Université de Rennes 1
DEA STIR
Signal — Télécommunications — Images — Radar
Option Signal

Examen du cours
“Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés”
Jeudi 7 janvier 1999, 15:30 à 17:00
— Corrigé —

L'objectif de ce problème est d'étudier les systèmes linéaires à paramètre markovien, qui sont souvent utilisés pour modéliser des systèmes linéaires avec coefficients inconnus, ou avec coefficients susceptibles de changer brusquement.

Partie A On considère le modèle d'état suivant :

- L'état $\{X_k\, ,\, k \geq 0\}$ est défini par le système linéaire suivant, à valeurs dans $\mathbf{R}^m$

  $$X_{k+1} = F(s_k)\, X_k + W_k \ ,$$

  où la suite $\{W_k\, ,\, k \geq 0\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de matrice de covariance Q inversible, et où la suite $\{s_k\, ,\, k \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à espace d'état fini $E = \{1, \cdots, N\}$, de loi initiale

  $$\mathbf{P}[s_0 = i] = \nu_i \ ,$$

  et de matrice de transition

  $$\mathbf{P}[s_{k+1} = j \mid s_k = i] = \pi_{i,j} \ .$$

  La condition initiale X_0 est une variable aléatoire gaussienne, de moyenne μ_0 et de matrice de covariance Σ_0 inversible.

On suppose que la chaîne de Markov $\{s_k\, ,\, k \geq 0\}$, la condition initiale X_0, et le bruit blanc gaussien $\{W_k\, ,\, k \geq 0\}$ sont mutuellement indépendants.

On considère d'abord le cas où l'état $\{X_k\, ,\, k \geq 0\}$ est directement observé, et on se propose de calculer la distribution de probabilité conditionnelle de s_n sachant $(X_0, \cdots, X_n)$.

(i) **Donner l'expression de la densité conditionnelle de X_{k+1} sachant (X_k, s_k), définie par**

$$\mathbf{P}[X_{k+1} \in dx' \mid X_k = x, s_k = i] = \Gamma_i(x, x')\, dx' \ ,$$

pour tout $i \in E$.

Solution

Conditionnellement à $(X_k = x, s_k = i)$, la v.a. X_{k+1} est gaussienne, de moyenne $F_i\, x$ (avec la notation $F_i = F(i)$), et de matrice de covariance Q inversible. On a donc

$$\Gamma_i(x, x') = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m \sqrt{\det Q}} \ \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\, (x' - F_i\, x)^* \, Q^{-1}\, (x' - F_i\, x) \Big\} \ .$$

□

(ii) **La propriété de canal sans mémoire est–elle vérifiée ? Donner l'expression de la distribution de probabilité conditionnelle**

$$\mathbf{P}[X_n \in dx_n, \cdots, X_0 \in dx_0 \mid s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0] \ .$$

Solution

On vérifie d'abord que

$$\mathbf{P}[X_0 \in dx \mid s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0] = \mathbf{P}[X_0 \in dx] = p(x)\, dx \ ,$$

avec

$$p(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m \sqrt{\det \Sigma_0}} \ \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\, (x - \mu_0)^* \, \Sigma_0^{-1}\, (x - \mu_0) \Big\} \ .$$

D'autre part, on a la décomposition suivante

$$\mathbf{P}[X_{k+1} \in dx_{k+1}, \cdots, X_0 \in dx_0 \mid s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$= \ \mathbf{P}[X_{k+1} \in dx_{k+1} \mid X_k = x_k, \cdots, X_0 = x_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$\mathbf{P}[X_k \in dx_k, \cdots, X_0 \in dx_0 \mid s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0] \ .$$

Conditionnellement à $(s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0)$, on a

$$X_{k+1} = F_{i_k}\, X_k + W_k \ ,$$

c'est–à–dire que la suite $\{X_k \, , \, k = 0, \cdots, n\}$ est un processus gaussien, mais n'est pas une suite de v.a. indépendantes : La propriété de *canal sans mémoire* n'est donc *pas* vérifiée.

