cours SOD333

Filtrage Bayésien et Approximation Particulaire

Théorèmes Limites

François Le Gland
INRIA Rennes et IRMAR

people.rennes.inria.fr/Francois.Le_Gland/ensta/

8 octobre 2021

Distributions normalisées et non–normalisées (rappel)

évolution (non–linéaire) de la distribution normalisée

$$\mu_{k-1} \xrightarrow{\text{mutation}} \eta_k = \mu_{k-1}\, Q_k \xrightarrow{\text{pondération}} \mu_k = g_k \cdot \eta_k$$

avec la condition initiale $\mu_0 = g_0 \cdot \eta_0$, où la notation $\cdot$ désigne le produit projectif

on suppose que chaque fonction g_k est bornée et strictement positive

approximation particulaire (éventuellement) pondérée

$$\eta_k \approx \eta_k^N = \sum_{i=1}^N v_k^i\, \delta_{\xi_k^i} \qquad \text{et} \qquad \mu_k \approx \mu_k^N = \sum_{i=1}^N w_k^i\, \delta_{\xi_k^i}$$

avec les conditions initiales $\eta_0^N = S^N(\eta_0)$ et $\mu_0^N = g_0 \cdot \eta_0^N$ respectivement immédiatement à partir de la définition

$$\mu_k^N = g_k \cdot \eta_k^N = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^N v_k^i \, g_k(\xi_k^i) \, \delta_{\xi_k^i}}{\displaystyle\sum_{j=1}^N v_k^j \, g_k(\xi_k^j)} = \sum_{i=1}^N w_k^i \, \delta_{\xi_k^i}$$

est automatiquement sous la forme recherchée, et

$$\langle \eta_k^N, g_k \rangle = \sum_{i=1}^N v_k^i \, g_k(\xi_k^i)$$

en revanche

$$\mu_{k-1}^N \, Q_k = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \, m_k^i \qquad \text{avec} \qquad m_k^i(dx') = Q_k(\xi_{k-1}^i, dx')$$

apparaît seulement sous la forme d'un mélange fini, et l'approximation

$$\eta_k^N \approx \mu_{k-1}^N \, Q_k$$

doit être précisée

évolution (linéaire) de la distribution non–normalisée

$$\gamma_k = \gamma_{k-1}\, R_k = g_k\, (\gamma_{k-1}\, Q_k) = g_k\, (\mu_{k-1}\, Q_k)\, \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle = g_k\, \eta_k\, \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$$

avec la condition initiale $\gamma_0 = g_0\, \eta_0$: clairement

$$\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle\, \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle \gamma_0, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 \rangle \qquad (\star)$$

approximation particulaire proposée

$$\gamma_k^N = g_k\, \eta_k^N\, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

avec la condition initiale $\gamma_0^N = g_0\, \eta_0^N$ et $\eta_0^N = S^N(\eta_0)$: clairement

$$\langle \gamma_k^N, 1 \rangle = \langle \eta_k^N, g_k \rangle\, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle \gamma_0^N, 1 \rangle = \langle \eta_0^N, g_0 \rangle \qquad (\star\star)$$

d'où on déduit que

$$\frac{\gamma_k^N}{\langle \gamma_k^N, 1 \rangle} = g_k \cdot \eta_k^N = \mu_k^N \qquad \text{et} \qquad \frac{\gamma_0^N}{\langle \gamma_0^N, 1 \rangle} = g_0 \cdot \eta_0^N = \mu_0^N$$

c'est–à–dire que la version normalisée de l'approximation γ_k^N proposée coïncide avec l'approximation μ_k^N

en itérant les relations $(\star)$ et $(\star\star)$, on obtient

$$\langle \gamma_n, 1 \rangle = \prod_{k=0}^{n} \langle \eta_k, g_k \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle \gamma_n^N, 1 \rangle = \prod_{k=0}^{n} \langle \eta_k^N, g_k \rangle$$

Remarque clé pour la récurrence : pour tout $k = 1 \cdots n$, on a par différence

$$\begin{aligned} \gamma_k^N - \gamma_k &= g_k \, \eta_k^N \, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle - g_k \, (\gamma_{k-1} \, Q_k) \\ &= g_k \, (\gamma_{k-1}^N \, Q_k - \gamma_{k-1} \, Q_k) + g_k \, (\eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k) \, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \end{aligned}$$

de sorte que

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \, \phi) \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée

décomposition de l'erreur au rang k, évaluée pour la fonction ϕ, en

- erreur au rang $(k-1)$, évaluée pour la fonction $R_k \, \phi = Q_k(g_k \, \phi)$
- et erreur locale d'approximation Monte Carlo, évaluée pour la fonction $g_k \, \phi$

