École Nationale Supérieure de Techniques Avancées
module : Commande des Systèmes

examen du cours OROC–SC–FP
“Filtrage bayésien et approximation particulaire”

vendredi 21 octobre 2016, 13:30 à 16:00

Problème

L'objectif de ce problème est d'étudier la convergence des approximations particulaires obtenues avec l'algorithme SIR de base (avec redistribution multinomiale) dans le cas plus général où l'Hypothèse A faite en cours

> Pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, la fonction g_k est bornée et strictement positive, i.e.
>
> $$\sup_{x \in E} g_k(x) < \infty \qquad \text{et} \qquad g(x) > 0 \text{ pour tout } x \in E,$$

est remplacée par l'Hypothèse B plus faible

> Pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, la fonction g_k est bornée, positive au sens large, et son intégrale par rapport à la distribution η_k est strictement positive, i.e.
>
> $$\sup_{x \in E} g_k(x) < \infty \;, \qquad g_k(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in E \qquad \text{et} \qquad \langle \eta_k, g_k \rangle > 0 \;,$$
>
> et on pose
>
> $$r_k = \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \geq 1 \;.$$

Sous l'Hypothèse B, et même si $\langle \eta_k, g_k \rangle > 0$, il peut quand même arriver que $g_k(\xi_k^i) = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, N$, c'est–à–dire que toutes les particules sont affectées d'un poids nul, auquel cas $\langle \eta_k^N, g_k \rangle = 0$ et $\langle \gamma_k^N, 1 \rangle = 0$, de sorte que l'approximation μ_k^N n'est pas définie. On définit le temps d'extinction du système de particules comme le premier instant

$$\begin{aligned} \tau^N &= \inf\{k \geq 0 \;:\; \langle \gamma_k^N, 1 \rangle = 0\} \\ &= \inf\{k \geq 0 \;:\; \langle \eta_k^N, g_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_k(\xi_k^i) = 0\} \\ &= \inf\{k \geq 0 \;:\; g_k(\xi_k^i) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \cdots, N\} \;, \end{aligned}$$

où toutes les particules sont affectées d'un poids nul, et où l'algorithme s'arrête (sous l'Hypothèse A, le temps d'extinction τ^N est bien sûr infini). Pour $k = 0$, on considère que $\{\tau^N > -1\}$ est toujours vrai.

(i) **Montrer que sur l'ensemble $\{\tau^N > k-1\}$, les approximations $\mu_0^N, \ldots, \mu_{k-1}^N$ et $\eta_0^N, \ldots, \eta_k^N$ des distributions normalisées, et les approximations $\gamma_0^N, \ldots, \gamma_k^N$ des distributions non–normalisées, sont bien définies.**

On se propose d'estimer par récurrence la probabilité d'extinction, i.e. $\mathbb{P}[\tau^N \leq k]$.

Pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$ et pour tout réel positif $c > 0$, on pose

$$E_k^N(c) = \sup_{\phi \geq 0 \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}| > c \text{ et } \tau^N > k-1\,] \; ,$$

où le supremum porte sur les fonctions mesurables positives ϕ telles que $\|\phi\| = 1$, et

$$F_k^N = \mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, 1 \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}| > \tfrac{1}{2} \text{ et } \tau^N > k-1\,] \; .$$

(ii) **Montrer que l'application $c \mapsto E_k^N(c)$ est décroissante et que $F_k^N \leq E_k^N(\frac{1}{2})$.**

On aura besoin de l'inégalité exponentielle suivante (admise).

Inégalité exponentielle de Hoeffding

Soit $(X_1, \cdots, X_N)$ des variables aléatoires réelles indépendantes (mais pas nécessairement identiquement distribuées, ni centrées) et à valeurs bornées, i.e. $a \leq X_i \leq b$, pour tout $i = 1, \cdots, N$. Pour tout réel positif $c \geq 0$

$$\mathbb{P}[\,|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \mathbb{E}(X_i))| \geq c\,] \leq 2 \exp\{-\frac{2\,N\,c^2}{(b-a)^2}\} \; .$$

▶ Initialisation, $k = 0$.

(iii) **Montrer que**

$$\mathbb{P}[\tau^N = 0] = \mathbb{P}[\,\langle \gamma_0^N, 1 \rangle = 0\,] \leq \mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, 1 \rangle}{\langle \gamma_0, 1 \rangle}| > \tfrac{1}{2}\,] = F_0^N \; .$$

(iv) **Montrer que pour toute fonction mesurable positive ϕ telle que $\|\phi\| = 1$**

$$\mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi\rangle}{\langle \gamma_0, 1\rangle}| > c\,] = \mathbb{P}[\,|\langle \eta_0^N - \eta_0, g_0\,\phi\rangle| > c\,\langle \eta_0, g_0\rangle\,] \leq 2\,\exp\{-\,\frac{2\,c^2}{r_0^2}\,N\}\ .$$

[Indication : On pourra utiliser l'inégalité exponentielle de Hoeffding, avec

$$0 \leq X_i = g_0(\xi_0^i)\,\phi(\xi_0^i) \leq \sup_{x \in E} g_0(x) \qquad \text{pour tout } i = 1, \cdots, N$$

où les v.a. $(\xi_0^i, \cdots, \xi_0^N)$ sont indépendantes de distribution commune η_0.]

En déduire que

$$E_0^N(c) \leq 2\,\exp\{-\,\frac{2\,c^2}{r_0^2}\,N\}\ .$$

▶ Itération, $k = 1, \cdots, n$.

