsilon^{-1/2}r, s, x_3\big)$ sont exponentiellement décroissants en $T = \varepsilon^{-1/2}r$ uniformément en s et en x_3, et le fait que les termes $\varphi_i^{k/2}\big(\varepsilon^{-1}r, s, x_3\big)$ sont exponentiellement décroissants en $R = \varepsilon^{-1}r$ uniformément en s et en x_3. ∎

On peut alors montrer les estimations suivantes :

Théorème 4.4 *Soit* $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$ *le champ de 1-forme sur la variété* Ω *solution shiftées des équations tridimensionnelles après changement d'échelle, et soit* $\boldsymbol{w}^{[N]}(\varepsilon)$ *le champ de 1-forme de la définition* 4.1. *Alors on a pour tout* $N \geq 0$,

$$\|\boldsymbol{w}(\varepsilon) - \boldsymbol{w}^{[N]}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \leq C\varepsilon^{N/2}. \tag{4.14}$$

Preuve. Soit $N \geq 0$. Considérons le terme $\boldsymbol{w}^{[N+10]}(\varepsilon)$. D'après l'estimation (4.9), on a

$$\|\boldsymbol{w}(\varepsilon) - \boldsymbol{w}^{[N+10]}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \leq C\varepsilon^{N/2+1},$$

d'où

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{w}(\varepsilon) - \boldsymbol{w}^{[N]}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3}\\ &\qquad \leq \sum_{k=N+1}^{N+10} \varepsilon^{k/2}\big(\|\boldsymbol{v}^{k/2}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} + \|\chi \boldsymbol{W}^{k/2}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} + \|\chi \boldsymbol{\Phi}^{k/2}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3}\big) + C\varepsilon^{N/2+1}.\end{aligned}$$

En utilisant alors le lemme 4.3, on trouve le résultat. ∎

De même, le lemme 4.2 permet d'estimer la différence entre $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$ et la solution du modèle de membrane :

Proposition 4.5 *Soit* $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$ *la solution shiftée des équations tridimensionnelles après le changement d'échelle, et soit* $\boldsymbol{\zeta}^0$ *le générateur* 2D *solution de l'équation*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\zeta}^0) & = & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \boldsymbol{f}^0 \,\mathrm{d}x_3, \\ \zeta_\sigma\big|_{\partial S_0} & = & 0. \end{array}\right. \tag{4.15}$$

Alors on a les estimations

$$\begin{array}{rcl} \|\boldsymbol{w}(\varepsilon) - \mathscr{I}\boldsymbol{\zeta}^0\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} & \leq & C\varepsilon^{-1/4}, \\ \|\boldsymbol{w}(\varepsilon) - \mathscr{I}\boldsymbol{\zeta}^0\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^2\times\mathrm{L}^2(\Omega)} & \leq & C\varepsilon^{1/4}, \end{array} \tag{4.16}$$

où $\mathscr{I}$ *est le plongement canonique des générateurs* 2D *dans l'espace des champs de 1-formes* 3D.

Preuve. L'estimation en norme $\mathrm{H}^1(\Omega)$ est une conséquence du théorème précédent et de la proposition 3.8.

D'autre part, le lemme 4.2 montre qu'on a l'estimation

$$\|\boldsymbol{w}(\varepsilon) - \boldsymbol{w}^{[N]}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^2\times\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{N/2-4},$$

compte tenu du fait que la norme $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est majorée par la norme $\mathrm{H}^1(\Omega)$. En faisant un raisonnement similaire à celui de la démonstration du théorème 4.4, la proposition 3.8 donne le résultat. ∎

Enfin, on peut revenir à la solution $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ des équations 3D définie par

$$\boldsymbol{u}(\varepsilon) = \boldsymbol{\mu}[\varepsilon]\big(\boldsymbol{w}(\varepsilon)\big) = \begin{cases} w_\sigma(\varepsilon) - \varepsilon x_3 b_\sigma^\alpha(x_1,x_2) w_\alpha(\varepsilon), \\ w_3(\varepsilon). \end{cases} \tag{4.17}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.6 *Soit* $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ *le champ de 1-formes solution des équations tridimensionnelles. Alors il existe une série formelle* $\tilde{\boldsymbol{v}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\tilde{\boldsymbol{v}}^{k/2}$ *à coefficients*

$$\tilde{\boldsymbol{v}}^{k/2}(x_1,x_2,x_3) \in \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1 S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big),$$

une série $\tilde{\boldsymbol{W}}[\varepsilon^{1/2}] := \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\tilde{\boldsymbol{W}}^{k/2}$ *à coefficients*

$$\tilde{\boldsymbol{W}}^{k/2}(T,s,x_3) \in \mathscr{C}^\infty\big(I\times\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{T}}(\mathbb{R}^+)\big),$$

et une série $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{k/2}$ *à coefficients*

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{k/2}(R,s,x_3) \in \mathscr{C}^\infty\big(\partial S_0, \boldsymbol{\mathfrak{H}}(\Sigma^+)\big),$$

dont les premiers termes s'écrivent

$$\tilde{\boldsymbol{v}}[\varepsilon^{1/2}] = \boldsymbol{\zeta}^0 + \varepsilon^{1/2}\boldsymbol{\zeta}^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{4.18}$$

$$\tilde{\boldsymbol{W}}[\varepsilon^{1/2}] = \begin{cases} \tilde{W}_T[\varepsilon^{1/2}] &= \qquad \varepsilon^{1/2}(Z_T^{1/2} - x_3\partial_T Z_3^0) & +\mathcal{O}(\varepsilon), \\ \tilde{W}_s[\varepsilon^{1/2}] &= \qquad \varepsilon^{1/2} Z_s^{1/2} & +\mathcal{O}(\varepsilon), \\ \tilde{W}_3[\varepsilon^{1/2}] &= Z_3^0 + \varepsilon^{1/2} Z_3^{1/2} & +\mathcal{O}(\varepsilon), \end{cases} \tag{4.19}$$

et

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}[\varepsilon^{1/2}] = \varepsilon\, \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}), \tag{4.20}$$

où, si $\boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}]$ *et* $\boldsymbol{Z}'[\varepsilon^{1/2}]$ *est la solution du problème en séries formelles* (2.53) *du corollaire* 2.12*, on a*

$$\boldsymbol{\zeta}^0 = \boldsymbol{\zeta}'^0, \quad \boldsymbol{\zeta}^{1/2} = \boldsymbol{\zeta}'^{1/2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Z}^0 = \boldsymbol{Z}'^0,$$

ainsi que

$$Z_T^{1/2} = Z_T'^{\,1/2} \quad \text{et} \quad Z_s^{1/2} = Z_s'^{\,1/2},$$

et telles que les sommes partielles

$$\boldsymbol{u}^{[N]}(\varepsilon) := \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^{k/2}\big(\tilde{\boldsymbol{v}}^{k/2} + \chi\tilde{\boldsymbol{W}}^{k/2} + \chi\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{k/2}\big)$$

définies pour tout $N \geq 0$ *vérifient l'estimation*

$$\|\boldsymbol{u}(\varepsilon) - \boldsymbol{u}^{[N]}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \leq C\varepsilon^{N/2}. \tag{4.21}$$

De même, si $\boldsymbol{\zeta}^0$ *est la solution du problème* (4.15)*, alors on a*

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}(\varepsilon) - \mathscr{I}\boldsymbol{\zeta}^0\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} &\leq C\varepsilon^{-1/4}, \\ \|\boldsymbol{u}(\varepsilon) - \mathscr{I}\boldsymbol{\zeta}^0\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^2\times\mathrm{L}^2(\Omega)} &\leq C\varepsilon^{1/4}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Preuve. On définit tout d'abord l'action de l'opérateur $\boldsymbol{\mu}[\varepsilon]$ sur les séries formelles $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$ en développant les coefficients $b^\alpha_\sigma(\varepsilon^{1/2}T, s)$ en $T = 0$ et $b^\alpha_\sigma(\varepsilon R, s)$ en $R = 0$. On définit alors naturellement les séries formelles $\tilde{\boldsymbol{v}}[\varepsilon^{1/2}]$ $\tilde{\boldsymbol{W}}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}[\varepsilon^{1/2}]$.