Erreur dans $\mathbb{L}^p$ pour les approximations particulaires

difficulté du problème mesurée par le rapport

$$r_k = \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k , g_k \rangle} \geq 1$$

Théorème les approximations particulaires de la constante de normalisation et de la distribution normalisée vérifient

$$\mathbb{E}|\, \frac{\langle \gamma_n^N , 1 \rangle}{\langle \gamma_n , 1 \rangle} - 1 \,| \leq z_n^N \qquad \text{et} \qquad \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}|\, \langle \mu_n^N - \mu_n , \phi \rangle \,| \leq 2\, z_n^N$$

respectivement, où la suite $\{z_k^N\}$ vérifie la relation de récurrence linéaire

$$z_k^N \leq r_k \, (1 + \frac{1}{\sqrt{N}})\, z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}} \qquad \text{et} \qquad z_0^N \leq \frac{r_0}{\sqrt{N}}$$

estimations similaires dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$ (en utilisant les inégalités de Marcinkiewicz–Zygmund)

Remarque pour toute fonction ϕ mesurable bornée

$$\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle = \frac{\langle \gamma_n^N, \phi \rangle}{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle} - \frac{\langle \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} = \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - \langle \mu_n^N, \phi \rangle \, \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle}$$

de sorte que

$$| \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle | \leq | \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} | + \|\phi\| \, | \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} |$$

ce qui montre que

$$\sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle | \leq 2 \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} |$$

pour démontrer le Théorème il suffit donc de prouver que l'erreur convenablement normalisée définie par

$$z_k^N = \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} |$$

pour tout $k = 0, 1 \cdots n$ vérifie la relation de récurrence linéaire annoncée

Preuve du Théorème

on rappelle que

$$\mathbb{E}|\,\langle \eta_0^N - \eta_0, \phi \rangle\,| \leq \frac{c}{\sqrt{N}}\,\|\phi\|$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée, et

$$\mathbb{E}[\,|\,\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\,Q_k, \phi \rangle\,|\;|\;\mathcal{F}_{k-1}^N\,] \leq \frac{c}{\sqrt{N}}\,\|\phi\|$$

pour toute fonction mesurable bornée ϕ, où $\mathcal{F}_{k-1}^N$ dénote la tribu engendrée par les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$–ème génération

- pour $k = 0$, on a

$$\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi \rangle = \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0 \, \phi \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée, on remarque que

$$\mathbb{E}| \, \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0 \, \phi \rangle \, | \leq \frac{c}{\sqrt{N}} \, \sup_{x \in E} g_0(x) \, \|\phi\|$$

et en divisant par $\langle \gamma_0, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 \rangle$ on obtient

$$z_0^N = \sup_{\phi \, : \, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \, \frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi \rangle}{\langle \gamma_0, 1 \rangle} \, | \leq \frac{c}{\sqrt{N}} \, \frac{\displaystyle\sup_{x \in E} g_0(x)}{\langle \eta_0, g_0 \rangle} = \frac{c \; r_0}{\sqrt{N}}$$

- pour tout $k = 1 \cdots n$, on rappelle (clé pour la récurrence) que

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\, \phi) \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle\, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée, et on en déduit que

$$\begin{aligned} \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\, \langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle \,| & \\ \leq \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\, \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\, \phi) \rangle \,| & \\ + \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}[\, |\, \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle \,|\, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \,] & \end{aligned}$$

on remarque que

$$\mathbb{E}|\,\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle\,|$$

$$\leq \sup_{x \in E} |Q_k(g_k\,\phi)(x)| \quad \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\,\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi\rangle\,|$$

$$\leq \sup_{x \in E} g_k(x)\;\|\phi\| \quad \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\,\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi\rangle\,|$$

compte tenu que

$$|Q_k(g_k\,\phi)(x)| = |\int_E Q_k(x, dx')\; g_k(x')\,\phi(x')\,| \leq \sup_{x \in E} g_k(x)\;\|\phi\|$$

et on en déduit que

$$\sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\,\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle\,|$$

$$\leq \sup_{x \in E} g_k(x) \quad \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\,\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi\rangle\,|$$

en divisant par $\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle \; \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$ on obtient

$$
\begin{aligned}
z_k^N &= \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \, \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} \, | \\
&\leq \frac{\sup\limits_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \; \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \, | \\
&\qquad + \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \, \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \; \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \, |
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
z_k^N \leq r_k \; z_{k-1}^N + \varepsilon_k^N \qquad (\bullet)
$$