Quand on connaît déja (X_k, s_k), connaître $(X_{k-1}, \cdots, X_0, s_n, \cdots, s_{k+1}, s_{k-1}, \cdots, s_0)$ n'apporte aucune information supplémentaire sur X_{k+1}. Par conséquent

$$\mathbf{P}[X_{k+1} \in dx_{k+1} \mid X_k = x_k, \cdots, X_0 = x_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$= \mathbf{P}[X_{k+1} \in dx_{k+1} \mid X_k = x_k, s_k = i_k] = \Gamma_{i_k}(x_k, x_{k+1})\, dx_{k+1} \ .$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}[X_{k+1} \in dx_{k+1}, \cdots, X_0 \in dx_0 \mid s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$= \mathbf{P}[X_k \in dx_k, \cdots, X_0 \in dx_0 \mid s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]\ \Gamma_{i_k}(x_k, x_{k+1})\, dx_{k+1} \ ,$$

et en itérant cette relation, on obtient

$$\mathbf{P}[X_n \in dx_n, \cdots, X_0 \in dx_0 \mid s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$= p(x_0)\ \Gamma_{i_0}(x_0, x_1) \cdots \Gamma_{i_{n-1}}(x_{n-1}, x_n)\ dx_0\, dx_1 \cdots dx_n \ ,$$

pour tout $i_0, \cdots, i_n \in E$.

□

(iii) **En déduire la distribution de probabilité jointe**

$$\mathbf{P}[X_n \in dx_n, \cdots, X_0 \in dx_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0] \ .$$

——— Solution ———

Compte tenu que

$$\mathbf{P}[s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0] = \nu_{i_0}\ \pi_{i_0,i_1} \cdots \pi_{i_{n-1},i_n} \ ,$$

on a immédiatement

$$\mathbf{P}[X_n \in dx_n, \cdots, X_0 \in dx_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$= \mathbf{P}[X_n \in dx_n, \cdots, X_0 \in dx_0 \mid s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]\ \mathbf{P}[s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$= \nu_{i_0}\ \pi_{i_0,i_1} \cdots \pi_{i_{n-1},i_n}\ p(x_0)\ \Gamma_{i_0}(x_0, x_1) \cdots \Gamma_{i_{n-1}}(x_{n-1}, x_n)\ dx_0\, dx_1 \cdots dx_n \ ,$$

pour tout $i_0, \cdots, i_n \in E$.

□

(iv) **Établir l'équation de Baum forward permettant de calculer la distribution de probabilité conditionnelle de s_n sachant $(X_0, \cdots, X_n)$.**

Comme dans la Section 6.1 du cours, on définit la distribution de probabilité jointe des observations passées $(X_0, \cdots, X_k)$ et de l'état présent s_k de la façon suivante

$$\mathbf{P}[X_0 \in dx_0, \cdots, X_k \in dx_k, s_k = i] = \alpha_i^k[x_0, \cdots, x_k]\, dx_0 \cdots dx_k \ ,$$

et on définit la variable forward $p^k = (p_i^k)$ par

$$p_i^k = \alpha_i^k[X_0, \cdots, X_k] \ ,$$

pour tout $i \in E$.

Comme dans la démonstration du Théorème 6.4, par définition

$$\alpha_i^k[x_0, \cdots, x_k]\, dx_0 \cdots dx_k = \mathbf{P}[X_0 \in dx_0, \cdots, X_k \in dx_k, s_k = i]$$

$$= \sum_{i_0, \cdots, i_{k-1} \in E} \mathbf{P}[X_0 \in dx_0, \cdots, X_k \in dx_k, s_0 = i_0, \cdots, s_{k-1} = i_{k-1}, s_k = i]$$

$$= \sum_{i_0, \cdots, i_{k-1} \in E} \nu_{i_0}\ \pi_{i_0, i_1} \cdots \pi_{i_{k-1}, i}\ p(x_0)\ \Gamma_{i_0}(x_0, x_1) \cdots \Gamma_{i_{k-1}}(x_{k-1}, x_k)\ dx_0\, dx_1 \cdots dx_k \ .$$

De même

$$\mathbf{P}[X_0 \in dx_0, \cdots, X_k \in dx_k, X_{k+1} \in dx_{k+1}, s_k = i, s_{k+1} = j]$$

$$= \sum_{i_0, \cdots, i_{k-1} \in E} \mathbf{P}[X_0 \in dx_0, \cdots, X_k \in dx_k, X_{k+1} \in dx_{k+1},$$

$$s_0 = i_0, \cdots, s_{k-1} = i_{k-1}, s_k = i, s_{k+1} = j]$$

$$= \sum_{i_0, \cdots, i_{k-1} \in E} \nu_{i_0}\ \pi_{i_0, i_1} \cdots \pi_{i_{k-1}, i}\ \pi_{i,j}$$

$$p(x_0)\ \Gamma_{i_0}(x_0, x_1) \cdots \Gamma_{i_{k-1}}(x_{k-1}, x_k)\ \Gamma_i(x_k, x_{k+1})\ dx_0\, dx_1 \cdots dx_k\, dx_{k+1}$$

$$= \pi_{i,j}\ \Gamma_i(x_k, x_{k+1})\ \alpha_i^k[x_0, \cdots, x_k]\ dx_0 \cdots dx_k\, dx_{k+1} \ ,$$

pour tout $i \in E$. En sommant pour tout $i \in E$, on obtient

$$\alpha_j^{k+1}[x_0, \cdots, x_{k+1}] = \sum_{i \in E} \pi_{i,j}\ \Gamma_i(x_k, x_{k+1})\ \alpha_i^k[x_0, \cdots, x_k] \ .$$