Puisque le *shifter* diffère de l'identité par un terme d'ordre 1 en ε et d'ordre de dérivation 0, il est clair que les séries ainsi obtenues ont les mêmes termes d'ordres 0 et 1 en $\varepsilon^{1/2}$ que les séries $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$, $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$.

Enfin, les estimations pour $\boldsymbol{w}(\varepsilon) - \boldsymbol{w}^N(\varepsilon)$ entraînent des estimations similaires pour $\boldsymbol{u}(\varepsilon) - \boldsymbol{u}^N(\varepsilon)$, et on en déduit ainsi le théorème. ■

On retrouve ainsi le résultat de convergence obtenu dans [12]. De plus, l'équation (4.22) est une amélioration des estimations de C. Mardare (voir [40]) obtenues à l'aide de l'introduction de correcteurs.

4.3 Comparaison avec les modèles 2D admissibles

Dans cette sous-section, on utilise les résultats de la proposition 3.8 et les résultats du chapitre V pour comparer la solution $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ des équations 3D après changement d'échelle, et la solution $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ d'un modèle 2D admissible. Rappelons qu'on note $\boldsymbol{f}^0$ le premier terme du développement du champ de 1-forme $\boldsymbol{f}^\varepsilon(\varepsilon)$ (voir l'hypothèse 4.2 du chapitre II).

Proposition 4.7 *Soit $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$ la solution shiftée des équations tridimensionnelles après le changement d'échelle, soit $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ la solution* 3D *correspondante, et soit $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ la solution du système*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \boldsymbol{K}(\varepsilon)\boldsymbol{z}(\varepsilon) & = & \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{f}^0\,\mathrm{d}x_3 & \textit{dans}\quad S_0, \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}^0\boldsymbol{z}(\varepsilon) & = & 0 & \textit{sur}\quad \partial S_0, \end{array}\right. \tag{4.23}$$

où $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ est un modèle 2D *admissible, et où $\vec{\boldsymbol{\delta}}^0$ est défini par l'équation*

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}^0\boldsymbol{z} = \big(z_r, z_s, z_3, \partial_r z_3\big)\big|_{\partial S_0}.$$

Alors on a les estimations

$$\begin{array}{rcl} \|\boldsymbol{w}(\varepsilon) - \mathscr{I}\boldsymbol{z}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} & \leq & C\varepsilon^{1/4}, \\ \|\boldsymbol{w}(\varepsilon) - \mathscr{I}\boldsymbol{z}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^2\times\mathrm{L}^2(\Omega)} & \leq & C\varepsilon^{1/4}, \\ \|\boldsymbol{w}(\varepsilon) - \mathscr{I}\boldsymbol{z}(\varepsilon)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^3} & \leq & C\varepsilon^{1/2}, \end{array} \tag{4.24}$$

pour le déplacement shifté, *et*

$$\begin{array}{rcl} \|\boldsymbol{u}(\varepsilon) - \mathscr{I}\boldsymbol{z}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} & \leq & C\varepsilon^{1/4}, \\ \|\boldsymbol{u}(\varepsilon) - \mathscr{I}\boldsymbol{z}(\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^2\times\mathrm{L}^2(\Omega)} & \leq & C\varepsilon^{1/4}, \\ \|\boldsymbol{u}(\varepsilon) - \mathscr{I}\boldsymbol{z}(\varepsilon)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^3} & \leq & C\varepsilon^{1/2}, \end{array} \tag{4.25}$$

pour le déplacement 3D*.*

Preuve. La démonstration est claire à partir de la proposition 3.8 en utilisant les mêmes méthodes que dans la démonstration du théorème 4.4, et en utilisant le fait que les résultats du chapitre V donnent un développement asymptotique complet de $\mathscr{I}\boldsymbol{z}(\varepsilon) \in \mathscr{C}^\infty\big(I, \Gamma(T_1S_0)\times\mathscr{C}^\infty(S_0)\big)$. ∎

En particulier, on retrouve le fait que le déplacement tridimensionnel et la solution du modèle de Koiter convergent vers la même solution lorsque ε tend vers 0, ce qui constitue le résultat figurant dans [13] pour le cas où la surface moyenne de la coque est elliptique.

Comme conséquence de la proposition précédente et des estimations (3.16) du chapitre V, on a le corollaire suivant :

Corollaire 4.8 *La différence entre deux solutions* $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ *et* $\boldsymbol{z}'(\varepsilon)$ *des systèmes* (4.23) *associés à deux modèles* 2D *admissibles différents* $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ *et* $\boldsymbol{K}'(\varepsilon)$ *approchent la solution tridimensionnelle* $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ *avec le même taux d'erreur en* ε *.*

Ainsi, les différents modèles 2D ont tous les mêmes performances dans l'approximation de la solution 3D dans le cas des coques elliptique.

Remarque 4.9 Tous ces résultats sont encore valables pour le modèle en carte, lorsque la surface moyenne S_0 est déterminée par une unique carte locale. Les estimations d'erreurs sont alors identiques. En particulier, la solution du modèle en carte et la solution d'un modèle 2D admissible approchent la solution $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ avec la même estimation. ■

La présence du terme $-x_3\partial_T Z_3^0$ dans le développement de $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\tilde{\boldsymbol{W}}[\varepsilon^{1/2}]$ limite les performances des modèles 2D admissibles. Afin de le prendre en compte, on pose la définition suivante (voir [38, 39]) :

Définition 4.10 Soit $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ un modèle 2D admissible, et $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ la solution du système (4.23) associé. On appelle *déplacement de Kirchhoff-Love associé à* $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ le champ de 1-forme défini par l'équation

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{KL}}\big(\boldsymbol{z}(\varepsilon)\big) := \begin{cases} z_\sigma(\varepsilon) - \varepsilon x_3\big(\partial_\sigma z_3(\varepsilon) + 2b_\sigma^\alpha z_\alpha(\varepsilon)\big), \\ z_3(\varepsilon), \end{cases} \tag{4.26}$$

où b_σ^α désigne la seconde forme fondamentale de la surface moyenne S_0 . ■

D'après l'équation (4.2) du chapitre I, on a pour tout déplacement de Kirchhoff-Love, l'équation

$$\gamma_{\alpha 3}(x_\alpha, \varepsilon\, x_3; \mathrm{D}_\alpha, \varepsilon^{-1}\partial_3)\boldsymbol{U}^{\mathrm{KL}}\big(\boldsymbol{z}(\varepsilon)\big) = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{4.27}$$

La proposition 3.8 permet alors de montrer le résultat suivant :

Proposition 4.11 *Soit* $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ *la solution des équations tridimensionnelles, et soit* $\boldsymbol{K}(\varepsilon)$ *un modèle* 2D *admissible. Alors si* $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ *désigne la solution du système* (4.23), *on a*

$$\|\boldsymbol{u}(\varepsilon) - \boldsymbol{U}^{\mathrm{KL}}\big(\boldsymbol{z}(\varepsilon)\big)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^2\times\mathrm{L}^2(\Omega)} \le C\varepsilon^{3/4}. \tag{4.28}$$

L'estimation (4.28) est encore valable pour le déplacement $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$. De plus, ce résultat est encore vrai pour le modèle 2D en carte lorsque la surface S est déterminée par une unique carte locale. Enfin, on a la même estimation pour le déplacement

$$\begin{cases} z_\sigma(\varepsilon) - \varepsilon x_3\partial_\sigma z_3(\varepsilon), \\ z_3(\varepsilon), \end{cases}$$

construit à partir du déplacement $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ solution du problème 4.23 associé à un modèle 2D. Ces estimations améliorent les résultats figurant dans [39].

