Université de Rennes 1
Master EEA (parcours SISEA)

Examen du cours
“Filtrage de Kalman et modèles de Markov cachés”
Jeudi 11 février 2021, 14:00 à 16:00

Exercice 1 :

L'objectif de cet exercice est d'établir les équations du filtre de Kalman dans un cas où le bruit d'état et le bruit d'observation sont corrélés. On considère le système linéaire

$$X_k = F\, X_{k-1} + W_k \ ,$$

$$Y_k = H\, X_k + V_k \ ,$$

sous les hypothèses :

- *l'état initial X_0 est vecteur aléatoire gaussien, de moyenne $\bar{X}_0$ et de matrice de covariance P_0,*
- *la suite $\{\begin{pmatrix} W_k \\ V_{k-1} \end{pmatrix}\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de matrice de covariance $\begin{pmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{pmatrix}$, où la matrice de covariance R est inversible,*
- *le vecteur X_0 et la suite $\{\begin{pmatrix} W_k \\ V_{k-1} \end{pmatrix}\}$ sont mutuellement indépendants.*

(i) **Montrer que la loi conditionnelle de X_k sachant $(Y_0, \cdots, Y_{k-1})$, et celle de X_k sachant $(Y_0, \cdots, Y_k)$, sont des lois gaussiennes.**

On propose de se ramener au cas où le bruit d'état et le bruit d'observation sont indépendants.

1ère étape : On cherche d'abord une décomposition de W_k de la forme

$$W_k = W'_k + J\, V_{k-1} \ ,$$

avec W'_k indépendant de V_{k-1}.

(ii) **Montrer que nécessairement le vecteur aléatoire** $\begin{pmatrix} W'_k \\ V_{k-1} \end{pmatrix}$ **est gaussien.**

(iii) **Déterminer la matrice J.**

[Indice : On exprimera par exemple que $\mathbb{E}[W'_k\, V^*_{k-1}] = 0$.]

(iv) **Calculer la matrice de covariance Q' du vecteur aléatoire W'_k.**

2ème étape : On se propose ensuite de réécrire l'équation d'état sous la forme

$$X_k = F'\, X_{k-1} + D\, Y_{k-1} + W'_k \ .$$

(v) **Donner l'expression des matrices F' et D.**

[Indice : On pourra utiliser la décomposition du vecteur aléatoire W_k, puis tirer V_{k-1} de l'équation d'observation, et reporter dans l'équation d'état.]

On est donc conduit à étudier le système linéaire

$$\begin{aligned} X_k \ &= \ F'\, X_{k-1} + D\, Y_{k-1} + W'_k \ , \\ \\ Y_k \ &= \ H\, X_k + V_k \ . \end{aligned}$$

(vi) **Montrer que les suites $\{W'_k\}$ et $\{V_k\}$ vérifient les hypothèses habituelles.**

On rappelle que la loi conditionnelle de X_k sachant $(Y_0, \cdots, Y_{k-1})$, et celle de X_k sachant $(Y_0, \cdots, Y_k)$, sont des lois gaussiennes, et on note $(\widehat{X}^-_k, P^-_k)$ et $(\widehat{X}_k, P_k)$ leurs moyennes et matrices de covariance respectives.

(vii) **Donner l'expression de $(\widehat{X}^-_k, P^-_k)$ en fonction de $(\widehat{X}_{k-1}, P_{k-1})$.**
Vérifier que ces expressions coïncident avec celles du cas habituel, dans le cas particulier où $S = 0$.

Les expressions de $(\widehat{X}_k, P_k)$ en fonction de $(\widehat{X}^-_k, P^-_k)$ sont exactement les mêmes que dans le cas habituel, c'est–à–dire que

$$\begin{aligned} \widehat{X}_k \ &= \ \widehat{X}^-_k + K_k\, (Y_k - H\, \widehat{X}^-_k) \ , \\ \\ P_k \ &= \ (I - K_k\, H)\ P^-_k \ , \end{aligned}$$

avec la matrice de gain de Kalman

$$K_k = P^-_k\, H^*\, (H\, P^-_k\, H^* + R)^{-1} \ .$$

Exercice 2 :

L'objectif de cet exercice est d'étudier un problème de détection bayésienne binaire dans un bruit blanc gaussien. Au final, cet exercice a aussi pour objectif d'obtenir des expressions simples pour la variable forward normalisée dans un modèle de Markov caché avec deux hypothèses seulement.