avec comme terme forçant l'erreur locale définie par

$$
\varepsilon_k^N = \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \, \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \; \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \, |
$$

pour tout $k = 1 \cdots n$

on remarque que

$$\mathbb{E}[\,|\,\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k \,, g_k\, \phi\rangle\,|\;|\; \mathcal{F}_{k-1}^N\,] \leq \frac{c}{\sqrt{N}}\, \sup_{x\in E} g_k(x)\; \|\phi\|$$

où $\mathcal{F}_{k-1}^N$ dénote la tribu engendrée par les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$–ème génération, et

- en multipliant par $\langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle$, v.a. mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{k-1}^N$
- en divisant par $\langle \eta_k, g_k\rangle\; \langle \gamma_{k-1}, 1\rangle$

on obtient

$$\mathbb{E}[\,|\,\frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k \,, g_k\, \phi\rangle\; \langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle}{\langle \eta_k, g_k\rangle\; \langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,|\;|\; \mathcal{F}_{k-1}^N\,]$$

$$\leq \frac{c}{\sqrt{N}}\; \frac{\sup_{x\in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k\rangle}\; \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\; \|\phi\|$$

$$\leq \frac{c}{\sqrt{N}}\; r_k\; (\,1 + |\,\frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,|\,)\; \|\phi\|$$

on en déduit que

$$\varepsilon_k^N = \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}| \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi\rangle\, \langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle}{\langle \eta_k, g_k\rangle\, \langle \gamma_{k-1}, 1\rangle} |$$

$$\leq \frac{c\, r_k}{\sqrt{N}} \, (1 + \mathbb{E}| \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle} |)$$

$$\leq \frac{c\, r_k}{\sqrt{N}} \, (1 + z_{k-1}^N)$$

et en reportant cette estimation dans $(\bullet)$ on obtient

$$z_k^N \leq r_k\, (1 + \frac{c}{\sqrt{N}})\, z_{k-1}^N + \frac{c\, r_k}{\sqrt{N}} \qquad \square$$

Convergence des approximations particulaires

TCL pour les approximations particulaires

- rappel : convergence en distribution, TCL conditionnel
- TCL pour les approximations particulaires

Probabilité d'extinction, sélection binaire

Convergence en distribution (rappel)

soit X_N et X des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^m$: on dit que $X_N \Rightarrow X$ en distribution quand $N \uparrow \infty$ si et seulement si

$$\mathbb{E}[f(X_N)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)] \qquad \text{pour toute fonction } f \text{ continue et bornée}$$

une CNS est la convergence ponctuelle des fonctions caractéristiques, c'est–à–dire

$$\mathbb{E}[\exp\{j\, u^* X_N\}] \longrightarrow \mathbb{E}[\exp\{j\, u^* X\}] \qquad \text{pour tout vecteur } u \in \mathbb{R}^m$$

Lemme de Slutsky soit X_N, Y_N et X des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^m$: si

- $X_N \Rightarrow X$ en distribution quand $N \uparrow \infty$
- $Y_N \to a$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$, où a est une constante

alors

$(X_N, Y_N) \Rightarrow (X, a)$ et par exemple $Y_N\, X_N \Rightarrow a\, X$, en distribution quand $N \uparrow \infty$,

TCL conditionnel

Lemme A si $Z = \begin{pmatrix} Z'_N \\ Z''_N \end{pmatrix}$, où

- conditionnellement à $\mathcal{F}_N$, la v.a. Z'_N converge en distribution vers une v.a. gaussienne centrée, de variance V', au sens où pour tout u fixé
$$\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] \longrightarrow \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V'\}$$
en probabilité (et dans $\mathbb{L}^1$, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue) quand $N \uparrow \infty$
- la v.a. Z''_N est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_N$, et converge en distribution vers une v.a. gaussienne centrée, de variance V'', i.e. pour tout w fixé
$$\mathbb{E}[\exp\{j\,w\,Z''_N\}] \longrightarrow \exp\{-\tfrac{1}{2}\,w^2\,V''\}$$
quand $N \uparrow \infty$

alors le v.a. Z converge en distribution vers un v.a. gaussien centré, de matrice de covariance bloc–diagonale $\begin{pmatrix} V' & 0 \\ 0 & V'' \end{pmatrix}$, quand $N \uparrow \infty$