4.4 Estimations en norme d'énergie

Sur la coque physique Ω^ε , on considère la norme d'énergie

$$\|\boldsymbol{u}\|_E := \left(\int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijk\ell} e_{ij}(\boldsymbol{u}) e_{k\ell}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}t\right)^{1/2}, \tag{4.29}$$

où $\{t^i\}$ est un système de coordonnées euclidiennes de $\mathbb{R}^3$, où $A^{ijk\ell}$ est le tenseur de rigidité, et où $e_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ avec ∂_i la dérivée par rapport à la variable t^i .

Après changement de variables pour passer dans un système de coordonnées normales, on a aussi

$$\|\boldsymbol{u}\|_E := \left(\int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijk\ell}(h) \gamma_{ij}(h)(\boldsymbol{u}) \gamma_{k\ell}(h)(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}y\right)^{1/2}, \tag{4.30}$$

où $(y^\alpha, y^3 = h)$ est un système de coordonnées normales sur la coque. Dans ce système de coordonnées, le tenseur de rigidité s'écrit

$$A^{ijk\ell}(h) = \lambda g^{ij}(h) g^{k\ell}(h) + \mu\big(g^{ik}(h) g^{j\ell}(h) + g^{i\ell}(h) g^{jk}(h)\big),$$

où $g^{ij}(h)$ est l'inverse du tenseur métrique. Les composantes du tenseur des déformations s'écrivent (voir les équations (4.2) du chapitre I)

$$\begin{aligned}
\gamma_{33}(h)(\boldsymbol{u}) &= \partial_3^\varepsilon u_3, \\
\gamma_{\alpha 3}(h)(\boldsymbol{u}) &= \tfrac{1}{2}(\partial_\alpha u_3 + \partial_3^\varepsilon u_\alpha) + b_\alpha^\beta(h) u_\beta, \\
\gamma_{\alpha\beta}(h)(\boldsymbol{u}) &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_\alpha^h u_\beta + \mathrm{D}_\beta^h u_\alpha) - b_{\alpha\beta}(h) u_3.
\end{aligned}$$

Dans le but d'obtenir des estimations d'erreurs dans la norme d'énergie, le lemme suivant récapitule les ordres de grandeur des différents termes apparaissant dans le développement asymptotique du déplacement. Dans toute la suite, l'expression $\mathcal{O}(\varepsilon^p)$ représente une quantité d'ordre ε^p : si $g = \mathcal{O}(\varepsilon^p)$, alors on a

$$c\varepsilon^p \leq g \leq C\varepsilon^p$$

pour deux constantes non nulles c et C . La notation $g \leq \mathcal{O}(\varepsilon^p)$ signifie qu'on a juste l'inégalité $g \leq C\varepsilon^p$.

Lemme 4.12 *On a les estimations suivantes :*

(i) *Soient* $\boldsymbol{\zeta}(x_\alpha)$ *un générateur* 2D *et* $\boldsymbol{v}(x_\alpha, x_3)$ *un champ de 1-formes sur la variété* Ω *. Ces deux éléments définissent des champs de 1-formes* $\boldsymbol{\zeta}(x_\alpha)$ *et* $\boldsymbol{v}(x_\alpha, \varepsilon^{-1}h)$ *sur la variété* Ω^ε *dont on note* ζ_i *et* v_i *les composantes dans un système de coordonnées normales. Alors on a les estimations :*

$$\|\zeta_i\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \quad et \quad \|\partial_\alpha \zeta_i\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}), \tag{4.31}$$

ainsi que les estimations

$$\|v_i\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}), \quad \|\partial_\alpha v_i\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \quad et \quad \|\partial_h v_i\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2}). \tag{4.32}$$

(ii) *Soient* $\boldsymbol{Z}(\varepsilon^{-1/2}r, s)$ *un terme de couche limite* 2D *indépendant de* x_3 *, et soit* $\boldsymbol{W}(\varepsilon^{-1/2}r, s, x_3)$ *un terme de couche limite* 2D *dépendant de* x_3 *. Si* $\chi(r)$ *est une fonction de troncature, alors les termes* $\chi(r)\boldsymbol{Z}(\varepsilon^{-1/2}r, s)$ *et* $\chi(r)\boldsymbol{W}(\varepsilon^{-1/2}r, s, \varepsilon^{-1}h)$ *définissent des champs de 1-formes sur* Ω^ε *, et on a les estimations*

$$\|\chi Z_i\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/4}) \quad et \quad \|\partial_\alpha \chi Z_i\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/4}) \tag{4.33}$$

ainsi que les estimations

$$\|\chi W_i\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/4}), \quad \|\partial_\alpha \chi W_i\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/4}) \quad et \quad \|\partial_h \chi W_i\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/4}). \tag{4.34}$$

(iii) *Soit* $\boldsymbol{\Phi}(\varepsilon^{-1}r, s, x_3)$ *un terme de couche limite* 3D *sur la variété* Ω *. Alors l'éléments* $\chi(r)\boldsymbol{\Phi}(\varepsilon^{-1}r, s, \varepsilon^{-1}h)$ *définit un champ de 1-formes sur* Ω^ε *, et on a les estimations*

$$\|\chi \Phi_i\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad et \quad \|\partial_j \chi \Phi_i\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(1), \tag{4.35}$$

où ∂_j *représente* ∂_α *ou* ∂_h *.*

Preuve. Il s'agit de simple changements de variables dans les intégrales. La présence de la fonction de troncature ne joue aucun rôle en raison des propriétés de décroissance exponentielle des termes de couches limites. ■

Afin de donner des estimations dans la norme d'énergie, il convient de détailler le développement asymptotique de la solution $\boldsymbol{u}^\varepsilon$. D'après le théorème 4.6 et les estimations du lemme précédent, il existe un développement asymptotique en puissances de $\varepsilon^{1/2}$ du déplacement $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ comportant les termes

$$\tilde{\boldsymbol{v}}^{k/2}(x_1, x_2, \varepsilon^{-1}h)$$

de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω^ε, des termes de couches limites 2D de classe $\mathscr{C}^\infty$

$$\chi(r)\tilde{\boldsymbol{W}}^{k/2}(\varepsilon^{-1/2}r, s, \varepsilon^{-1}h)$$

exponentiellement décroissants en $T = \varepsilon^{-1/2}r$, et des termes de couches limites 3D

$$\chi(r)\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{k/2}(\varepsilon^{-1}r, s, \varepsilon^{-1}h)$$

exponentiellement décroissants en $\varepsilon^{-1}r$ et concentrant la singularité de la solution lié aux arêtes de la coque. Tous ces termes proviennent des termes figurant dans le théorème 4.6 après changement d'échelle pour passer de la variété Ω à la variété Ω^ε.