On observe une suite $\{Y_k\}$ à valeurs réelles, définie par

$$Y_k = \theta_k + V_k \ ,$$

où la suite $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de variance 1. La suite $\{\theta_k\}$ est une chaîne de Markov prenant deux valeurs réelles 0 ou m, indépendante de la suite $\{V_k\}$. Dans ce cas particulier avec deux hypothèses seulement, la loi initiale ν est définie par un unique paramètre $0 \leq p_0 \leq 1$

$$\mathbb{P}[\theta_0 = 0] = p_0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}[\theta_0 = m] = 1 - p_0 \ ,$$

et la matrice de transition π est définie par deux paramètres $0 \leq a, b \leq 1$

$$\mathbb{P}[\theta_k = 0 \mid \theta_{k-1} = 0] = a \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}[\theta_k = m \mid \theta_{k-1} = 0] = 1 - a \ ,$$

et

$$\mathbb{P}[\theta_k = 0 \mid \theta_{k-1} = m] = 1 - b \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}[\theta_k = m \mid \theta_{k-1} = m] = b \ .$$

qu'on supposera indépendants de l'instant k.

(i) **Donner l'expression vectorielle de la loi initiale ν en fonction du paramètre p_0, et donner l'expression matricielle de la matrice de transition π en fonction des paramètres a et b.**

[Très facile.]

(ii) **Donner l'expression des deux densités d'émission $g_0(y)$ et $g(y)$, indépendantes de l'instant k et définies par**

$$\mathbb{P}[Y_k \in dy \mid \theta_k = 0] = g_0(y)\, dy \qquad \textbf{et} \qquad \mathbb{P}[Y_k \in dy \mid \theta_k = m] = g(y)\, dy \ ,$$

respectivement.

On définit le rapport de vraisemblance $\Lambda_k = \dfrac{g_0(Y_k)}{g(Y_k)}$ et la matrice diagonale

$$G(Y_k) = \begin{pmatrix} g_0(Y_k) & 0 \\ 0 & g(Y_k) \end{pmatrix} \ .$$

Dans ce cas particulier avec deux hypothèses seulement, la variable forward normalisée $\bar{p}_k$ est définie par un unique paramètre $0 \leq \mu_k \leq 1$

$$\mathbb{P}[\theta_k = 0 \mid Y_{0:k}] = \mu_k \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}[\theta_k = m \mid Y_{0:k}] = 1 - \mu_k \ ,$$

et on pose

$$r_k = \frac{\mu_k}{1 - \mu_k} \qquad \text{de sorte que} \qquad \mu_k = \frac{r_k}{1 + r_k} \ .$$

(iii) **Donner l'expression vectorielle de la variable forward normalisée $\bar{p}_k$ en fonction du paramètre μ_k. Écrire l'équation de Baum forward pour la variable forward normalisée $\bar{p}_k$. En déduire que**

$$r_k = \frac{a\, r_{k-1} + (1 - b)}{(1 - a)\, r_{k-1} + b}\, \Lambda_k \ .$$

[Indice : Établir d'abord les expressions de μ_k et de $(1-\mu_k)$ en fonction de μ_{k-1}, $(1-\mu_{k-1})$ et Λ_k, puis faire le rapport membre–à–membre des identités obtenues.]

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère le cas particulier où $a = b = 1$.

(iv) **Décrire la chaîne de Markov $\{\theta_k\}$ dans ce cas particulier.**

[Très facile.]

(v) **En particularisant le résultat obtenu à la question (iii), exprimer r_k en fonction de r_{k-1} et de Λ_k, et en itérant, exprimer r_k en fonction de p_0 et du produit $\Lambda_{0:k} = \Lambda_0\, \Lambda_1 \cdots \Lambda_k$.**

En déduire l'expression de μ_k en fonction de p_0 et $\Lambda_{0:k}$.

(vi) **Montrer comment obtenir directement ce résultat.**

On définit l'estimateur du maximum a posteriori (MAP) de la façon suivante :

$$\theta_k^{\mathrm{MAP}} = 0 \qquad \text{si et seulement si} \qquad \mu_k \geq \tfrac{1}{2} \ .$$

(vii) **Montrer que**

$$\theta_k^{\mathrm{MAP}} = 0 \qquad \textbf{si et seulement si} \qquad \Lambda_{0:k} \geq \frac{1 - p_0}{p_0} \ .$$