Remarque sous les hypothèses du Lemme A, la v.a. $Z'_N + Z''_N$ converge en distribution vers une v.a. gaussienne centrée, de variance $V' + V''$, quand $N \uparrow \infty$

plus généralement, si la v.a. c'_N converge en probabilité vers 1 quand $N \uparrow \infty$, alors la v.a. $c'_N \, Z'_N + Z''_N$ converge en distribution vers une v.a. gaussienne centrée, de variance $V' + V''$, quand $N \uparrow \infty$

il suffit de vérifier que

$$c'_N \, Z'_N + Z''_N = \begin{pmatrix} c'_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z'_N \\ Z''_N \end{pmatrix}$$

et d'appliquer le lemme de Slutsky

Preuve du Lemme A il suffit d'exploiter la décomposition suivante

$$\mathbb{E}[\exp\{j\,(u\,Z'_N + w\,Z''_N)\}] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(u^2\,V' + w^2\,V'')\}$$

$$= \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N]\ \exp\{j\,w\,Z''_N\}]$$

$$- \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V'\}\ \exp\{-\tfrac{1}{2}\,w^2\,V''\}$$

$$= \mathbb{E}[\,[\,\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V'\}]\ \exp\{j\,w\,Z''_N\}]$$

$$+ \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V'\}\ [\,\mathbb{E}[\,\exp\{j\,w\,Z''_N\}] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,w^2\,V''\}]$$

et d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|\,\mathbb{E}[\exp\{j\,(u\,Z'_N + w\,Z''_N)\}] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(u^2\,V' + w^2\,V'')\}\,|$$

$$\leq \mathbb{E}|\,\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V'\}\,|$$

$$+\,|\,\mathbb{E}[\exp\{j\,w\,Z''_N\}] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,w^2\,V''\}\,| \longrightarrow 0$$

quand $N \uparrow \infty$

Lemme B soit $Z'_N = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} X_{N,i}$

si conditionnellement à $\mathcal{F}_N$, les v.a. $(X_{N,1}, \cdots, X_{N,N})$ sont indépendantes, centrées et bornées, i.e.

$$\mathbb{E}[X_{N,i} \mid \mathcal{F}_N] = 0 \;, \qquad \mathbb{E}[\,|X_{N,i}|^2 \mid \mathcal{F}_N] = s^2_{N,i} \qquad \text{et} \qquad |X_{N,i}| \leq c$$

pour tout $i = 1 \cdots N$, alors

$$|\,\mathbb{E}[\exp\{j\, u\, Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\, u^2\, s^2_N\}\,| \longrightarrow 0 \quad \text{où} \quad s^2_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s^2_{N,i}$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

si en outre la v.a. s^2_N converge en probabilité vers s^2 quand $N \uparrow \infty$, alors

$$\mathbb{E}[\exp\{j\, u\, Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] \longrightarrow \exp\{-\tfrac{1}{2}\, u^2\, s^2\}$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

Lemme B (cas i.i.d.) soit $Z'_N = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_{N,i}$

si conditionnellement à $\mathcal{F}_N$, les v.a. $(X_{N,1}, \cdots, X_{N,N})$ sont i.i.d., centrées, de variance s_N^2 et bornées, i.e.

$$\mathbb{E}[X_{N,i} \mid \mathcal{F}_N] = 0 \; , \qquad \mathbb{E}[\, |X_{N,i}|^2 \mid \mathcal{F}_N] = s_N^2 \qquad \text{et} \qquad |X_{N,i}| \leq c$$

pour tout $i = 1 \cdots N$, alors

$$|\, \mathbb{E}[\exp\{j\, u\, Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\, u^2\, s_N^2\} \,| \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

si en outre la v.a. s_N^2 converge en probabilité vers s^2 quand $N \uparrow \infty$, alors

$$\mathbb{E}[\exp\{j\, u\, Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] \longrightarrow \exp\{-\tfrac{1}{2}\, u^2\, s^2\}$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

Preuve d'après l'hypothèse d'indépendance conditionnelle, on a

$$\mathbb{E}[\exp\{j\, u\, Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] \;=\; \mathbb{E}[\exp\{j\, \frac{u}{\sqrt{N}}\, \sum_{i=1}^{N} X_{N,i}\} \mid \mathcal{F}_N]$$

$$=\; [\, \mathbb{E}[\exp\{j\, \frac{u\, X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N]\,]^N$$

où la v.a. X est distribuée comme chacune des v.a. $(X_{N,1}, \cdots, X_{N,N})$ d'après les majorations classiques

