Université de Rennes 1
Master EEA (parcours SISEA)

Examen du cours
“Filtrage de Kalman et modèles de Markov cachés”
Jeudi 11 février 2021, 14:00 à 16:00

—— correction ——

Exercice 1 :

L'objectif de cet exercice est d'établir les équations du filtre de Kalman dans un cas où le bruit d'état et le bruit d'observation sont corrélés. On considère le système linéaire

$$X_k = F\, X_{k-1} + W_k \ ,$$

$$Y_k = H\, X_k + V_k \ ,$$

sous les hypothèses :

- *l'état initial X_0 est vecteur aléatoire gaussien, de moyenne $\bar{X}_0$ et de matrice de covariance P_0,*
- *la suite $\{\begin{pmatrix} W_k \\ V_{k-1} \end{pmatrix}\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de matrice de covariance $\begin{pmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{pmatrix}$, où la matrice de covariance R est inversible,*
- *le vecteur X_0 et la suite $\{\begin{pmatrix} W_k \\ V_{k-1} \end{pmatrix}\}$ sont mutuellement indépendants.*

(i) **Montrer que la loi conditionnelle de X_k sachant $(Y_0, \cdots, Y_{k-1})$, et celle de X_k sachant $(Y_0, \cdots, Y_k)$, sont des lois gaussiennes.**

Solution

On pose $Z_k = (X_k, Y_{k-1})$ et la première étape consiste à montrer par récurrence que le vecteur $Z_{1:k} = (Z_1, \cdots, Z_k)$ dépend linéairement de $(X_0, W_1, V_0, \cdots, W_k, V_{k-1})$.

On vérifie que le vecteur X_1 dépend linéairement de (X_0, W_1), et que le vecteur Y_0 dépend linéairement de (X_0, V_0), de sorte que le vecteur $Z_1 = (X_1, Y_0)$ dépend linéairement de (X_0, W_1, V_0). En d'autres termes, l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $k = 1$.

On vérifie que le vecteur X_k dépend linéairement de (X_{k-1}, W_k), et que le vecteur Y_{k-1} dépend linéairement de (X_{k-1}, V_{k-1}), de sorte que le vecteur $Z_k = (X_k, Y_{k-1})$ dépend linéairement de (X_{k-1}, W_k, V_{k-1}) et a fortiori de $(Z_{1:k-1}, W_k, V_{k-1})$. Si l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $(k-1)$, alors le vecteur $Z_{1:k-1}$ dépend linéairement de $(X_0, W_1, V_0, \cdots, W_{k-1}, V_{k-2})$, de sorte que le vecteur $Z_{1:k} = (Z_{1:k-1}, Z_k)$ dépend linéairement de $(X_0, W_1, V_0, \cdots, W_k, V_{k-1})$. En d'autres termes, l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang k.

Par hypothèse, X_0, (W_1, V_0), $\cdots$, (W_k, V_{k-1}) sont des vecteurs aléatoires gaussiens indépendants, de sorte que le vecteur aléatoire $(X_0, W_1, V_0, \cdots, W_k, V_{k-1})$ est gaussien. On en déduit que le vecteur aléatoire $Z_{1:k}$ est gaussien, comme transformation linéaire d'un vecteur aléatoire gaussien.

Clairement

- le vecteur $(X_k, Y_0, \cdots, Y_{k-1})$ dépend linéairement de $Z_{1:k}$,
- et le vecteur $(X_k, Y_0, \cdots, Y_k)$ dépend linéairement de $Z_{1:k+1}$.

On en déduit que les deux vecteurs aléatoires $(X_k, Y_0, \cdots, Y_{k-1})$ et $(X_k, Y_0, \cdots, Y_k)$ sont gaussiens, comme transformations linéaires de deux vecteurs aléatoires gaussiens. Par conditionnement dans les vecteurs aléatoires gaussiens, la loi conditionnelle de X_k sachant $(Y_0, \cdots, Y_{k-1})$ et la loi conditionnelle de X_k sachant $(Y_0, \cdots, Y_k)$ sont deux lois gaussiennes.

$\square$

On propose de se ramener au cas où le bruit d'état et le bruit d'observation sont indépendants.