Dans un premier temps, nous allons déterminer précisément les termes précédents pour $k = 0, 1$ et 2. Rappelons que ces termes sont construits à partir de deux séries formelles $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ déterminées par le théorème 2.10. La proposition suivante précise la proposition 3.8 :

Proposition 4.13 *Soient* $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$, $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ *et* $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$ *les séries formelles données par les définitions* 3.1, 3.3 *et* 3.5, *et soient* $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ *et* $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\boldsymbol{Z}^{k/2}$ *les séries formelles déterminées par le théorème* 2.10. *Alors on a*

$$\boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{\zeta}^0, \quad \boldsymbol{v}^{1/2} = \boldsymbol{\zeta}^{1/2}, \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{v}^1 = \boldsymbol{\zeta}^1 + \boldsymbol{V}^1\boldsymbol{\zeta}^0 = \begin{cases} \zeta^1_\sigma - x_3(\mathrm{D}_\sigma\zeta^0_3 + b^\alpha_\sigma\zeta^0_\alpha), \\ \zeta^1_3 - x_3 p\gamma^\alpha_\alpha(\boldsymbol{\zeta}^0), \end{cases} \tag{4.36}$$

et en coordonnées (r, s, x_3)

$$\boldsymbol{W}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z^0_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{W}^{1/2} = \begin{pmatrix} Z^{1/2}_T & -x_3\partial_T Z^0_3 \\ Z^{1/2}_s & \\ Z^{1/2}_3 & \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

et

$$\boldsymbol{W}^1 = \begin{pmatrix} Z^1_T & -x_3\partial_T Z^{1/2}_3 & \\ Z^1_s & -x_3\partial_s Z^0_3 & \\ Z^1_3 & -x_3 p\partial_T Z^{1/2}_T + x_3 p b^\alpha_\alpha(0,s)Z^0_3 & +\frac{x_3^2}{2}p\partial_{TT}Z^0_3 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

où $b^\alpha_\alpha(0,s)$ *désigne la courbure de la surface moyenne* S_0 *le long du bord* $r = 0$. *Enfin les deux termes* $\boldsymbol{\Phi}^0$ *et* $\boldsymbol{\Phi}^{1/2}$ *sont nuls tandis que le terme* $\boldsymbol{\Phi}^1$ *est génériquement non nul.*

Preuve. L'équation (4.36) découle directement de la définition 3.1 de la série formelle $\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$. Les équations (4.37) sont des conséquences de la proposition 3.8, de même que les propriétés des termes $\boldsymbol{\Phi}^{k/2}$ pour $k = 0, 1$ et 2.

Il suffit donc de montrer l'équation (4.38). D'après la définition 3.3, on a

$$\boldsymbol{W}^1 = \boldsymbol{\mathcal{V}}^0 \boldsymbol{Z}^1 + \boldsymbol{\mathcal{V}}^{1/2} \boldsymbol{Z}^{1/2} + \boldsymbol{\mathcal{V}}^1 \boldsymbol{Z}^0. \tag{4.39}$$

D'autre part, d'après l'équation (3.4), on a

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^0 = \boldsymbol{\mathcal{V}}^{0,0}, \quad \boldsymbol{\mathcal{V}}^{1/2} = \boldsymbol{\mathcal{V}}^{0,1/2} + \boldsymbol{\mathcal{V}}^{1,-1/2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\mathcal{V}}^1 = \boldsymbol{\mathcal{V}}^{0,1} + \boldsymbol{\mathcal{V}}^{1,0} + \boldsymbol{\mathcal{V}}^{2,-1}.$$

Rappelons que les opérateurs $\boldsymbol{\mathcal{V}}^{k,n/2}$ sont déterminés par la formule (3.1) à partir du développement des opérateurs $\boldsymbol{V}^k$ dans le système de coordonnées (T, s, x_3). En particulier, $\boldsymbol{\mathcal{V}}^0 = \boldsymbol{\mathcal{V}}^{0,0}$ est l'opérateur identité, tandis que $\boldsymbol{\mathcal{V}}^{0,n/2} = 0$ pour tout $n \geq 1$. Compte tenu du fait que $\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}^\alpha z_\alpha - b_\alpha^\alpha z_3$, on rappelle qu'on a

$$\boldsymbol{V}^1 \boldsymbol{z} = \begin{cases} -x_3(\mathrm{D}_\sigma z_3 + b_\sigma^\alpha z_\alpha), \\ -x_3 p(\mathrm{D}^\alpha z_\alpha - b_\alpha^\alpha z_3). \end{cases}$$

Ceci montre donc que pour tout $\boldsymbol{Z}$ on a

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^{1,-1/2}(\boldsymbol{Z}) = \begin{cases} -x_3 \partial_T Z_3, \\ 0, \\ -x_3 p \partial_T Z_T, \end{cases}$$

et

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^{1,0}(\boldsymbol{Z}) = \begin{cases} -x_3(b_r^r(0,s) Z_T + b_r^s(0,s) Z_s), \\ -x_3(\partial_s Z_3 + b_s^r(0,s) Z_T + b_s^s(0,s) Z_s), \\ -x_3 p(\partial_s Z_s + \Gamma_{\alpha r}^\alpha(0,s) Z_T + \Gamma_{\alpha s}^\alpha(0,s) Z_s - b_\alpha^\alpha(0,s) Z_3), \end{cases}$$

où $\Gamma_{\alpha r}^\alpha(0,s)$ désigne la somme $\Gamma_{rr}^r(0,s) + \Gamma_{sr}^s(0,s)$ où les composantes $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(0,s)$ sont les symboles de Christoffel associés au système de coordonnées (r,s) et évalués sur le bord de S_0. D'autre part, on a d'après l'équation (3.16) du chapitre III que

$$\boldsymbol{V}^2(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} \frac{x_3^2}{2} p \mathrm{D}_\sigma \gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}), \\ \frac{x_3^2}{2}\big(p\kappa_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) + \frac{p}{2\mu} M_3(\boldsymbol{z})\big), \end{cases}$$

où M_3 est la composante transverse de l'opérateur de membrane, et où $\kappa_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}^\alpha(\mathrm{D}_\alpha z_3 + b_\alpha^\beta z_\beta)$. On en déduit donc que

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^{2,-1}(\boldsymbol{Z}) = \begin{cases} \frac{x_3^2}{2} p \partial_{TT} Z_T, \\ 0, \\ \frac{x_3^2}{2} p \partial_{TT} Z_3. \end{cases}$$

Les équations précédentes et l'équation (4.39) montrent alors le résultat en utilisant le fait que $\boldsymbol{Z}^0 = (0, 0, Z_3^0)$. ∎

Les premiers termes des développements précédents concernent les séries formelles

$\boldsymbol{v}[\varepsilon^{1/2}]$, $\boldsymbol{W}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{\Phi}[\varepsilon^{1/2}]$ intervenant dans la construction du développement asymptotique du déplacement *shifté* $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$.

Dans le but d'obtenir des estimations d'énergie concernant le déplacement *non-shifté* $\boldsymbol{u}^\varepsilon$, on rappelle (voir le théorème 4.6) qu'au déplacement $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ sur la variable $\Omega = S \times (-1,1)$ lié au déplacement physique $\boldsymbol{u}^\varepsilon$, on associe trois séries formelles

$$\tilde{\boldsymbol{v}}[\varepsilon^{1/2}], \quad \tilde{\boldsymbol{W}}[\varepsilon^{1/2}] \quad \text{et} \quad \tilde{\boldsymbol{\Phi}}[\varepsilon^{1/2}]$$

dont les coefficients sont les coefficients du développement asymptotique de $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$. Ces séries formelles sont déterminées à partir des deux séries formelles $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}]$ solutions du problème réduit, mais avec des opérateurs de reconstruction $\tilde{\boldsymbol{V}}[\varepsilon^{1/2}]$ et $\tilde{\boldsymbol{Q}}[\varepsilon^{1/2}]$ définis par

$$\tilde{\boldsymbol{V}}[\varepsilon^{1/2}] = \begin{cases} V_\sigma[\varepsilon^{1/2}] - \varepsilon x_3 b_\sigma^\alpha V_\sigma[\varepsilon^{1/2}], \\ V_3[\varepsilon^{1/2}] \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{\boldsymbol{Q}}[\varepsilon^{1/2}] = \begin{cases} Q_\sigma[\varepsilon^{1/2}] - \varepsilon x_3 b_\sigma^\alpha Q_\sigma[\varepsilon^{1/2}], \\ Q_3[\varepsilon^{1/2}]. \end{cases}$$