$$|\, \mathbb{E}[\exp\{j\, \frac{u\, X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N] - (1 - \tfrac{1}{2}\, \frac{u^2\, s_N^2}{N})\, | \leq \tfrac{1}{6}\, (c\, \frac{|u|}{\sqrt{N}})^3$$

et

$$|\, \exp\{-\tfrac{1}{2}\, \frac{u^2\, s_N^2}{N}\} - (1 - \tfrac{1}{2}\, \frac{u^2\, s_N^2}{N})\, | \leq \tfrac{1}{8}\, (c\, \frac{u}{\sqrt{N}})^4$$

et d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|\, \mathbb{E}[\exp\{j\, \frac{u\, X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\, \frac{u^2\, s_N^2}{N}\}\, | \leq (c\, \frac{|u|}{\sqrt{N}})^3\, (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8}\, c\, \frac{|u|}{\sqrt{N}})$$

il résulte de la majoration

$$|a^N - b^N| \leq N\,|a - b|$$

valide pour tout $|a| \leq 1$ et tout $|b| \leq 1$, et en particulier valide pour

$$a = \mathbb{E}[\exp\{j\,\frac{u\,X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N] \qquad \text{et} \qquad b = \exp\{-\tfrac{1}{2}\,\frac{u^2\,s_N^2}{N}\}$$

que

$$|\,\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,s_N^2\}\,|$$

$$= |\,[\,\mathbb{E}[\exp\{j\,\frac{u\,X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N]\,]^N - [\,\exp\{-\tfrac{1}{2}\,\frac{u^2\,s_N^2}{N}\}\,]^N\,|$$

$$\leq N\,|\,\mathbb{E}[\exp\{j\,\frac{u\,X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,\frac{u^2\,s_N^2}{N}\}\,|$$

$$\leq N\,(c\,\frac{|u|}{\sqrt{N}})^3\,(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8}\,c\,\frac{|u|}{\sqrt{N}}) \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

finalement, il résulte de la majoration

$$| \exp\{-x\} - \exp\{-x'\} \, | \leq |x - x'|$$

valide pour tout $x \geq 0$ et tout $x' \geq 0$, que

$$| \exp\{-\tfrac{1}{2} \, u^2 \, s_N^2\} - \exp\{-\tfrac{1}{2} \, u^2 \, s^2\} \, | \leq \tfrac{1}{2} \, u^2 \, |s_N^2 - s^2| \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$, et d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} & | \, \mathbb{E}[\exp\{j \, u \, Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2} \, u^2 \, s^2\} \, | \\ & \leq | \, \mathbb{E}[\exp\{j \, u \, Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2} \, u^2 \, s_N^2\} \, | \\ & \qquad + | \exp\{-\tfrac{1}{2} \, u^2 \, s_N^2\} - \exp\{-\tfrac{1}{2} \, u^2 \, s^2\} \, | \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$ $\square$

TCL pour les approximations particulaires

on se limite ici au cas de la redistribution multinomiale, c'est–à–dire que

$$\eta_k^N = S^N(\mu_{k-1}^N\, Q_k) = \frac{1}{N}\, \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_k^i}$$

où, conditionnellement à la tribu $\mathcal{F}_{k-1}^N$ engendrée par les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$–ème génération, les v.a. $(\xi_k^1, \cdots, \xi_k^N)$ sont i.i.d. de distribution de probabilité (mélange fini) commune

$$\mu_{k-1}^N\, Q_k(dx') = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i\, Q_k(\xi_{k-1}^i, dx')$$

on rappelle que dans ce cas

$$\mathbb{E}[\,|\frac{1}{N}\, \sum_{i=1}^N \phi(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N\, Q_k, \phi\rangle\,|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] = \frac{1}{N}\, \mathrm{var}(\phi, \mu_{k-1}^N\, Q_k)$$

Théorème les approximations particulaires avec redistribution multinomiale de la constante de normalisation et de la distribution normalisée vérifient

$$\sqrt{N}\,[\,\frac{\langle \gamma_n^N, 1\rangle}{\langle \gamma_n, 1\rangle} - 1\,] \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n) \quad \text{et} \quad \sqrt{N}\,\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi\rangle \Longrightarrow \mathcal{N}(0, v_n(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, avec la variance asymptotique définie par

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} [\,\frac{\langle \eta_k, (g_k\, R_{k+1:n}\, 1)^2\rangle}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1\rangle^2} - 1\,]$$

$$v_n(\phi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \eta_k, |g_k\, R_{k+1:n}\,(\phi - \langle \mu_n, \phi\rangle)\,|^2\,\rangle}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1\rangle^2}$$

respectivement, où les fonctions

$$R_{k+1:n}\,\phi(x) = R_{k+1} \cdots R_n\,\phi(x) = \mathbb{E}[\phi(X_n) \prod_{p=k+1}^{n} g_p(X_p) \mid X_k = x]$$

définies pour tout $k = 0, 1 \cdots n$, avec la convention $R_{n+1:n}\,\phi(x) = \phi(x)$, se calculent de manière rétrograde