1ère étape : On cherche d'abord une décomposition de W_k de la forme

$$W_k = W'_k + J\, V_{k-1} \ ,$$

avec W'_k indépendant de V_{k-1}.

(ii) **Montrer que nécessairement le vecteur aléatoire** $\begin{pmatrix} W'_k \\ V_{k-1} \end{pmatrix}$ **est gaussien.**

Solution

Clairement $W'_k = W_k - J\, V_{k-1}$ de sorte que

$$\begin{pmatrix} W'_k \\ V_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -J \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_k \\ V_{k-1} \end{pmatrix} \ .$$

On en déduit que le vecteur aléatoire $\begin{pmatrix} W'_k \\ V_{k-1} \end{pmatrix}$ est gaussien, comme transformation linéaire du vecteur aléatoire gaussien $\begin{pmatrix} W_k \\ V_{k-1} \end{pmatrix}$.

□

(iii) **Déterminer la matrice J.**

[Indice : On exprimera par exemple que $\mathbb{E}[W'_k \, V^*_{k-1}] = 0$.]

Solution

Par hypothèse, les vecteurs aléatoires W'_k et V_{k-1} sont indépendants et centrés, ils sont donc décorrélés, de sorte que

$$0 = \mathbb{E}[W'_k \, V^*_{k-1}] = \mathbb{E}[(W_k - J\, V_{k-1}) \, V^*_{k-1}] = \mathbb{E}[W_k \, V^*_{k-1}] - J \, \mathbb{E}[V_{k-1} \, V^*_{k-1}] = S - J\, R \; .$$

On en déduit que $J = S\, R^{-1}$.

□

(iv) **Calculer la matrice de covariance Q' du vecteur aléatoire W'_k.**

Solution

Par hypothèse, les vecteurs aléatoires W'_k et V_{k-1} sont indépendants et centrés, ils sont donc décorrélés, de sorte que

$$\begin{aligned} Q = \mathbb{E}[W_k \, W^*_k] &= \mathbb{E}[(W'_k + J\, V_{k-1}) \, (W'_k + J\, V_{k-1})^*] \\ &= \mathbb{E}[W'_k \, {W'_k}^*] + J \, \mathbb{E}[V_{k-1} \, V^*_{k-1}] \, J^* \\ &= Q' + J\, R\, J^* \; . \end{aligned}$$

On remarque que $J\, R\, J^* = S\, R^{-1}\, S^*$ de sorte que $Q' = Q - S\, R^{-1}\, S^*$ qui s'interprète comme le complément de Schur de la matrice R dans la matrice–bloc $\begin{pmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{pmatrix}$.

□

2ème étape : On se propose ensuite de réécrire l'équation d'état sous la forme

$$X_k = F'\, X_{k-1} + D\, Y_{k-1} + W'_k \; .$$

(v) **Donner l'expression des matrices F' et D.**

[Indice : On pourra utiliser la décomposition du vecteur aléatoire W_k, puis tirer V_{k-1} de l'équation d'observation, et reporter dans l'équation d'état.]

Solution

En utilisant la décomposition du vecteur aléatoire W_k, puis en tirant V_{k-1} de l'équation d'observation, et en reportant dans l'équation d'état, on obtient

$$\begin{aligned} X_k &= F\,X_{k-1} + W_k \\ &= F\,X_{k-1} + W'_k + J\,V_{k-1} \\ &= F\,X_{k-1} + W'_k + J\,(Y_{k-1} - H\,X_{k-1}) \\ &= (F - J\,H)\,X_{k-1} + J\,Y_{k-1} + W'_k\ , \end{aligned}$$

qui est bien de la forme annoncée, avec $F' = F - J\,H$ et $D = J$, c'est–à–dire au final $F' = F - S\,R^{-1}\,H$ et $D = S\,R^{-1}$.

□

On est donc conduit à étudier le système linéaire

$$\begin{aligned} X_k &= F'\,X_{k-1} + D\,Y_{k-1} + W'_k\ , \\ Y_k &= H\,X_k + V_k\ . \end{aligned}$$

(vi) **Montrer que les suites $\{W'_k\}$ et $\{V_k\}$ vérifient les hypothèses habituelles.**

Solution

Par hypothèse, la suite $\{\begin{pmatrix} W_k \\ V_{k-1} \end{pmatrix}\}$ est un bruit blanc gaussien, et a fortiori la suite $\{W'_k = W_k - J\,V_{k-1}\}$ est un bruit blanc gaussien.