En particulier, on a $\tilde{\boldsymbol{Q}}^0 = \tilde{\boldsymbol{Q}}^1 = 0$, $\tilde{\boldsymbol{V}}^0 = \boldsymbol{V}^0$,

$$\tilde{\boldsymbol{V}}^1(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} -x_3(\mathrm{D}_\sigma z_3 + 2b_\sigma^\alpha z_\alpha), \\ -x_3 p \gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}), \end{cases}$$

et

$$\tilde{\boldsymbol{V}}^2(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} \dfrac{x_3^2}{2}(p\mathrm{D}_\sigma \gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) + 2b_\sigma^\alpha \theta_\alpha(\boldsymbol{z})), \\ \dfrac{x_3^2}{2}\big(p\kappa_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) + \dfrac{p}{2\mu} M_3(\boldsymbol{z})\big). \end{cases}$$

De la proposition précédente, on déduit alors le résultat suivant :

Corollaire 4.14 *Soient* $\tilde{\boldsymbol{v}}[\varepsilon^{1/2}]$, $\tilde{\boldsymbol{W}}[\varepsilon^{1/2}]$ *et* $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}[\varepsilon^{1/2}]$ *les séries formelles définies par les relations*

$$\tilde{\boldsymbol{v}}[\varepsilon^{1/2}] = \begin{cases} v_\sigma[\varepsilon^{1/2}] - \varepsilon x_3 b_\sigma^\alpha(x_1, x_2) v_\sigma[\varepsilon^{1/2}], \\ v_3[\varepsilon^{1/2}], \end{cases}$$

dans tout système de coordonnées sur S_0,

$$\tilde{\boldsymbol{W}}[\varepsilon^{1/2}] = \begin{cases} W_\sigma[\varepsilon^{1/2}] - \varepsilon x_3 b_\sigma^\alpha(\varepsilon^{1/2} T, s) W_\sigma[\varepsilon^{1/2}], \\ W_3[\varepsilon^{1/2}], \end{cases}$$

dans le système de coordonnées (T,s,x_3) *et*

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}[\varepsilon^{1/2}] = \begin{cases} \Phi_\sigma[\varepsilon^{1/2}] - \varepsilon x_3 b_\sigma^\alpha(\varepsilon R, s)\Phi_\sigma[\varepsilon^{1/2}], \\ \Phi_3[\varepsilon^{1/2}], \end{cases}$$

dans le système de coordonnées (R,s,x_3). *Soient de plus* $\boldsymbol{\zeta}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\zeta}^{k/2}$ *et* $\boldsymbol{Z}[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\boldsymbol{Z}^{k/2}$ *les séries formelles déterminées par le théorème* 2.10. *Alors on a*

$$\tilde{\boldsymbol{v}}^0 = \boldsymbol{\zeta}^0, \quad \tilde{\boldsymbol{v}}^{1/2} = \boldsymbol{\zeta}^{1/2}, \quad et \quad \tilde{\boldsymbol{v}}^1 = \boldsymbol{\zeta}^1 + \tilde{\boldsymbol{V}}^1\boldsymbol{\zeta}^0 = \begin{cases} \zeta_\sigma^1 - x_3(\mathrm{D}_\sigma\zeta_3^0 + 2b_\sigma^\alpha\zeta_\alpha^0), \\ \zeta_3^1 - x_3 p\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{\zeta}^0). \end{cases} \tag{4.40}$$

De plus, on a

$$\tilde{\boldsymbol{W}}^0 = \boldsymbol{W}^0, \quad \tilde{\boldsymbol{W}}^{1/2} = \boldsymbol{W}^{1/2} \quad et \quad \tilde{\boldsymbol{W}}^1 = \boldsymbol{W}^1, \tag{4.41}$$

où $\boldsymbol{W}^0$, $\boldsymbol{W}^{1/2}$ *et* $\boldsymbol{W}^1$ *sont déterminés par les équations* (4.37) *et* (4.38). *Enfin les deux termes* $\tilde{\mathbf{\Phi}}^0$ *et* $\tilde{\mathbf{\Phi}}^{1/2}$ *sont nuls et on a* $\tilde{\mathbf{\Phi}}^1 = \mathbf{\Phi}^1$.

Ainsi, l'unique différence dans les premiers termes du développement asymptotique des déplacements shiftés et non-shiftés $\boldsymbol{w}(\varepsilon)$ et $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ sur Ω se situe au niveau du terme $\boldsymbol{v}^1$.

Le corollaire précédent permet de calculer les contributions en ε des divers termes du développement dans l'estimation de la norme énergie du déplacement $\boldsymbol{u}^\varepsilon$.

Proposition 4.15 *Soit* $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ *la solution des équations tridimensionnelles sur la coque* Ω^ε, *alors si le premier terme* $\boldsymbol{\zeta}^0$ *du développement asymptotique de* $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ *est non nul, on a*

$$\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_E = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \tag{4.42}$$

où $\|\cdot\|_E$ *désigne la norme d'énergie* (4.29).

Preuve. Le calcul de la norme $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_E$ nécessite de calculer les composantes $\gamma_{ij}(h)(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$ du tenseur des déformations et d'évaluer leurs normes $\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)$. Pour cela, on utilise le développement asymptotique de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ en calculant les contributions des différents termes. En raison de la structure particulière du développement et de l'expression du tenseur des déformations, on groupe en général les trois ou quatre premiers termes du développement asymptotique. On vérifie ensuite que les termes d'ordres supérieurs en ε ne donnent pas de contributions plus fortes.

Considérons tout d'abord les termes provenant du tenseur des déformations surfaciques *(plane-strain)* : d'après l'expression (3.15) du chapitre II, et en utilisant les équations (4.31) et le corollaire précédent, on a tout d'abord de manière claire

$$\|\gamma_{\alpha\beta}(h)(\tilde{\boldsymbol{v}}^0 + \varepsilon^{1/2}\tilde{\boldsymbol{v}}^{1/2} + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{v}}^1)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \tag{4.43}$$

De plus, en utilisant les équations (4.32), on a pour tout $k \geq 3$,

$$\|\gamma_{\alpha\beta}(h)(\varepsilon^{k/2}\tilde{\boldsymbol{v}}^{k/2})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{(k+1)/2}). \tag{4.44}$$

D'autre part, en développant le tenseur $\gamma_{\alpha\beta}(h)$ dans les variables (T, s, x_3), on voit en utilisant les équations (4.33), que

$$\|\gamma_{\alpha\beta}(h)\big(\chi(\tilde{\boldsymbol{W}}^0 + \varepsilon^{1/2}\tilde{\boldsymbol{W}}^{1/2} + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{W}}^1)\big)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/4}). \tag{4.45}$$

En effet, cette estimation provient du fait que le terme $\tilde{\boldsymbol{W}}^0 = (0, 0, Z_3^0)$ ne dépend pas de h et que l'opérateur $\gamma_{\alpha\beta}(h)$ est d'ordre 0 en z_3 (voir l'équation (4.33)). D'après les équations (4.34), on a pour tout $k \geq 3$,

$$\|\gamma_{\alpha\beta}(h)(\varepsilon^{k/2}\chi\tilde{\boldsymbol{W}}^{k/2})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{(2k+1)/4}). \tag{4.46}$$

Enfin, on a de même pour tout $k \geq 2$

$$\|\gamma_{\alpha\beta}(h)(\varepsilon^{k/2}\chi\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{k/2})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{k/2}).$$

Pour les termes associés au tenseur des déformations de cisaillement *(shear-strain)*, on rappelle qu'on a

$$\begin{aligned} \gamma_{\sigma 3}(h)(\boldsymbol{u}) &= \tfrac{1}{2}(\partial_\sigma u_3 + \partial_h u_\sigma) + b_\sigma^\alpha(h) u_\alpha \\ &= \tfrac{1}{2}(\partial_\sigma u_3 + \partial_h u_\sigma) + \textstyle\sum_{k=0}^\infty h^k (b^{k+1})_\sigma^\alpha u_\alpha. \end{aligned}$$