Remarque pour démontrer le Théorème, il suffit de démontrer que

$$\sqrt{N}\,\frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi\rangle}{\langle \gamma_n, 1\rangle} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, avec la variance asymptotique définie par

$$V_n(\phi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\,\phi, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1\rangle^2}$$

on remarque en effet que

$$V_n = V_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\, 1, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1\rangle^2} = \sum_{k=0}^{n} [\, \frac{\langle \eta_k, (g_k\, R_{k+1:n}\, 1)^2\rangle}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1\rangle^2} - 1\,]$$

ce qui montre le Théorème pour la constante de normalisation on remarque aussi que

$$\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle = \frac{\langle \gamma_n^N, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle}{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle} = \frac{\langle \gamma_n, 1 \rangle}{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle} \, \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle}$$

pour toute fonction mesurable bornée ϕ, et que $\langle \gamma_n^N, 1 \rangle \longrightarrow \langle \gamma_n, 1 \rangle$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$, ce qui montre le Théorème pour la distribution normalisée (en utilisant le lemme de Slutsky), avec

$$v_n(\phi) = V_n(\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{var}(g_k \, R_{k+1:n} \, (\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle), \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k \, R_{k+1:n} \, 1 \rangle^2}$$

on vérifie enfin que

$$\begin{aligned}
\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\,(\phi - \langle \mu_n, \phi\rangle)\,\rangle &= \langle \eta_k, g_k\rangle\, \langle \mu_k\, R_{k+1:n}, \phi - \langle \mu_n, \phi\rangle\,\rangle \\
&= \langle \eta_k, g_k\rangle\, \frac{\langle \gamma_k\, R_{k+1:n}, \phi - \langle \mu_n, \phi\rangle\,\rangle}{\langle \gamma_k, 1\rangle} \\
&= \langle \eta_k, g_k\rangle\, \frac{\langle \gamma_n, \phi - \langle \mu_n, \phi\rangle\,\rangle}{\langle \gamma_k, 1\rangle} \\
&= \langle \eta_k, g_k\rangle\, \frac{\langle \gamma_n, 1\rangle}{\langle \gamma_k, 1\rangle}\, \langle \mu_n, \phi - \langle \mu_n, \phi\rangle\,\rangle = 0
\end{aligned}$$

pour tout $k = 0, 1 \cdots n$, de sorte que

$$\mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\,(\phi - \langle \mu_n, \phi\rangle), \eta_k) = \langle \eta_k, |g_k\, R_{k+1:n}\,(\phi - \langle \mu_n, \phi\rangle)\,|^2\,\rangle$$

Remarque formulation "récursive" équivalente : on remarque que

$$\begin{aligned}\langle \eta_p, g_p\, R_{p+1:k}\, 1\rangle &= \langle \eta_p, g_p\rangle\, \langle \mu_p\, R_{p+1:k}, 1\rangle\\ &= \langle \eta_p, g_p\rangle\, \frac{\langle \gamma_p\, R_{p+1:k}, 1\rangle}{\langle \gamma_p, 1\rangle} = \langle \eta_p, g_p\rangle\, \frac{\langle \gamma_k, 1\rangle}{\langle \gamma_p, 1\rangle}\end{aligned}$$

de sorte que le rapport

$$\frac{\langle \eta_p, g_p\, R_{p+1:k}\, 1\rangle}{\langle \eta_p, g_p\, R_{p+1:k-1}\, 1\rangle} = \frac{\langle \gamma_k, 1\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle} = \langle \eta_k, g_k\rangle$$

ne dépend pas de $p = 0, 1 \cdots (k-1)$, et

$$\begin{aligned}V_k(\phi) &= \sum_{p=0}^{k} \frac{\mathrm{var}(g_p\, R_{p+1:k}\, \phi, \eta_p)}{\langle \eta_p, g_p\, R_{p+1:k}\, 1\rangle^2}\\ &= \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\mathrm{var}(g_p\, R_{p+1:k-1}\, R_k\, \phi, \eta_p)}{\langle \eta_p, g_p\, R_{p+1:k-1}\, 1\rangle^2\, \langle \eta_k, g_k\rangle^2} + \frac{\mathrm{var}(g_k\, \phi, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k\rangle^2}\end{aligned}$$

soit

$$V_k(\phi) = \frac{V_{k-1}(R_k\, \phi)}{\langle \eta_k, g_k\rangle^2} + \frac{\mathrm{var}(g_k\, \phi, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k\rangle^2} \qquad (\blacksquare)$$

