Université de Rennes 1
DEA STIR
Signal — Télécommunications — Images — Radar
Option Signal

Examen du cours
“Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés”
Mercredi 17 décembre 2003, 8:00 à 9:30

Problème :

L'objectif de ce problème est de montrer que pour une certaine classe de systèmes non–linéaires (qu'on peut qualifier de systèmes conditionnellement linéaires), le filtre optimal peut s'exprimer, en utilisant la structure particulière du problème, à l'aide d'un filtre optimal sur un espace de dimension réduite, paramétré en chaque point par une distribution de probabilité gaussienne dans l'espace supplémentaire en ce point.

On considère le système suivant, où l'état caché $X_k = (X_k^1, X_k^2)$ est partitionné en deux composantes, avec une équation d'état linéaire par rapport à la première composante, et une fonction d'observation ne dépendant que de la seconde composante

$$\begin{aligned} X_k^1 &= F_1(X_{k-1}^2)\, X_{k-1}^1 + f_1(X_{k-1}^2) + G_1\, W_k \ , \\ X_k^2 &= F_2(X_{k-1}^2)\, X_{k-1}^1 + f_2(X_{k-1}^2) + G_2\, W_k \ , \\ Y_k &= h(X_{k-1}^2, X_k^2) + V_k \ . \end{aligned}$$

On suppose que

- la suite $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de matrice de covariance Q_k^W,
- la matrice de covariance $G_2\, Q_k^W\, G_2^*$ est inversible,
- la loi conditionnelle de X_0^1 sachant X_0^2 est gaussienne, de moyenne $m_0^{1|2}(X_0^2)$ et de matrice de covariance $P_0^{1|2}(X_0^2)$,
- la suite $\{V_k\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $q_k^V(v)\, dv$,
- les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants.

(i) **Montrer que la loi conditionnelle**

- de X_k^1 sachant $(X_{0:k}^2, Y_{0:k})$ ne dépend que de $X_{0:k}^2$,
- de X_k^2 sachant $(X_{0:k-1}^2, Y_{0:k-1})$ ne dépend que de $X_{0:k-1}^2$,
- de Y_k sachant $(X_{0:k}^2, Y_{0:k-1})$ ne dépend que de (X_k^2, X_{k-1}^2).

(ii) **En utilisant la formule de Bayes et la première relation de la question (i), montrer que**

$$\mathbb{P}[X_k^1 \in dx_k^1, X_{0:k}^2 \in dx_{0:k}^2 \mid Y_{0:k} = y_{0:k}]$$

$$= \mathbb{P}[X_k^1 \in dx_k^1 \mid X_{0:k}^2 = x_{0:k}^2] \, \mathbb{P}[X_{0:k}^2 \in dx_{0:k}^2 \mid Y_{0:k} = y_{0:k}] \ .$$

(iii) **En utilisant la formule de Bayes et les deux dernières relations de la question (i), montrer que**

$$\mathbb{P}[X_{0:k}^2 \in dx_{0:k}^2, Y_{0:k} \in dy_{0:k}]$$

$$= \mathbb{P}[Y_k \in dy_k \mid X_k^2 = x_k^2, X_{k-1}^2 = x_{k-1}^2] \, \mathbb{P}[X_k^2 \in dx_k^2 \mid X_{0:k-1}^2 = x_{0:k-1}^2]$$

$$\mathbb{P}[X_{0:k-1}^2 \in dx_{0:k-1}^2 \mid Y_{0:k-1} = y_{0:k-1}] \, \mathbb{P}[Y_{0:k-1} \in dy_{0:k-1}] \ .$$

(iv) **Montrer que**

$$\mathbb{P}[Y_k \in dy_k \mid X_k^2 = x_k^2, X_{k-1}^2 = x_{k-1}^2] = q_k^V(y_k - h(x_k^2, x_{k-1}^2)) \, dy_k \ ,$$

et en déduire que

$$\mathbb{P}[X_{0:k}^2 \in dx_{0:k}^2 \mid Y_{0:k} = y_{0:k}]$$

$$= c_k \, q_k^V(y_k - h(x_k^2, x_{k-1}^2)) \, \mathbb{P}[X_k^2 \in dx_k^2 \mid X_{0:k-1}^2 = x_{0:k-1}^2]$$

$$\mathbb{P}[X_{0:k-1}^2 \in dx_{0:k-1}^2 \mid Y_{0:k-1} = y_{0:k-1}\,] \ .$$

L'étape suivante consiste à montrer par récurrence sur l'instant k, que la loi conditionnelle

- de X_k^1 sachant $X_{0:k}^2$ est gaussienne,
- de X_k^2 sachant $X_{0:k-1}^2$ est gaussienne.

(v) **Montrer que la loi conditionnelle du couple** (X^1_k, X^2_k) **sachant** $(X^1_{k-1}, X^2_{0:k-1})$ **est gaussienne, de moyenne**

$$\begin{pmatrix} F_1(X^2_{k-1})\, X^1_{k-1} + f_1(X^2_{k-1}) \\ \\ F_2(X^2_{k-1})\, X^1_{k-1} + f_2(X^2_{k-1}) \end{pmatrix} ,$$

et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} G_1\, Q^W_k\, G^*_1 & G_1\, Q^W_k\, G^*_2 \\ \\ G_2\, Q^W_k\, G^*_1 & G_2\, Q^W_k\, G^*_2 \end{pmatrix} .$$

On introduit l'hypothèse de récurrence suivante

Hypothèse H

La loi conditionnelle de X^1_k sachant $X^2_{0:k}$ est gaussienne, de moyenne $m^{1|2}_k(X^2_{0:k})$ et de matrice de covariance $P^{1|2}_k(X^2_{0:k})$.