Pour évaluer le terme $\gamma_{\sigma 3}(h)(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$, on remarque qu'on retrouve dans le développement de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ une structure de déplacement de Kirchhoff-Love (voir les équations (4.26) et (4.27)) liant le terme $\tilde{\boldsymbol{v}}^0 = \boldsymbol{\zeta}^0$ au terme $\tilde{\boldsymbol{v}}^1 = \boldsymbol{\zeta}^1 + \tilde{\boldsymbol{V}}^1\boldsymbol{\zeta}^0$. Ainsi, on calcule que

$$\begin{aligned} 2\gamma_{\sigma 3}(h)(\tilde{\boldsymbol{v}}^0 + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{v}}^1) = \partial_\sigma \zeta_3^0 + 2b_\sigma^\alpha(h)\zeta_\alpha^0& \\ + \varepsilon\partial_\sigma\zeta_3^1 - (\partial_\sigma\zeta_3^0 + 2b_\sigma^\alpha\zeta_\alpha^0) - h b_\sigma^\alpha(h)(\partial_\alpha\zeta_3^0 + 2b_\alpha^\beta\zeta_\beta^0).& \end{aligned}$$

On trouve donc compte tenu du fait que $b_\sigma^\alpha(h) = \sum_{k=0}^\infty h^k(b^{k+1})_\sigma^\alpha$ qui implique que $b_\sigma^\alpha(h) - b_\sigma^\alpha = h b_\sigma^\beta(h) b_\beta^\alpha$,

$$2\gamma_{\sigma 3}(h)(\tilde{\boldsymbol{v}}^0 + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{v}}^1) = \varepsilon\partial_\sigma\zeta_3^1 - h b_\sigma^\alpha(h)\partial_\alpha\zeta_3^0.$$

Le membre de gauche dans l'équation précédente est alors en $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$ pour la norme $\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)$. Il est alors clair que le terme

$$2\gamma_{\sigma 3}(h)(\tilde{\boldsymbol{v}}^0 + \varepsilon^{1/2}\tilde{\boldsymbol{v}}^{1/2} + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{v}}^1) = \varepsilon^{1/2}\partial_\sigma\zeta_3^{1/2} + \varepsilon^{1/2}b_\sigma^\alpha(h)\zeta_\alpha^{1/2} + \varepsilon\partial_\sigma\zeta_3^1 - h b_\sigma^\alpha(h)\partial_\alpha\zeta_3^0$$

est alors d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en norme $\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)$. Pour obtenir une meilleure estimation, on prend alors en compte le terme $\tilde{\boldsymbol{v}}^{3/2} = \boldsymbol{\zeta}^{3/2} + \tilde{\boldsymbol{V}}^1\boldsymbol{\zeta}^{1/2}$ dont la partie surfacique contient le terme de Kirchhoff-Love

$$-x_3(\partial_\sigma\zeta_3^{1/2} + 2b_\sigma^\alpha\zeta_\alpha^{1/2})$$

associé au terme $\boldsymbol{\zeta}^{1/2}$. On a alors d'après les calculs précédents :

$$2\gamma_{\sigma 3}(h)(\tilde{\boldsymbol{v}}^0 + \varepsilon^{1/2}\tilde{\boldsymbol{v}}^{1/2} + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{v}}^1 + \varepsilon^{3/2}\tilde{\boldsymbol{v}}^{3/2}) = \varepsilon\partial_\sigma\zeta_3^1 \\ - hb_\sigma^\alpha(h)\partial_\alpha\zeta_3^0 + \varepsilon^{3/2}\partial_\sigma\zeta_3^{3/2} - \varepsilon^{1/2}hb_\sigma^\alpha(h)\partial_\alpha\zeta_3^{1/2}.$$

On en déduit donc que

$$\|\gamma_{\alpha 3}(h)(\tilde{\boldsymbol{v}}^0 + \varepsilon^{1/2}\tilde{\boldsymbol{v}}^{1/2} + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{v}}^1 + \varepsilon^{3/2}\tilde{\boldsymbol{v}}^{3/2})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}). \tag{4.47}$$

D'autre part, les estimations (4.32) montrent que pour tout $k \geq 4$,

$$\|\gamma_{\alpha 3}(h)(\varepsilon^{k/2}\tilde{\boldsymbol{v}}^{k/2})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{(k-1)/2}). \tag{4.48}$$

De même, en notant $\tilde{W}_3^1$ la troisième composante de $\tilde{\boldsymbol{W}}^1$, on a en utilisant les estimations (4.33)

$$2\gamma_{r3}(h)\big(\chi(\tilde{\boldsymbol{W}}^0 + \varepsilon^{1/2}\tilde{\boldsymbol{W}}^{1/2} + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{W}}^1)\big) = \varepsilon^{-1/2}\partial_T Z_3^0 \\ + \partial_T Z_3^{1/2} + \varepsilon\partial_r\tilde{W}_3^1 - \varepsilon^{-1/2}\partial_T Z_3^0 - \partial_T Z_3^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon^{5/4}) = \mathcal{O}(\varepsilon^{5/4}),$$

où $\mathcal{O}(\varepsilon^{5/4})$ est à comprendre au sens de la norme $\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)$. De même, on a

$$2\gamma_{s3}(h)\big(\chi(\tilde{\boldsymbol{W}}^0 + \varepsilon^{1/2}\tilde{\boldsymbol{W}}^{1/2} + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{W}}^1)\big) = \partial_s Z_3^0 + \varepsilon^{1/2}\partial_s Z_3^{1/2} \\ + \varepsilon\partial_s\tilde{W}_3^1 - \partial_s Z_3^0 + \mathcal{O}(\varepsilon^{5/4}) = \mathcal{O}(\varepsilon^{5/4}).$$

En groupant les deux expressions précédentes, on voit que

$$\|\gamma_{\alpha 3}(h)\big(\chi(\tilde{\boldsymbol{W}}^0 + \varepsilon^{1/2}\tilde{\boldsymbol{W}}^{1/2} + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{W}}^1)\big)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{5/4}). \tag{4.49}$$

De plus, pour tout $k \geq 3$, on a

$$\|\gamma_{\alpha 3}(h)(\varepsilon^{k/2}\chi\tilde{\boldsymbol{W}}^{k/2})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{(2k-1)/4}). \tag{4.50}$$

Enfin, pour les termes de couches limites 3D, on a d'après les équations (4.35),

$$\|\gamma_{\alpha 3}(h)(\varepsilon^{k/2}\chi\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{k/2})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{k/2}). \tag{4.51}$$

Finalement, on évalue de même les termes provenant du tenseur des déformations transverses *(transverse-strain)*, c'est-à-dire liés à l'opérateur $\gamma_{33}(h)(\boldsymbol{u}) = \partial_h u_3$. Grâce au corollaire 4.14 on a

$$\|\gamma_{33}(h)(\tilde{\boldsymbol{v}}^0 + \varepsilon^{1/2}\tilde{\boldsymbol{v}}^{1/2} + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{v}}^1)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \tag{4.52}$$

et pour tout $k \geq 3$, $\|\gamma_{33}(h)(\varepsilon^{k/2}\tilde{\boldsymbol{v}}^{k/2})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{(k-1)/2})$. De même, on a

$$\|\gamma_{33}(h)(\tilde{\boldsymbol{W}}^0 + \varepsilon^{1/2}\tilde{\boldsymbol{W}}^{1/2} + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{W}}^1)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/4}) \tag{4.53}$$

en raison du fait que les premiers termes $\tilde{W}_3^0$ et $\tilde{W}_3^{1/2}$ ne dépendent pas de $x_3 = \varepsilon^{-1}h$. Enfin, pour tout $k \geq 2$, on a

$$\|\gamma_{33}(h)(\varepsilon^{k/2}\tilde{\boldsymbol{W}}^{k/2})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{(2k-1)/4})$$

et

$$\|\gamma_{33}(h)(\varepsilon^{k/2}\chi\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{k/2})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{k/2}).$$