Preuve du Théorème (par récurrence)

- pour $k = 0$, on a

$$\langle \gamma_0^N - \gamma_0 , \phi \rangle = \langle \eta_0^N - \eta_0 , g_0 \, \phi \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée, on remarque que

$$\sqrt{N} \, \langle \eta_0^N - \eta_0 , g_0 \, \phi \rangle \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \mathrm{var}(g_0 \, \phi, \eta_0))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, et en divisant par $\langle \gamma_0 , 1 \rangle = \langle \eta_0 , g_0 \rangle$ on obtient

$$\sqrt{N} \, \frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0 , \phi \rangle}{\langle \gamma_0 , 1 \rangle} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\mathrm{var}(g_0 \, \phi, \eta_0)}{\langle \eta_0 , g_0 \rangle^2})$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, c'est–à–dire que l'hypothèse de récurrence ($\blacksquare$) est vérifiée

- pour tout $k = 1 \cdots n$, on a (clé pour la récurrence)

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, R_k\, \phi \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle\; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée
en divisant par $\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle\; \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$ on obtient

$$\begin{aligned} Z_N &= \sqrt{N}\, \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} \\ &= \sqrt{N}\, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, R_k\, \phi \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle\; \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} + \sqrt{N}\, \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle}\; \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \\ &= Z''_N + c'_N\; Z'_N \end{aligned}$$

où

$$c'_N = \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \longrightarrow 1$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

d'après l'hypothèse de récurrence

$$\sqrt{N}\, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1} , R_k\, \phi \rangle}{\langle \gamma_{k-1} , 1 \rangle} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_{k-1}(R_k\, \phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, et en divisant par $\langle \eta_k , g_k \rangle$ on obtient

$$Z_N'' = \sqrt{N}\, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1} , R_k\, \phi \rangle}{\langle \eta_k , g_k \rangle\; \langle \gamma_{k-1} , 1 \rangle} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{V_{k-1}(R_k\, \phi)}{\langle \eta_k , g_k \rangle^2})$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$

il reste à étudier

$$Z'_N = \sqrt{N}\, \frac{\langle \eta^N_k - \mu^N_{k-1}\, Q_k \,, g_k\, \phi \rangle}{\langle \eta_k \,, g_k \rangle}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \frac{g_k(\xi^i_k)\, \phi(\xi^i_k) - \langle \mu^N_{k-1}\, Q_k, g_k\, \phi \rangle}{\langle \eta_k \,, g_k \rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_{N,i}$$

avec

$$X_{N,i} = \frac{g_k(\xi^i_k)\, \phi(\xi^i_k) - \langle \mu^N_{k-1}\, Q_k, g_k\, \phi \rangle}{\langle \eta_k \,, g_k \rangle}$$

on vérifie que

$$s^2_N = \mathbb{E}[\, |X_{N,i}|^2 \mid \mathcal{F}^N_{k-1}] = \frac{\mathrm{var}(g_k\, \phi, \mu^N_{k-1}\, Q_k)}{\langle \eta_k \,, g_k \rangle^2}$$

et

$$|X_{N,i}| \leq 2\, \frac{\sup\limits_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k \,, g_k \rangle}\, \|\phi\| = 2\, r_k\, \|\phi\| = c$$

pour tout $i = 1 \cdots N$

clairement

$$s_N^2 \longrightarrow s^2 = \frac{\mathrm{var}(g_k\,\phi, \eta_k)}{\langle \eta_k\,, g_k \rangle^2}$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$, et grace au Lemme B, on en déduit que

$$|\,\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z'_N\} \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,\frac{\mathrm{var}(g_k\,\phi, \eta_k)}{\langle \eta_k\,, g_k \rangle^2}\}\,| \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

finalement, grace au Lemme A, on en déduit que

$$Z_N = \sqrt{N}\,\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k\,, \phi \rangle}{\langle \gamma_k\,, 1 \rangle} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_k(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, avec

$$V_k(\phi) = \frac{V_{k-1}(R_k\,\phi)}{\langle \eta_k\,, g_k \rangle^2} + \frac{\mathrm{var}(g_k\,\phi, \eta_k)}{\langle \eta_k\,, g_k \rangle^2}$$

c'est–à–dire que l'hypothèse de récurrence ($\blacksquare$) est vérifiée $\square$