(v) **Montrer que**

$$\mathbb{P}[\tau^N \leq k] = \mathbb{P}[\tau^N \leq k-1] + \mathbb{P}[\tau^N = k]\ ,$$

et

$$\mathbb{P}[\tau^N = k]\ =\ \mathbb{P}[\,\langle \gamma_k^N, 1\rangle = 0 \text{ et } \tau^N > k-1\,]$$

$$\leq\ \mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, 1\rangle}{\langle \gamma_k, 1\rangle}| > \tfrac{1}{2} \text{ et } \tau^N > k-1\,] = F_k^N\ .$$

(vi) **Montrer que sur l'ensemble $\{\tau^N > k-1\}$ pour toute fonction mesurable bornée ϕ**

$$|\,\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi\rangle}{\langle \gamma_k, 1\rangle}\,|\ \leq\ |\,\frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle\ \langle \eta_k, g_k\rangle}\,|$$

$$+\,|\,\frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\,Q_k, g_k\,\phi\rangle}{\langle \eta_k, g_k\rangle}\,|\,(\,1 + |\,\frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,|\,)\ .$$

En déduire que

$$E_k^N(c)\ =\ \sup_{\phi \geq 0\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{P}[\,|\,\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi\rangle}{\langle \gamma_k, 1\rangle}\,| > c \text{ et } \tau^N > k-1\,]$$

$$\leq\ \sup_{\phi \geq 0\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{P}[\,|\,\frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,| > \tfrac{1}{2}\,c\,\langle \eta_k, g_k\rangle \text{ et } \tau^N > k-1\,]$$

$$+\,\mathbb{P}[\,|\,\frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,| > \tfrac{1}{2} \text{ et } \tau^N > k-1\,]$$

$$+\,\sup_{\phi \geq 0\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{P}[\,|\,\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\,Q_k, g_k\,\phi\rangle\,| > \tfrac{1}{3}\,c\,\langle \eta_k, g_k\rangle \text{ et } \tau^N > k-1\,]\ .$$

Dans le second membre, le deuxième terme est facilement majoré par F_{k-1}^N, et on se propose d'étudier successivement le premier et le troisième terme.

(vii) **Montrer que pour toute fonction mesurable positive ϕ telle que $\|\phi\| = 1$**

$$\mathbb{P}[\,|\,\frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,| > \tfrac{1}{2}\,c\,\langle \eta_k, g_k\rangle \text{ et } \tau^N > k{-}1\,]$$

$$\leq \sup_{\phi\geq 0\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{P}[\,|\,\frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,| > \tfrac{1}{2}\,\frac{c}{r_k} \text{ et } \tau^N > k{-}1\,]\ .$$

En déduire que

$$\sup_{\phi\geq 0\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{P}[\,|\,\frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,| > \tfrac{1}{2}\,c\,\langle \eta_k, g_k\rangle \text{ et } \tau^N > k{-}1\,] \leq E_{k-1}^N(\tfrac{1}{2}\,\frac{c}{r_k})\ .$$

(viii) **Montrer que sur l'ensemble $\{\tau^N > k{-}1\}$, mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{k-1}^N$ engendrée par toutes les particules jusqu'à la génération $(k{-}1)$, pour toute fonction mesurable positive ϕ telle que $\|\phi\| = 1$**

$$\mathbb{P}[\,|\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\,Q_k, g_k\,\phi\rangle\,| > \tfrac{1}{3}\,c\,\langle \eta_k, g_k\rangle \mid \mathcal{F}_{k-1}^N\,] \leq 2\,\exp\{-\,\tfrac{2}{9}\,\frac{c^2}{r_k^2}\,N\}\ .$$

[Indication : On pourra utiliser l'inégalité exponentielle de Hoeffding, avec

$$0 \leq X_i = g_k(\xi_k^i)\,\phi(\xi_k^i) \leq \sup_{x\in E} g_k(x) \qquad \text{pour tout } i = 1, \cdots, N$$

où conditionnellement par rapport à $\mathcal{F}_{k-1}^N$ les v.a. $(\xi_k^i, \cdots, \xi_k^N)$ sont indépendantes de distribution commune $\mu_{k-1}^N\,Q_k$.]

En déduire que

$$\sup_{\phi\geq 0\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{P}[\,|\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\,Q_k, g_k\,\phi\rangle\,| > \tfrac{1}{3}\,c\,\langle \eta_k, g_k\rangle \text{ et } \tau^N > k{-}1\,] \leq 2\,\exp\{-\,\tfrac{2}{9}\,\frac{c^2}{r_k^2}\,N\}\ .$$

En reportant les estimations obtenues en réponse aux questions (vii) et (viii) dans la majoration obtenue en réponse à la question (vi), on obtient

$$E_k^N(c) \leq E_{k-1}^N(\tfrac{1}{2}\,\frac{c}{r_k}) + F_{k-1}^N + 2\,\exp\{-\,\tfrac{2}{9}\,\frac{c^2}{r_k^2}\,N\}\ , \qquad (\star)$$

avec la condition initiale

$$E_0^N(c) \leq 2\,\exp\{-\,\frac{2\,c^2}{r_0^2}\,N\}\ ,$$

obtenue en réponse à la question (iv).

(ix) **Montrer par récurrence, en utilisant la relation ($\star$), que la probabilité d'extinction vérifie**

$$\mathbb{P}[\tau^N \leq n] \leq a_n \ \exp\{-\, b_n\, N\} \ ,$$

où $a_n > 0$ **et** $b_n > 0$ **sont des réels positifs.**