En groupant les estimations précédentes, on trouve alors les estimations

$$\|\gamma_{\alpha\beta}(h)(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}),$$

où la contribution la plus forte provient du premier terme $\boldsymbol{\zeta}^0$ apparaissant dans le développement asymptotique. De même,

$$\|\gamma_{\alpha 3}(h)(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

où la contribution la plus importante provient du terme de couche limite 3D. Enfin,

$$\|\gamma_{33}(h)(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}),$$

où la contribution la plus importante provient du terme $\boldsymbol{\zeta}^0$ via le terme $\tilde{\boldsymbol{V}}^1$. Ces trois dernières estimations montrent le résultat. ∎

Considérons maintenant $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ la solution d'un modèle 2D admissible. On cherche à construire un déplacement $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}(\varepsilon))$ tel qu'on ait convergence vers la solution $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ dans la norme d'énergie. Pour cela, on pose la définition suivante (voir aussi [35]) :

Définition 4.16 Soit $\boldsymbol{z}$ un générateur 2D, alors on pose

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z} - \varepsilon\tilde{\boldsymbol{V}}^1(\boldsymbol{z}) - \varepsilon^2\overline{\boldsymbol{V}}^2(\boldsymbol{z}), \tag{4.54}$$

où $\overline{\boldsymbol{V}}^2(\boldsymbol{z})$ est défini par l'opérateur

$$\overline{\boldsymbol{V}}^2(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} 0, \\ \dfrac{x_3^2}{2}p\rho_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}), \end{cases}$$

et donc on a

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} z_\sigma - h(\mathrm{D}_\sigma z_3 + 2b_\sigma^\alpha z_\alpha) \\ z_3 - hp\gamma_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}) + \frac{h^2}{2}p\rho_\alpha^\alpha(\boldsymbol{z}). \end{cases} \tag{4.55}$$

∎

Considérons maintenant la solution $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ associée à un modèle 2D admissible (voir la définition 2.2 du chapitre IV). Le déplacement surfacique $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ est solution des équations

$$\left\{\begin{array}{rcll}(\boldsymbol{M}+\varepsilon^2\boldsymbol{F})\boldsymbol{z}(\varepsilon) & = & \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{f}^0\,\mathrm{d}x_3 & \text{dans} \quad S_0, \\ \big(z_r(\varepsilon), z_s(\varepsilon), z_3(\varepsilon), \partial_r z_3(\varepsilon)\big) & = & 0 & \text{sur} \quad \partial S_0,\end{array}\right. \tag{4.56}$$

où $\boldsymbol{M}$ est l'opérateur de membrane et $\boldsymbol{F}$ un opérateur de flexion (voir la définition 2.1 du chapitre IV). Le champ $\boldsymbol{f}^0$ est le terme d'ordre 0 intervenant dans le développement en ε du chargement.

On montre le résultat suivant :

Théorème 4.17 *Soit* $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ *la solution des équations* (4.56), *et soit* $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}(\varepsilon))$ *le champ tridimensionnel associé par l'équation* (4.55). *Alors si le terme* $\boldsymbol{\zeta}^0$ *est non nul, on a l'estimation :*

$$\frac{\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}(\varepsilon))\|_E}{\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_E} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}). \tag{4.57}$$

Preuve. Rappelons que $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ admet un développement asymptotique défini à partir de deux séries formelle $\boldsymbol{\zeta}'[\varepsilon^{1/2}] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\boldsymbol{\zeta}'^{k/2}$ et $\boldsymbol{Z}'[\varepsilon] = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\boldsymbol{Z}'^{k/2}$ à coefficients générateurs 2D et termes de couches limites 2D. Il est clair que le déplacement $\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}(\varepsilon))$ admet un développement asymptotique sur Ω^ε contenant les trois échelles figurant dans le développement de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$. Notons que les termes de couches limites 3D sont identiques à ceux apparaissant dans le développement de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$. Si on note

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}(\varepsilon)) \simeq \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k/2}\big(\boldsymbol{e}^{k/2} + \chi(\boldsymbol{E}^{k/2} + \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{k/2})\big)$$

ce développement asymptotique, alors la définition de l'opérateur $\boldsymbol{U}$, le corollaire 4.14 et la proposition 3.8 montrent qu'on a

$$\boldsymbol{e}^0 = \boldsymbol{e}^{1/2} = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{e}^1 = \overline{\boldsymbol{\zeta}}^1,$$

où $\overline{\boldsymbol{\zeta}}^1 = \boldsymbol{\zeta}^1 - \boldsymbol{\zeta}'^1$, et de même

$$\boldsymbol{E}^0 = 0, \quad \boldsymbol{E}^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{Z}_3^{1/2}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{E}^1 = \begin{pmatrix} \overline{Z}_T^1 - x_3\partial_T\overline{Z}_3^{1/2} \\ \overline{Z}_s^1 \\ \overline{Z}_3^1\end{pmatrix}$$

où $\overline{Z}_3^{k/2} = Z_3^{k/2} - Z_3'^{k/2}$ pour $k=1$ et 2. Comme précédemment, pour calculer les termes $\gamma_{ij}(h)\big(\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}(\varepsilon))\big)$, il suffit de calculer les contributions des déplacements formés à partir des premiers termes du développement asymptotique. Or il est alors clair qu'on a

$$\|\gamma_{\alpha\beta}(h)(\boldsymbol{e}^0 + \varepsilon^{1/2}\boldsymbol{e}^{1/2} + \varepsilon\boldsymbol{e}^1)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$$

et de même

$$\|\gamma_{\alpha\beta}(h)\big(\chi(\boldsymbol{E}^0+\varepsilon^{1/2}\boldsymbol{E}^{1/2}+\varepsilon\boldsymbol{E}^1)\big)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)}=\mathcal{O}(\varepsilon^{5/4}).$$

D'autre part, on a

$$\|\gamma_{\alpha 3}(h)(\boldsymbol{e}^0+\varepsilon^{1/2}\boldsymbol{e}^{1/2}+\varepsilon\boldsymbol{e}^1)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)}=\mathcal{O}(\varepsilon^{5/2})$$

et

$$\|\gamma_{\alpha 3}(h)\big(\chi(\boldsymbol{E}^0+\varepsilon^{1/2}\boldsymbol{E}^{1/2}+\varepsilon\boldsymbol{E}^1)\big)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)\big)}=\mathcal{O}(\varepsilon^{7/4}).$$

et enfin on a

$$\gamma_{33}(h)(\boldsymbol{e}^0+\varepsilon^{1/2}\boldsymbol{e}^{1/2}+\varepsilon\boldsymbol{e}^1)=0$$

et

$$\gamma_{33}(h)\big(\chi(r)(\boldsymbol{E}^0+\varepsilon^{1/2}\boldsymbol{E}^{1/2}+\varepsilon\boldsymbol{E}^1)\big)=0.$$

On voit alors que

$$\|\boldsymbol{u}^\varepsilon-\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}(\varepsilon))\|_E=\mathcal{O}(\varepsilon),$$

ce qui prouve le théorème. Remarquons que la contribution la plus forte dans la norme d'énergie du terme $\boldsymbol{u}^\varepsilon-\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}(\varepsilon))$ provient du premier terme de couche limite $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^1$. ■

Bibliographie

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I. *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959) 623–727.

