Université de Rennes 1
DEA STIR
Signal — Télécommunications — Images — Radar
Option Signal

Examen du cours
"Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés"
Lundi 8 janvier 2001, 14:00 à 15:30

Problème :

L'objectif de ce problème est de calculer la densité conditionnelle de l'état caché sachant les observations, pour une certaine classe de systèmes dynamiques non–linéaires.

Préliminaire

On commence par établir un certain nombre de résultats préliminaires, dans le cadre statique suivant.

Soit (X, W, V, Z) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$, de densité jointe $p_{X,W,V,Z}$. Soit f et h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et dans $\mathbb{R}^d$ respectivement. On suppose que les vecteurs aléatoires W et V sont indépendants du vecteur aléatoire (X, Z).

(i) **Montrer que la densité conditionnelle jointe du vecteur aléatoire (X, W) sachant $Z = z$ vérifie**

$$p_{X,W|Z=z}(x, w) = p_W(w)\; p_{X|Z=z}(x) \; .$$

(ii) **En déduire que pour toute fonction–test ϕ définie sur $\mathbb{R}^m$**

$$\mathbb{E}[\,\phi(f(X) + W) \mid Z = z] = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x') \;\; \Big[\int_{\mathbb{R}^m} p_W(x' - f(x))\, p_{X|Z=z}(x)\, dx\;\Big]\;\, dx' \; .$$

(iii) **En déduire que la densité conditionnelle du vecteur aléatoire $X' = f(X) + W$ sachant $Z = z$ vérifie**

$$p_{X'|Z=z}(x') = \int_{\mathbb{R}^m} p_W(x' - f(x))\, p_{X|Z=z}(x)\, dx \ .$$

(iv) **Montrer que pour toute fonction–test ϕ définie sur $\mathbb{R}^d$**

$$\mathbb{E}[\, \phi(h(X) + V) \mid X = x, Z = z] = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(z')\, p_V(z' - h(x))\, dz' \ .$$

(v) **En déduire l'expression de la densité conditionnelle du vecteur aléatoire $Z' = h(X) + V$ sachant $X = x$ et $Z = z$. Cette densité conditionnelle dépend–elle de z ?**

(vi) **En déduire, en utilisant la formule de Bayes, que la densité conditionnelle du vecteur aléatoire X sachant $Z' = z'$ et $Z = z$ vérifie**

$$p_{X|Z'=z',Z=z}(x) = c\, p_V(z' - h(x))\, p_{X|Z=z}(x) \ ,$$

où la constante de normalisation c ne dépend que de z et z'.

Application au filtrage des systèmes non–linéaires

On considère le système dynamique non–linéaire suivant :

$$X_{k+1} \ = \ f_k(X_k) + W_k \ ,$$

$$Y_k \ = \ h_k(X_k) + V_k \ ,$$

où les suites $\{X_k\}$, $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et $\{Y_k\}$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^d$ respectivement, et où les fonctions f_k et h_k sont définies sur $\mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^d$ respectivement. On suppose que

- le vecteur aléatoire X_0 a pour densité p_0^X,
- la suite aléatoire $\{W_k\}$ est un bruit blanc, et pour tout $k \geq 0$, le vecteur aléatoire W_k a pour densité p_k^W,
- la suite aléatoire $\{V_k\}$ est un bruit blanc, et pour tout $k \geq 0$, le vecteur aléatoire V_k a pour densité p_k^V,
- la condition initiale X_0 et les bruits $\{W_k\}$ et $\{V_k\}$ sont mutuellement indépendants.

Les densités p_0^X, p_k^W et p_k^V ne sont pas nécessairement supposées gaussiennes.

L'estimation optimale (au sens du minimum de la variance de l'erreur d'estimation) des états cachés X_k et X_{k+1} au vu des observations $Y_0, \cdots, Y_k$ repose sur le calcul des densités conditionnelles $p_k = p_{X_k | Y_0, \cdots, Y_k}$ et $p_{k+1}^- = p_{X_{k+1} | Y_0, \cdots, Y_k}$, définies respectivement par

$$\mathbb{P}[\, X_k \in dx \mid Y_0, \cdots, Y_k] \;=\; p_k(x)\, dx$$

$$\mathbb{P}[\, X_{k+1} \in dx' \mid Y_0, \cdots, Y_k] \;=\; p_{k+1}^-(x')\, dx' \;.$$

L'objectif des questions suivantes est d'obtenir des équations pour le calcul récursif des densités conditionnelles $\{p_k\}$, en utilisant les résultats obtenus dans la partie préliminaire.

(vii) **Comment peut–on définir la densité p_0^- ?**

(viii) **Donner l'expression de la densité p_{k+1}^- en fonction de la densité p_k (étape de prédiction).** [Indication : utiliser le résultat obtenu en (iii), avec $X = X_k$, $W = W_k$ et $Z = (Y_0, \cdots, Y_k)$]

(ix) **Donner l'expression de la densité p_k en fonction de la densité p_k^- (étape de correction).** [Indication : utiliser le résultat obtenu en (vi), avec $X = X_k$, $V = V_k$ et $Z = (Y_0, \cdots, Y_{k-1})$]

(x) **Décrire l'analogie avec l'équation de Baum forward pour les modèles de Markov cachés.**

Cas particulier des systèmes linéaires gaussiens

On se propose de retrouver les équations du filtre de Kalman, dans le cas particulier d'un modèle linéaire gaussien. On suppose dorénavant que les fonctions f_k et h_k sont de la forme

$$f_k(x) = A_k\, x + a_k \qquad \text{et} \qquad h_k(x) = C_k\, x + c_k \;,$$

et on suppose que

- la densité p_0^X est gaussienne, de moyenne $\bar{X}_0$ et de matrice de covariance Q_0^X,
- pour tout $k \geq 0$, la densité p_k^W est gaussienne, de moyenne nulle et de matrice de covariance Q_k^W,
- pour tout $k \geq 0$, la densité p_k^V est gaussienne, de moyenne nulle et de matrice de covariance Q_k^V.

On suppose également que les matrices Q_0^X, Q_k^W et Q_k^V sont inversibles.

On montre le résultat souhaité par récurrence.

(xi) **En remplacant dans l'équation obtenue en (viii), la densité conditionnelle p_k par la densité gaussienne de moyenne $\widehat{X}_k$ et de matrice de covariance P_k, montrer que la densité conditionnelle p_{k+1}^- est une densité gaussienne de moyenne $\widehat{X}_{k+1}^-$ et de matrice de covariance P_{k+1}^- dont on donnera l'expression en fonction de $\widehat{X}_k$ et P_k.**

(xii) **En remplacant dans l'équation obtenue en (ix), la densité conditionnelle p_k^- par la densité gaussienne de moyenne $\widehat{X}_k^-$ et de matrice de covariance P_k^-, montrer que la densité conditionnelle p_k est une densité gaussienne de moyenne $\widehat{X}_k$ et de matrice de covariance P_k dont on donnera l'expression en fonction de $\widehat{X}_k^-$ et P_k^-.**