Par hypothèse, la suite $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien.

Il reste à vérifier que les vecteurs aléatoires W'_k et V_l sont indépendants, pour tout k et pour tout l. Par construction, les vecteurs aléatoires W'_k et V_{k-1} sont indépendants, et si $l \neq k-1$, alors par hypothèse les vecteurs aléatoires $\begin{pmatrix} W_k \\ V_{k-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} W_{l+1} \\ V_l \end{pmatrix}$ sont indépendants, et a fortiori les vecteurs aléatoires $W'_k = W_k - J\,V_{k-1}$ et V_l sont indépendants.

□

On rappelle que la loi conditionnelle de X_k sachant $(Y_0, \cdots, Y_{k-1})$, et celle de X_k sachant $(Y_0, \cdots, Y_k)$, sont des lois gaussiennes, et on note $(\widehat{X}_k^-, P_k^-)$ et $(\widehat{X}_k, P_k)$ leurs moyennes et matrices de covariance respectives.

(vii) **Donner l'expression de $(\widehat{X}_k^-, P_k^-)$ en fonction de $(\widehat{X}_{k-1}, P_{k-1})$.**

Vérifier que ces expressions coïncident avec celles du cas habituel, dans le cas particulier où $S = 0$.

Solution

Par définition

$$\begin{aligned} \widehat{X}_k^- &= \mathbb{E}[X_k \mid Y_{0:k-1}] \\ &= F' \, \mathbb{E}[X_{k-1} \mid Y_{0:k-1}] + D \, Y_{k-1} + \mathbb{E}[W'_k \mid Y_{0:k-1}] \\ &= F' \, \widehat{X}_{k-1} + D \, Y_{k-1} \ . \end{aligned}$$

Par différence

$$X_k - \widehat{X}_k^- = F' \, (X_{k-1} - \widehat{X}_{k-1}) + W'_k \ ,$$

et par définition

$$\begin{aligned} P_k^- &= \mathbb{E}[(X_k - \widehat{X}_k^-) \, (X_k - \widehat{X}_k^-)^*] \\ &= \mathbb{E}[(F' \, (X_{k-1} - \widehat{X}_{k-1}) + W'_k) \, (F' \, (X_{k-1} - \widehat{X}_{k-1}) + W'_k)^*] \\ &= F' \, \mathbb{E}[(X_{k-1} - \widehat{X}_{k-1}) \, (X_{k-1} - \widehat{X}_{k-1})^*] \, F'^* + \mathbb{E}[W'_k \, W'^*_k] \\ &= F' \, P_{k-1} \, F'^* + Q' \ . \end{aligned}$$

En utilisant les expressions $F' = F - S \, R^{-1} \, H$, $D = S \, R^{-1}$ et $Q' = Q - S \, R^{-1} \, S^*$, les équations se ré–écrivent

$$\begin{aligned} \widehat{X}_k^- &= F' \, \widehat{X}_{k-1} + D \, Y_{k-1} \\ &= (F - S \, R^{-1} \, H) \, \widehat{X}_{k-1} + S \, R^{-1} \, Y_{k-1} \\ &= F \, \widehat{X}_{k-1} + S \, R^{-1} \, (Y_{k-1} - H \, \widehat{X}_{k-1}) \ , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_k^- &= F' \, P_{k-1} \, F'^* + Q' \\ &= (F - S \, R^{-1} \, H) \, P_{k-1} \, (F - S \, R^{-1} \, H)^* + Q - S \, R^{-1} \, S^* \ . \end{aligned}$$

□

Les expressions de $(\widehat{X}_k, P_k)$ en fonction de $(\widehat{X}_k^-, P_k^-)$ sont exactement les mêmes que dans le cas habituel, c'est–à–dire que

$$\widehat{X}_k \;=\; \widehat{X}_k^- + K_k \, (Y_k - H \, \widehat{X}_k^-) \; ,$$

$$P_k \;=\; (I - K_k \, H) \; P_k^- \; ,$$

avec la matrice de gain de Kalman

$$K_k = P_k^- \, H^* \, (H \, P_k^- \, H^* + R)^{-1} \; .$$

EXERCICE 2 :

L'objectif de cet exercice est d'étudier un problème de détection bayésienne binaire dans un bruit blanc gaussien. Au final, cet exercice a aussi pour objectif d'obtenir des expressions simples pour la variable forward normalisée dans un modèle de Markov caché avec deux hypothèses seulement.