En substituant les véritables observations $(X_0, \cdots, X_{k+1})$ à la place des variables (muettes) $(x_0, \cdots, x_{k+1})$, on obtient

$$p_j^{k+1} = \sum_{i \in E} \pi_{i,j}\ \Gamma_i(X_k, X_{k+1})\ p_i^k \ ,$$

pour tout $j \in E$, avec la condition initiale

$$p_i^0 = \nu_i \, p(X_0) \ ,$$

pour tout $i \in E$. On en déduit

$$\mathbf{P}[s_n = i \mid X_0, \cdots, X_n] = \frac{p_i^n}{\sum_{j \in E} p_j^n} \ ,$$

pour tout $i \in E$.

$\square$

Partie B On considère à présent le cas où l'état $\{X_k\,,\,k\geq 0\}$ n'est pas directement observé, c'est–à–dire qu'on considère le modèle suivant :

- L'état $\{X_k\,,\,k\geq 0\}$ est défini par le système linéaire suivant, à valeurs dans $\mathbf{R}^m$

  $$X_{k+1} = F(s_k)\,X_k + W_k\ ,$$

  où la suite $\{W_k\,,\,k\geq 0\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de matrice de covariance Q inversible, et où la suite $\{s_k\,,\,k\geq 0\}$ est une chaîne de Markov à espace d'état fini $E=\{1,\cdots,N\}$, de loi initiale

  $$\mathbf{P}[s_0 = i] = \nu_i\ ,$$

  et de matrice de transition

  $$\mathbf{P}[s_{k+1} = j \mid s_k = i] = \pi_{i,j}\ .$$

  La condition initiale X_0 est une variable aléatoire gaussienne, de moyenne μ_0 et de matrice de covariance Σ_0 inversible.

- La suite des observations $\{Y_k\,,\,k\geq 0\}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, est définie par

  $$Y_k = H\,X_k + V_k\ ,$$

  où la suite $\{V_k\,,\,k\geq 0\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de matrice de covariance R inversible.

On suppose que la chaîne de Markov $\{s_k\,,\,k\geq 0\}$, la condition initiale X_0, et les bruits blancs gaussiens $\{W_k\,,\,k\geq 0\}$ et $\{V_k\,,\,k\geq 0\}$ sont mutuellement indépendants.

Dans cette partie, seule la suite $\{Y_k\,,\,k\geq 0\}$ est observée, et on se propose de calculer la distribution de probabilité conditionnelle jointe de (X_n, s_n) sachant $(Y_0,\cdots,Y_n)$.

(v) **Donner l'expression de la densité conditionnelle de Y_k sachant (X_k, s_k), définie par**

$$\mathbf{P}[Y_k \in dy \mid X_k = x, s_k = i] = \psi(x,y)\,dy\ ,$$

et vérifier que cette densité ne dépend pas de $i\in E$.

Solution

Conditionnellement à $(X_k = x, s_k = i)$, la v.a. Y_k est gaussienne, de moyenne $H\,x$, et de matrice de covariance R inversible. On remarque que les deux premiers moments ne dépendent pas de $i\in E$, et

$$\psi(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d\,\sqrt{\det R}}\ \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\,(y - H\,x)^*\,R^{-1}\,(y - H\,x)\Big\}\ .$$

$\square$

(vi) **Montrer que la propriété de canal sans mémoire est vérifiée, et en déduire l'expression de la distribution de probabilité conditionnelle**

$$\mathbf{P}[Y_n \in dy_n, \cdots, Y_0 \in dy_0 \mid X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0] \; .$$

Solution

Comme à la question (ii), on a la décomposition suivante

$$\mathbf{P}[Y_k \in dy_k, \cdots, Y_0 \in dy_0 \mid X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$= \mathbf{P}[Y_k \in dy_k \mid Y_{k-1} = y_{k-1}, \cdots, Y_0 = y_0, X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$\mathbf{P}[Y_{k-1} \in dy_{k-1}, \cdots, Y_0 \in dy_0 \mid X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0] \; .$$