[2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. *Comm. Pure Appl. Math.* **17** (1964) 35–92.

[3] G. Andreoiu, E. Faou. Développements asymptotiques complets pour des coques faiblement courbées encastrées ou libres. A paraître dans *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* (2000).

[4] T. Aubin. *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, New-York 1982.

[5] M. Bernadou, P. G. Ciarlet. Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T.Koiter. In R.Glowinski, J.L.Lions, editors, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol.134, pages 89–136. Springer-Verlag, Heidelberg 1976.

[6] B. Budiansky, J. L. Sanders. On the "best" first-order linear shell theory. In *W. Prager Anniversary Volume*, Progress in Applied Mechanics, pages 129–140. Macmillan, New-York 1967.

[7] P. G. Ciarlet. *Elasticité tridimensionnelle.* Recherches en mathématiques appliquées. Masson, Paris 1986.

[8] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity. Vol. II, Theory of Plates.* North-Holland, Amsterdam 1997.

[9] P. G. Ciarlet. *Introduction to linear shell theory.* Gauthier-Villars, Paris & North-Holland, Amsterdam 1998.

[10] P. G. Ciarlet, S. Kesavan. Two-dimensional approximation of three-dimensional eigenvalue problems in plate theory. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* **26** (1981) 149–172.

[11] P. G. Ciarlet, V. Lods. Ellipticité des équations membranaires d'une coque uniformément elliptique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* **318** (1994) 195–200.

[12] P. G. Ciarlet, V. Lods. Asymptotic analysis of linearly elastic shells. I. Justification of membrane shell equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **136** (1996) 119–161.

[13] P. G. Ciarlet, V. Lods. Asymptotic analysis of linearly elastic shells. III. Justification of Koiter's shell equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **136** (1996) 191–200.

[14] P. G. Ciarlet, V. Lods, B. Miara. Asymptotic analysis of linearly elastic shells. II. Justification of flexural shell equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **136** (1996) 163–190.

[15] P. G. Ciarlet, E. Sanchez-Palencia. Un théorème d'existence et d'unicité pour les équations de coques membranaires. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* **317** (1993) 801–805.

[16] M. Dauge, , I. Djurdjevic, E. Faou, A. Rössle. Eigenmodes asymptotic in thin elastic plates. *J. Maths. Pures Appl.* **78** (1999) 925–964.

[17] M. Dauge, I. Gruais. Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate. I: Optimal error estimates. *Asymptotic Analysis* **13** (1996) 167–197.

[18] M. Dauge, I. Gruais. Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate. II: Analysis of the boundary layer terms. *Asymptotic Analysis* **16** (1998) 99–124.

[19] M. Dauge, I. Gruais, A. Rössle. The influence of lateral boundary conditions on the asymptotics in thin elastic plates. To appear in *SIAM Jour. of Math. Anal.* (1999).

[20] M. C. Delfour, J. P. Zolésio. Differential equations for linear shells: Comparison between intrinsic and classical models. *Advances in the Mathematical Sciences: CRM's 25 years,* CRM Proceedings and Lecture Notes **11** (1997) 42–144.

[21] P. Destuynder. Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques. Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1980.

[22] P. Destuynder. *Modélisation des coques minces élastiques.* Physique fondamentale et appliquée. Masson, Paris 1990.

[23] M. P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice Hall 1976.

[24] M. P. do Carmo. *Riemannian geometry.* Mathematics : Theory and applications. Birkhäuser, Boston 1992.

[25] G. Duvaut, J.-L. Lions. *Les Inéquations en Mécanique et en Physique.* Dunod, Paris 1972.

[26] E. Faou. Complete asymptotics for convex arches. *En préparation* (2000).

[27] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine. *Riemannian geometry.* Universitext. Springer-Verlag, New-York 1990.

[28] K. Genevey. A regularity result for a linear membrane shell problem. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **30 (4)** (1996) 467–488.

[29] P. Giroud. Modélisation asymptotique des coques élastiques : couplage flexion-membrane, modèles incrémentaux. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1999.

[30] A. L. Gol'denveizer. *Theory of Elastic Thin Shells.* Pergamon, New York 1961.

[31] R. D. Gregory, F. Y. Wan. Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory. *J. Elasticity* **14** (1984) 27–64.

[32] F. John. Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **18** (1965) 235–267.

[33] F. John. Refined interior equations for thin elastic shells. *Comm. Pure Appl. Math.* **24** (1971) 583–615.

[34] W. T. Koiter. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. *Proc. IUTAM Symposium on the Theory on Thin Elastic Shells, August 1959* (1960) 12–32.

[35] W. T. Koiter. On the foundations of the linear theory of thin elastic shells: I. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., Ser.B* **73** (1970) 169–182.

[36] W. T. Koiter. On the foundations of the linear theory of thin elastic shells: II. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., Ser.B* **73** (1970) 183–195.

[37] J.-L. Lions, E. Sanchez-Palencia. Problèmes aux limites sensitifs. *C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. I* **319** (1994) 1021–1026.

[38] V. Lods, C. Mardare. Justification asymptotique des hypotheses de Kirchhoff-love pour une coque encastree lineairement elastique. *C. R. Acad. Sc., Paris, Sér. I* **326** (1998) 909–912.

[39] V. Lods, C. Mardare. Asymptotic justification of the Kirchhoff-love assumptions for a linearly elastic clamped shell. A paraître dans *J. Elasticity* (1999).

[40] C. Mardare. Asymptotic analysis of linearly elastic shells: error estimates in the membrane case. *Asymptot. Anal.* **17** (1998) 31–51.

[41] P. M. Naghdi. Foundations of elastic shell theory. In *Progress in Solid Mechanics*, volume 4, pages 1–90. North-Holland, Amsterdam 1963.

[42] R. Narasimhan. *Analysis on real and complex manifolds.* Advanced studies in pure mathematics. North-Holland, Amsterdam 1968.

[43] S. A. Nazarov, I. S. Zorin. Edge effect in the bending of a thin three-dimensional plate. *Prikl. Matem. Mekhan.* **53 (4)** (1989) 642–650. English translation *J. Appl. Maths. Mechs.* (1989) 500–507.

[44] V. V. Novozhilov. *Thin Shell Theory.* Walters-Noordhoff Publishing, Groningen 1959.

[45] J. Piila, J. Pitkäranta. Energy estimates relating different linear elastic models of a thin cylindrical shell I. The membrane-dominated case. *SIAM J. Math. Anal.* **24 (1)** (1993) 1–22.

[46] J. Piila, J. Pitkäranta. Energy estimates relating different elastic linear models of a thin cylindrical shell II. The case of free boundary. *SIAM J. Math. Anal.* **26 (4)** (1995) 820–849.

[47] J. Pitkäranta, A.-M. Matache, C. Schwab. Fourier mode analysis of layers in shallow shell deformations. *Preprint ETH Zürich.* (1999).

[48] J. Pitkäranta, E. Sanchez-Palencia. On the asymptotic behaviour of sensitive shells with small thickness. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II* **325** (1997) 127–134.

[49] P. K. Raschewski. *Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis.* VEB deutscher Verlag der Wissenschaften., Berlin 1959.

[50] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia. *Coques élastiques minces. Propriétés asymptotiques.* Recherches en mathématiques appliquées. Masson, Paris 1997.

[51] E. Sanchez-Palencia. Passage à la limite de l'élasticité tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II* **311** (1990) 909–916.

[52] S. L. Slicaru. Quelques résultats dans la théorie des coques linéairement elastiques à surface moyenne uniformément elliptiques ou compacte sans bord. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1998.

[53] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry.* Publish or perish 1979.

[54] M. I. Vishik, L. A. Lyusternik. Regular degeneration and boundary layers for linear differential equations with small parameter. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* **20** (1962) 239–364.