On observe une suite $\{Y_k\}$ à valeurs réelles, définie par

$$Y_k = \theta_k + V_k \ ,$$

où la suite $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de variance 1. La suite $\{\theta_k\}$ est une chaîne de Markov prenant deux valeurs réelles 0 ou m, indépendante de la suite $\{V_k\}$. Dans ce cas particulier avec deux hypothèses seulement, la loi initiale ν est définie par un unique paramètre $0 \leq p_0 \leq 1$

$$\mathbb{P}[\theta_0 = 0] = p_0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}[\theta_0 = m] = 1 - p_0 \ ,$$

et la matrice de transition π est définie par deux paramètres $0 \leq a, b \leq 1$

$$\mathbb{P}[\theta_k = 0 \mid \theta_{k-1} = 0] = a \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}[\theta_k = m \mid \theta_{k-1} = 0] = 1 - a \ ,$$

et

$$\mathbb{P}[\theta_k = 0 \mid \theta_{k-1} = m] = 1 - b \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}[\theta_k = m \mid \theta_{k-1} = m] = b \ .$$

qu'on supposera indépendants de l'instant k.

(i) **Donner l'expression vectorielle de la loi initiale ν en fonction du paramètre p_0, et donner l'expression matricielle de la matrice de transition π en fonction des paramètres a et b.**

[Très facile.]

SOLUTION

Par définition

$$\nu = \begin{pmatrix} p_0 & 1 - p_0 \end{pmatrix} \ ,$$

et

$$\pi = \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ 1 - b & b \end{pmatrix} \ .$$

□

(ii) **Donner l'expression des deux densités d'émission $g_0(y)$ et $g(y)$, indépendantes de l'instant k et définies par**

$$\mathbb{P}[Y_k \in dy \mid \theta_k = 0] = g_0(y)\, dy \qquad \textbf{et} \qquad \mathbb{P}[Y_k \in dy \mid \theta_k = m] = g(y)\, dy \ ,$$

respectivement.

Solution

Par définition, $g_0(y)$ est une densité gaussienne, de moyenne 0 et de variance 1, d'où l'expression

$$g_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; \exp\{-\tfrac{1}{2}\, y^2\} \ ,$$

et $g(y)$ est une densité gaussienne, de moyenne m et de variance 1, d'où l'expression

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; \exp\{-\tfrac{1}{2}\, (y-m)^2\} \ .$$

$\Box$

On définit le rapport de vraisemblance $\Lambda_k = \dfrac{g_0(Y_k)}{g(Y_k)}$ et la matrice diagonale

$$G(Y_k) = \begin{pmatrix} g_0(Y_k) & 0 \\ 0 & g(Y_k) \end{pmatrix} \ .$$

Dans ce cas particulier avec deux hypothèses seulement, la variable forward normalisée $\bar{p}_k$ est définie par un unique paramètre $0 \le \mu_k \le 1$

$$\mathbb{P}[\theta_k = 0 \mid Y_{0:k}] = \mu_k \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}[\theta_k = m \mid Y_{0:k}] = 1 - \mu_k \ ,$$

et on pose

$$r_k = \frac{\mu_k}{1-\mu_k} \qquad \text{de sorte que} \qquad \mu_k = \frac{r_k}{1+r_k} \ .$$

(iii) **Donner l'expression vectorielle de la variable forward normalisée $\bar{p}_k$ en fonction du paramètre μ_k. Écrire l'équation de Baum forward pour la variable forward normalisée $\bar{p}_k$. En déduire que**

$$r_k = \frac{a\, r_{k-1} + (1-b)}{(1-a)\, r_{k-1} + b} \; \Lambda_k \ .$$

[Indice : Établir d'abord les expressions de μ_k et de $(1-\mu_k)$ en fonction de μ_{k-1}, $(1-\mu_{k-1})$ et Λ_k, puis faire le rapport membre–à–membre des identités obtenues.]