(vi) **Montrer que l'Hypothèse H est vérifiée à l'instant** 0**.**

(vii) **En supposant l'Hypothèse H vérifiée à l'instant** $(k-1)$**, et en utilisant le résultat de la question (v), montrer que la loi conditionnelle du couple** (X^1_k, X^2_k) **sachant** $X^2_{0:k-1}$ **est gaussienne, de moyenne**

$$\begin{pmatrix} m^1_k(X^2_{0:k-1}) \\ \\ m^2_k(X^2_{0:k-1}) \end{pmatrix} ,$$

avec pour $i \in \{1,2\}$

$$m^i_k(X^2_{0:k-1}) = F_i(X^2_{k-1})\, m^{1|2}_{k-1}(X^2_{0:k-1}) + f_i(X^2_{k-1}) ,$$

et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} P^{1,1}_k(X^2_{0:k-1}) & P^{1,2}_k(X^2_{0:k-1}) \\ \\ P^{2,1}_k(X^2_{0:k-1}) & P^{2,2}_k(X^2_{0:k-1}) \end{pmatrix} ,$$

avec pour $i, j \in \{1,2\}$

$$P^{i,j}_k(X^2_{0:k-1}) = F_i(X^2_{k-1})\, P^{1|2}_{k-1}(X^2_{0:k-1})\, F^*_j(X^2_{k-1}) + G_i\, Q^W_k\, G^*_j .$$

(viii) **Que peut–on en déduire sur la loi conditionnelle de** X^2_k **sachant** $X^2_{0:k-1}$ **?**

(ix) **Montrer que la matrice $P_k^{2,2}(X_{0:k-1}^2)$ est inversible.**

(x) **En utilisant le résultat de la question (vii), montrer que la loi conditionnelle de X_k^1 sachant $X_{0:k}^2$ est gaussienne, de moyenne**

$$m_k^{1|2}(X_{0:k}^2) \;=\; m_k^1(X_{0:k-1}^2) + P_k^{1,2}(X_{0:k-1}^2)\,[\,P_k^{2,2}(X_{0:k-1}^2)\,]^{-1}\,[\,X_k^2 - m_k^2(X_{0:k-1}^2)\,]\;,$$

et de matrice de covariance

$$P_k^{1|2}(X_{0:k}^2) = P_k^{1,1}(X_{0:k-1}^2) - P_k^{1,2}(X_{0:k-1}^2)\,[\,P_k^{2,2}(X_{0:k-1}^2)\,]^{-1}\,P_k^{2,1}(X_{0:k-1}^2)\;,$$

c'est–à–dire que l'Hypothèse H est vérifiée à l'instant k.

Dans la suite, la notation $\Gamma(\cdot \mid m, \Sigma)$ désigne la distribution de probabilité gaussienne, de moyenne m et de matrice de covariance Σ, et la notation c_k désigne une constante de normalisation, dont l'expression exacte peut varier selon les cas.

(xi) **En rassemblant les résultats obtenus, montrer que la loi conditionnelle jointe de $(X_k^1, X_{0:k}^2)$ sachant $Y_{0:k}$ peut se décomposer la façon suivante**

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_k^1 \in dx_k^1, X_{0:k}^2 \in dx_{0:k}^2 \mid Y_{0:k}] \\
&\quad = \Gamma(dx_k^1 \mid m_k^{1|2}(x_{0:k}^2), P_k^{1|2}(x_{0:k}^2)) \\
&\qquad\quad c_k\; q_k^V(Y_k - h(x_k^2, x_{k-1}^2))\;\Gamma(dx_k^2 \mid m_k^2(x_{0:k-1}^2), P_k^{2,2}(x_{0:k-1}^2)) \\
&\qquad\qquad \mathbb{P}[X_{0:k-1}^2 \in dx_{0:k-1}^2 \mid Y_{0:k-1}]\;.
\end{aligned}$$

(xii) **En intégrant par rapport à dx_k^1, et en itérant le résultat obtenu, montrer que**

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_{0:k-1}^2 \in dx_{0:k-1}^2 \mid Y_{0:k-1}] \\
&\quad = c_k \prod_{p=1}^{k-1} q_p^V(Y_p - h(x_p^2, x_{p-1}^2)) \prod_{p=1}^{k-1} \Gamma(dx_p^2 \mid m_p^2(x_{0:p-1}^2), P_p^{2,2}(x_{0:p-1}^2)) \\
&\qquad\quad \mathbb{P}[X_0^2 \in dx_0^2]\;.
\end{aligned}$$

(xiii) **En déduire que**

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_k^1 \in dx_k^1, X_{0:k}^2 \in dx_{0:k}^2 \mid Y_{0:k}] \\
&\quad = \Gamma(dx_k^1 \mid m_k^{1|2}(x_{0:k}^2), P_k^{1|2}(x_{0:k}^2)) \\
&\qquad\qquad c_k \prod_{p=1}^{k} q_p^V(Y_p - h(x_p^2, x_{p-1}^2)) \prod_{p=1}^{k} \Gamma(dx_p^2 \mid m_p^2(x_{0:p-1}^2), P_p^{2,2}(x_{0:p-1}^2)) \\
&\qquad\qquad\quad \mathbb{P}[X_0^2 \in dx_0^2] \ .
\end{aligned}
$$