Quand on connaît déja X_k, connaître $(Y_{k-1}, \cdots, Y_0, X_n, \cdots, X_{k+1}, X_{k-1}, \cdots, X_0, s_n, \cdots, s_0)$ n'apporte aucune information supplémentaire sur Y_k. Par conséquent

$$\mathbf{P}[Y_k \in dy_k \mid Y_{k-1} = y_{k-1}, \cdots, Y_0 = y_0, X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$= \mathbf{P}[Y_k \in dy_k \mid X_k = x_k] = \psi(x_k, y_k)\, dy_k \; .$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}[Y_k \in dy_k, \cdots, Y_0 \in dy_0 \mid X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$= \mathbf{P}[Y_{k-1} \in dy_{k-1}, \cdots, Y_0 \in dy_0 \mid X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$\psi(x_k, y_k)\, dy_k \; ,$$

et en itérant cette relation, on obtient

$$\mathbf{P}[Y_n \in dy_n, \cdots, Y_0 \in dy_0 \mid X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$= \psi(x_0, y_0) \cdots \psi(x_n, y_n)\; dy_0 \cdots dy_n \; ,$$

pour tout $i_0, \cdots, i_n \in E$. La propriété de *canal sans mémoire* est donc vérifiée.

$\square$

(vii) **En déduire la distribution de probabilité jointe**

$$\mathbf{P}[Y_n \in dy_n, \cdots, Y_0 \in dy_0, X_n \in dx_n, \cdots, X_0 \in dx_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0] \; .$$

Solution

Compte tenu que, d'après le résultat de la question (iii)

$$\mathbf{P}[X_n \in dx_n, \cdots, X_0 \in dx_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$= \nu_{i_0}\, \pi_{i_0,i_1} \cdots \pi_{i_{n-1},i_n}\, p(x_0)\, \Gamma_{i_0}(x_0, x_1) \cdots \Gamma_{i_{n-1}}(x_{n-1}, x_n)\, dx_0\, dx_1 \cdots dx_n \ ,$$

on a immédiatement

$$\mathbf{P}[Y_n \in dy_n, \cdots, Y_0 \in dy_0, X_n \in dx_n, \cdots, X_0 \in dx_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$= \mathbf{P}[Y_n \in dy_n, \cdots, Y_0 \in dy_0 \mid X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$\mathbf{P}[X_n \in dx_n, \cdots, X_0 \in dx_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0]$$

$$= \nu_{i_0}\, \pi_{i_0,i_1} \cdots \pi_{i_{n-1},i_n}\, p(x_0)\, \Gamma_{i_0}(x_0, x_1) \cdots \Gamma_{i_{n-1}}(x_{n-1}, x_n)\, dx_0\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$\psi(x_0, y_0) \cdots \psi(x_n, y_n)\, dy_0 \cdots dy_n \ ,$$

pour tout $i_0, \cdots, i_n \in E$.

□

(viii) **Établir l'équation de Baum forward permettant de calculer la distribution de probabilité conditionnelle jointe de (X_n, s_n) sachant $(Y_0, \cdots, Y_n)$, puis la distribution de probabilité conditionnelle marginale de s_n sachant $(Y_0, \cdots, Y_n)$.**

Solution

Comme à la question (iv), et comme dans la Section 6.1 du cours, on définit la distribution de probabilité jointe des observations passées $(Y_0, \cdots, Y_k)$ et de l'état présent (X_k, s_k) de la façon suivante

$$\mathbf{P}[Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_k \in dy_k, X_k \in dx, s_k = i] = \alpha_i^k[x, y_0, \cdots, y_k]\, dx\, dy_0 \cdots dy_k \ ,$$

et on définit la variable forward $p^k = (p_i^k(\cdot))$ par

$$p_i^k(x) = \alpha_i^k[x, Y_0, \cdots, Y_k] \ ,$$

pour tout $i \in E$ et tout $x \in \mathbf{R}^m$.

Comme dans la démonstration du Théorème 6.4, par définition

$$\alpha_i^k[x, y_0, \cdots, y_k]\; dx\, dy_0 \cdots dy_k = \mathbf{P}[Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_k \in dy_k, X_k \in dx, s_k = i]$$

$$= \sum_{i_0,\cdots,i_{k-1}\in E} \int_{\mathbf{R}^m} \cdots \int_{\mathbf{R}^m} \mathbf{P}[Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_k \in dy_k,$$

$$X_0 \in dx_0, \cdots, X_{k-1} \in dx_{k-1}, X_k \in dx, s_0 = i_0, \cdots, s_{k-1} = i_{k-1}, s_k = i]$$

$$= \sum_{i_0,\cdots,i_{k-1}\in E} \int_{\mathbf{R}^m} \cdots \int_{\mathbf{R}^m} \nu_{i_0}\; \pi_{i_0,i_1} \cdots \pi_{i_{k-1},i}$$

$$p(x_0)\; \Gamma_{i_0}(x_0, x_1) \cdots \Gamma_{i_{k-1}}(x_{k-1}, x)\; dx_0 \cdots dx_{k-1}\, dx$$

$$\psi(x_0, y_0) \cdots \psi(x_{k-1}, y_{k-1})\; \psi(x, y_k)\; dy_0 \cdots dy_k\ .$$