Solution

On rappelle la condition initiale pour la variable forward normalisée, vue comme un vecteur–ligne

$$\bar{p}_0 = \frac{1}{c_0}\; \nu\; G(Y_0) \ .$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \nu\; G(Y_0) \;&=\; \begin{pmatrix} p_0 & 1-p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(Y_0) & 0 \\ 0 & g(Y_0) \end{pmatrix} \\[1ex] &=\; \begin{pmatrix} p_0\, g_0(Y_0) & (1-p_0)\, g(Y_0) \end{pmatrix} \ , \end{aligned}$$

de sorte que la condition initiale

$$\bar{p}_0 = \frac{1}{c_0}\, \nu\, G(Y_0) \ ,$$

se réécrit comme

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & 1-\mu_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c_0} \begin{pmatrix} p_0\, g_0(Y_0) & (1-p_0)\, g(Y_0) \end{pmatrix} \ .$$

On en déduit que

$$\mu_0 = \frac{1}{c_0}\, p_0\, g_0(Y_0) \ ,$$

et

$$1-\mu_0 = \frac{1}{c_0}\, (1-p_0)\, g(Y_0) \ .$$

En faisant la somme membre–à–membre de ces deux identités, on obtient l'expression de la constante de normalisation

$$c_k = p_0\, g_0(Y_0) + (1-p_0)\, g(Y_0) \ ,$$

de sorte que

$$\mu_0 = \frac{p_0\, g_0(Y_0)}{p_0\, g_0(Y_0) + (1-p_0)\, g(Y_0)} = \frac{p_0\, \Lambda_0}{p_0\, \Lambda_0 + (1-p_0)} \ .$$

En faisant le rapport membre–à–membre de ces deux identités, on obtient

$$r_0 = \frac{\mu_0}{1-\mu_0} = \frac{p_0}{1-p_0}\, \frac{g_0(Y_0)}{g(Y_0)} = \frac{p_0}{1-p_0}\, \Lambda_0 \ .$$

On rappelle l'équation de Baum forward pour la variable forward normalisée, vue comme un vecteur–ligne

$$\bar{p}_k = \frac{1}{c_k}\, \bar{p}_{k-1}\, \pi\, G(Y_k) \ .$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \bar{p}_{k-1}\, \pi \ &= \begin{pmatrix} \mu_{k-1} & 1-\mu_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\, \mu_{k-1} + (1-b)\, (1-\mu_{k-1}) & (1-a)\, \mu_{k-1} + b\, (1-\mu_{k-1}) \end{pmatrix} \ , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\bar{p}_{k-1}\, \pi\, G(Y_k) \\ &\qquad = \begin{pmatrix} a\, \mu_{k-1} + (1-b)\, (1-\mu_{k-1}) & (1-a)\, \mu_{k-1} + b\, (1-\mu_{k-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(Y_k) & 0 \\ 0 & g(Y_k) \end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} [a\, \mu_{k-1} + (1-b)\, (1-\mu_{k-1})]\, g_0(Y_k) & [(1-a)\, \mu_{k-1} + b\, (1-\mu_{k-1})]\, g(Y_k) \end{pmatrix} \ , \end{aligned}$$

de sorte que l'équation de Baum forward

$$\bar{p}_k = \frac{1}{c_k}\, \bar{p}_{k-1}\, \pi\, G(Y_k) \ ,$$

se réécrit comme

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \mu_k & 1-\mu_k \end{pmatrix} \\ &\quad = \frac{1}{c_k}\, \begin{pmatrix} [a\,\mu_{k-1} + (1-b)\,(1-\mu_{k-1})]\; g_0(Y_k) & [(1-a)\,\mu_{k-1} + b\,(1-\mu_{k-1})]\; g(Y_k) \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mu_k = \frac{1}{c_k}\, [a\,\mu_{k-1} + (1-b)\,(1-\mu_{k-1})]\; g_0(Y_k) \ ,$$