Convergence des approximations particulaires

TCL pour les approximations particulaires

Probabilité d'extinction, sélection binaire implicitement

Hypothèse A fonction de sélection g_k bornée supérieurement et strictement positive, c'est–à–dire que

$$\sup_{x \in E} g_k(x) < \infty \qquad \text{et} \qquad g_k(x) > 0 \text{ pour tout } x \in E$$

plus généralement

Hypothèse B fonction de sélection g_k bornée supérieurement et positive, intégrale par rapport à η_k strictement positive, c'est–à–dire que

$$\sup_{x \in E} g_k(x) < \infty \qquad \text{et} \qquad g_k(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in E$$

$$\text{et} \qquad \langle \eta_k, g_k \rangle > 0$$

même si $\langle \eta_k, g_k \rangle > 0$, il peut arriver que $g_k(\xi_k^i) = 0$ pour tout $i = 1 \cdots N$, c'est–à–dire que toutes les particules recoivent un poids nul, auquel cas $\langle \eta_k^N, g_k \rangle = 0$ et $\langle \gamma_k^N, 1 \rangle = 0$, de sorte que l'approximation μ_k^N n'est pas définie

on introduit le temps d'extinction

$$\begin{aligned} \tau^N &= \inf\{k \geq 1 \,:\, \langle \gamma_k^N, 1 \rangle = 0\} \\ &= \inf\{k \geq 1 \,:\, \langle \eta_k^N, g_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_k(\xi_k^i) = 0\} \\ &= \inf\{k \geq 1 \,:\, g_k(\xi_k^i) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \cdots, N\} \;, \end{aligned}$$

i.e. le premier instant auquel toutes les particules recoivent un poids nul

tant que $\tau^N > k$, les approximations particulaires $\mu_0^N, \ldots, \mu_k^N$ et $\eta_0^N, \ldots, \eta_k^N$, et les constantes de normalisation $\langle \gamma_0^N, 1 \rangle, \ldots, \langle \gamma_k^N, 1 \rangle$ sont bien définies, mais aussi l'approximation particulaire η_{k+1}^N et la constante de normalisation $\langle \gamma_{k+1}^N, 1 \rangle$ sont bien définies

Proposition la probabilité d'extinction vérifie examen 16/17

$$\mathbb{P}[\tau^N \leq n] \leq a_n \exp\{-b_n N\}$$

Théorème les approximations particulaires de la constante de normalisation et de la distribution normalisée vérifient

$$\mathbb{E}[1_{\{\tau^N > n\}} \, | \, \frac{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - 1 \, | \,] \leq z_n^N$$

et

$$\sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}[1_{\{\tau^N > n\}} \, | \, \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle \, | \,] \leq 2 \, z_n^N$$

Théorème les approximations particulaires avec redistribution multinomiale de la constante de normalisation et de la distribution normalisée vérifient

$$\sqrt{N} \, 1_{\{\tau^N > n\}} \, [\, \frac{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - 1 \,] \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n)$$

et

$$\sqrt{N} \, 1_{\{\tau^N > n\}} \, \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle \Longrightarrow \mathcal{N}(0, v_n(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$

cas particulier : fonction de sélection binaire, à valeur 0 ou 1, de sorte que

$$p_k = \langle \eta_k, g_k \rangle \leq 1$$

terme général dans la variance asymptotique pour la constante de normalisation, compte tenu que $g_k^2 = g_k$

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \eta_k, (g_k\, R_{k+1:n}\, 1)^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1 \rangle^2} - 1 &= \frac{\langle \eta_k, g_k\, (R_{k+1:n}\, 1)^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1 \rangle^2} - 1 \\
&= \frac{\langle \mu_k, (R_{k+1:n}\, 1)^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle\, \langle \mu_k, R_{k+1:n}\, 1 \rangle^2} - 1 \\
&= (\frac{1}{p_k} - 1) + \frac{1}{p_k}\, [\frac{\langle \mu_k, (R_{k+1:n}\, 1)^2 \rangle}{\langle \mu_k, R_{k+1:n}\, 1 \rangle^2} - 1]
\end{aligned}$$

soit

$$\frac{\mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\, 1, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1 \rangle^2} = (\frac{1}{p_k} - 1) + \frac{1}{p_k}\, \frac{\mathrm{var}(R_{k+1:n}\, 1, \mu_k)}{\langle \mu_k, R_{k+1:n}\, 1 \rangle^2}$$