De même

$$\mathbf{P}[Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_k \in dy_k, Y_{k+1} \in dy_{k+1}, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx', s_k = i, s_{k+1} = j]$$

$$= \sum_{i_0,\cdots,i_{k-1}\in E} \int_{\mathbf{R}^m} \cdots \int_{\mathbf{R}^m} \mathbf{P}[Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_k \in dy_k, Y_{k+1} \in dy_{k+1},$$

$$X_0 \in dx_0, \cdots, X_{k-1} \in dx_{k-1}, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx',$$

$$s_0 = i_0, \cdots, s_{k-1} = i_{k-1}, s_k = i, s_{k+1} = j]$$

$$= \sum_{i_0,\cdots,i_{k-1}\in E} \int_{\mathbf{R}^m} \cdots \int_{\mathbf{R}^m} \nu_{i_0}\; \pi_{i_0,i_1} \cdots \pi_{i_{k-1},i}\; \pi_{i,j}$$

$$p(x_0)\; \Gamma_{i_0}(x_0, x_1) \cdots \Gamma_{i_{k-1}}(x_{k-1}, x)\; \Gamma_i(x, x')\; dx_0 \cdots dx_{k-1}\, dx\, dx'$$

$$\psi(x_0, y_0) \cdots \psi(x_{k-1}, y_{k-1})\; \psi(x, y_k)\; \psi(x', y_{k+1})\; dy_0 \cdots dy_k\, dy_{k+1}$$

$$= \pi_{i,j}\; \Gamma_i(x, x')\; \psi(x', y_{k+1})\; \alpha_i^k[x, y_0, \cdots, y_k]\; dx\, dx'\, dy_0 \cdots dy_k\, dy_{k+1}\ ,$$

pour tout $i \in E$. En sommant pour tout $i \in E$, et en intégrant par rapport à la variable $x \in \mathbf{R}^m$, on obtient

$$\alpha_j^{k+1}[x', y_0, \cdots, y_{k+1}] = \psi(x', y_{k+1}) \sum_{i\in E} \int_{\mathbf{R}^m} \pi_{i,j}\; \Gamma_i(x, x')\; \alpha_i^k[x, y_0, \cdots, y_k]\; dx\ .$$

En substituant les véritables observations $(Y_0, \cdots, Y_{k+1})$ à la place des variables (muettes) $(y_0, \cdots, y_{k+1})$, on obtient

$$p_j^{k+1}(x') = \psi(x', Y_{k+1}) \sum_{i \in E} \int_{\mathbf{R}^m} \pi_{i,j} \, \Gamma_i(x, x') \, p_i^k(x) \, dx \ ,$$

pour tout $j \in E$ et tout $x' \in \mathbf{R}^m$, avec la condition initiale

$$p_i^0(x) = \nu_i \, p(x) \ ,$$

pour tout $i \in E$ et tout $x \in \mathbf{R}^m$. On en déduit la distribution de probabilité conditionnelle jointe

$$\mathbf{P}[X_n \in dx, s_n = i \mid Y_0, \cdots, Y_n] = \frac{p_i^n(x) \, dx}{\displaystyle\sum_{j \in E} \int_{\mathbf{R}^m} p_j^n(x') \, dx'} \ ,$$

et les distributions de probabilité conditionnelles marginales

$$\mathbf{P}[X_n \in dx \mid Y_0, \cdots, Y_n] = \frac{\displaystyle\sum_{i \in E} p_i^n(x) \, dx}{\displaystyle\sum_{j \in E} \int_{\mathbf{R}^m} p_j^n(x') \, dx'} \ ,$$

et

$$\mathbf{P}[s_n = i \mid Y_0, \cdots, Y_n] = \frac{\displaystyle\int_{\mathbf{R}^m} p_i^n(x) \, dx}{\displaystyle\sum_{j \in E} \int_{\mathbf{R}^m} p_j^n(x') \, dx'} \ ,$$

pour tout $i \in E$ et tout $x \in \mathbf{R}^m$.

$\square$