et

$$1-\mu_k = \frac{1}{c_k}\, [(1-a)\,\mu_{k-1} + b\,(1-\mu_{k-1})]\; g(Y_k) \ .$$

En faisant la somme membre–à–membre de ces deux identités, on obtient l'expression de la constante de normalisation

$$c_k = [a\,\mu_{k-1} + (1-b)\,(1-\mu_{k-1})]\; g_0(Y_k) + [(1-a)\,\mu_{k-1} + b\,(1-\mu_{k-1})]\; g(Y_k) \ ,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \mu_k &= \frac{[a\,\mu_{k-1} + (1-b)\,(1-\mu_{k-1})]\; g_0(Y_k)}{[a\,\mu_{k-1} + (1-b)\,(1-\mu_{k-1})]\; g_0(Y_k) + [(1-a)\,\mu_{k-1} + b\,(1-\mu_{k-1})]\; g(Y_k)} \\ &= \frac{[a\,\mu_{k-1} + (1-b)\,(1-\mu_{k-1})]\; \Lambda_k}{[a\,\mu_{k-1} + (1-b)\,(1-\mu_{k-1})]\; \Lambda_k + [(1-a)\,\mu_{k-1} + b\,(1-\mu_{k-1})]} \\ &= \frac{[a\,r_{k-1} + (1-b)]\; \Lambda_k}{[a\,r_{k-1} + (1-b)]\; \Lambda_k + [(1-a)\,r_{k-1} + b]} \ . \end{aligned}$$

En faisant le rapport membre–à–membre de ces deux identités, on obtient

$$r_k = \frac{\mu_k}{1-\mu_k} = \frac{a\,\mu_{k-1} + (1-b)\,(1-\mu_{k-1})}{(1-a)\,\mu_{k-1} + b\,(1-\mu_{k-1})}\; \frac{g_0(Y_k)}{g(Y_k)} = \frac{a\,r_{k-1} + (1-b)}{(1-a)\,r_{k-1} + b}\; \Lambda_k \ .$$

□

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère le cas particulier où $a = b = 1$.

(iv) **Décrire la chaîne de Markov $\{\theta_k\}$ dans ce cas particulier.**

[Très facile.]

SOLUTION

Dans le cas particulier où $a = b = 1$, l'expression de la matrice de transition devient

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

c'est–à–dire que la matrice de transition est égale à la matrice identité, et la chaîne de Markov $\{\theta_k\}$ est constante. Concrètement $\theta_0 = \theta_1 = \cdots = \theta_k$ pour tout instant k.

$\Box$

(v) **En particularisant le résultat obtenu à la question (iii), exprimer r_k en fonction de r_{k-1} et de Λ_k, et en itérant, exprimer r_k en fonction de p_0 et du produit $\Lambda_{0:k} = \Lambda_0 \, \Lambda_1 \cdots \Lambda_k$.**

En déduire l'expression de μ_k en fonction de p_0 et $\Lambda_{0:k}$.

SOLUTION

Dans le cas particulier où $a = b = 1$, l'équation

$$\mu_k = \frac{[a\, \mu_{k-1} + (1-b)\,(1-\mu_{k-1})]\;\Lambda_k}{[a\, \mu_{k-1} + (1-b)\,(1-\mu_{k-1})]\;\Lambda_k + [(1-a)\,\mu_{k-1} + b\,(1-\mu_{k-1})]} ,$$

devient

$$\mu_k = \frac{\mu_{k-1}\;\Lambda_k}{\mu_{k-1}\;\Lambda_k + (1-\mu_{k-1})} ,$$

et l'équation

$$r_k = \frac{a\, r_{k-1} + (1-b)}{(1-a)\, r_{k-1} + b}\;\Lambda_k ,$$

devient

$$r_k = r_{k-1}\;\Lambda_k .$$

En itérant, on obtient

$$r_k = r_0\;\Lambda_1 \cdots \Lambda_k = \frac{p_0}{1-p_0}\;\Lambda_0\;\Lambda_1 \cdots \Lambda_k = \frac{p_0}{1-p_0}\;\Lambda_{0:k} ,$$

et

$$\mu_k = \frac{r_k}{1+r_k} = \frac{\dfrac{p_0}{1-p_0}\;\Lambda_{0:k}}{1 + \dfrac{p_0}{1-p_0}\;\Lambda_{0:k}} = \frac{p_0\;\Lambda_{0:k}}{p_0\;\Lambda_{0:k} + (1-p_0)} .$$

$\Box$

(vi) **Montrer comment obtenir directement ce résultat.**

Solution

Dans le cas particulier où $\theta_0 = \theta_1 = \cdots = \theta_k$, le problème se réduit à décider, au vu des observations recueillies $Y_{0:k} = (Y_0, Y_1, \cdots, Y_k)$, si le paramètre θ_0 est égal à 0 ou à m, sachant que ce paramètre est aléatoire, avec une loi a priori connue

$$\mathbb{P}[\theta_0 = 0] = p_0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}[\theta_0 = m] = 1 - p_0 \ .$$

Il s'agit d'un problème de détection bayésienne binaire. On remarque que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y_{0:k} \in dy_{0:k} \mid \theta_k = 0] &= \mathbb{P}[Y_{0:k} \in dy_{0:k} \mid \theta_{0:k} = 0] \\ &= g_0(y_0)\, g_0(y_1) \cdots g_0(y_k)\, dy_0\, dy_1 \cdots dy_k \ , \end{aligned}$$

d'où l'expression de la vraisemblance pour le modèle avec $\theta_0 = 0$

$$g_0(Y_0)\, g_0(Y_1) \cdots g_0(Y_k) \ ,$$

et de même

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y_{0:k} \in dy_{0:k} \mid \theta_k = m] &= \mathbb{P}[Y_{0:k} \in dy_{0:k} \mid \theta_{0:k} = m] \\ &= g(y_0)\, g(y_1) \cdots g(y_k)\, dy_0\, dy_1 \cdots dy_k \ , \end{aligned}$$

d'où l'expression de la vraisemblance pour le modèle avec $\theta_0 = m$

$$g(Y_0)\, g(Y_1) \cdots g(Y_k) \ .$$

D'après la formule de Bayes, la loi a posteriori de la variable aléatoire θ_0 est égale, à une constante de normalisation près, au produit de la fonction de vraisemblance et de la loi a priori de la variable aléatoire θ_0. On a donc

$$\mu_k = \mathbb{P}[\theta_k = 0 \mid Y_{0:k}] = \frac{1}{c_k}\, p_0\, g_0(Y_0)\, g_0(Y_1) \cdots g_0(Y_k) \ ,$$

et

$$1 - \mu_k = \mathbb{P}[\theta_k = m \mid Y_{0:k}] = \frac{1}{c_k}\, (1 - p_0)\, g(Y_0)\, g(Y_1) \cdots g(Y_k) \ .$$

En faisant le rapport membre–à–membre de ces deux identités, on obtient

$$r_k = \frac{\mu_k}{1 - \mu_k} = \frac{p_0}{1 - p_0}\, \frac{g_0(Y_0)}{g(Y_0)}\, \frac{g_0(Y_1)}{g(Y_1)} \cdots \frac{g_0(Y_k)}{g(Y_k)} = \frac{p_0}{1 - p_0}\, \Lambda_0\, \Lambda_1 \cdots \Lambda_k = \frac{p_0}{1 - p_0}\, \Lambda_{0:k} \ .$$

□

On définit l'estimateur du maximum a posteriori (MAP) de la façon suivante :

$$\theta_k^{\text{MAP}} = 0 \qquad \text{si et seulement si} \qquad \mu_k \geq \tfrac{1}{2} \ .$$

(vii) **Montrer que**

$$\theta_k^{\text{MAP}} = 0 \qquad \textbf{si et seulement si} \qquad \Lambda_{0:k} \geq \frac{1-p_0}{p_0} \ .$$

Solution

L'application

$$\mu \mapsto r = \frac{\mu}{1-\mu} \ ,$$

est croissante, de sorte que $\mu_k \geq \frac{1}{2}$ si et seulement si $r_k \geq 1$. On rappelle que

$$r_k = \frac{p_0}{1-p_0} \, \Lambda_{0:k} \ ,$$

de sorte que

$$r_k \geq 1 \qquad \text{si et seulement si} \qquad \Lambda_{0:k} \geq \frac{1-p_0}{p_0} \ .$$

□