Université de Rennes 1
DEA STIR
Signal — Télécommunications — Images — Radar
Option Signal

Examen du cours
“Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés”
Jeudi 7 janvier 1999, 15:30 à 17:00

L’objectif de ce problème est d’étudier les systèmes linéaires à paramètre markovien, qui sont souvent utilisés pour modéliser des systèmes linéaires avec coefficients inconnus, ou avec coefficients susceptibles de changer brusquement.

Partie A On considère le modèle d’état suivant :

- L’état $\{X_k\, , \, k \geq 0\}$ est défini par le système linéaire suivant, à valeurs dans $\mathbf{R}^m$

  $$X_{k+1} = F(s_k)\, X_k + W_k \ ,$$

  où la suite $\{W_k\, , \, k \geq 0\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de matrice de covariance Q inversible, et où la suite $\{s_k\, , \, k \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à espace d’état fini $E = \{1, \cdots, N\}$, de loi initiale

  $$\mathbf{P}[s_0 = i] = \nu_i \ ,$$

  et de matrice de transition

  $$\mathbf{P}[s_{k+1} = j \mid s_k = i] = \pi_{i,j} \ .$$

  La condition initiale X_0 est une variable aléatoire gaussienne, de moyenne μ_0 et de matrice de covariance Σ_0 inversible.

On suppose que la chaîne de Markov $\{s_k\, , \, k \geq 0\}$, la condition initiale X_0, et le bruit blanc gaussien $\{W_k\, , \, k \geq 0\}$ sont mutuellement indépendants.

On considère d’abord le cas où l’état $\{X_k\, , \, k \geq 0\}$ est directement observé, et on se propose de calculer la distribution de probabilité conditionnelle de s_n sachant $(X_0, \cdots, X_n)$.

(i) **Donner l'expression de la densité conditionnelle de X_{k+1} sachant (X_k, s_k), définie par**

$$\mathbf{P}[X_{k+1} \in dx' \mid X_k = x, s_k = i] = \Gamma_i(x, x')\, dx' \ ,$$

pour tout $i \in E$.

(ii) **La propriété de canal sans mémoire est–elle vérifiée ? Donner l'expression de la distribution de probabilité conditionnelle**

$$\mathbf{P}[X_n \in dx_n, \cdots, X_0 \in dx_0 \mid s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0] \ .$$

(iii) **En déduire la distribution de probabilité jointe**

$$\mathbf{P}[X_n \in dx_n, \cdots, X_0 \in dx_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0] \ .$$

(iv) **Établir l'équation de Baum forward permettant de calculer la distribution de probabilité conditionnelle de s_n sachant $(X_0, \cdots, X_n)$.**

Partie B On considère à présent le cas où l'état $\{X_k \, , \, k \geq 0\}$ n'est pas directement observé, c'est–à–dire qu'on considère le modèle suivant :

- L'état $\{X_k \, , \, k \geq 0\}$ est défini par le système linéaire suivant, à valeurs dans $\mathbf{R}^m$
$$X_{k+1} = F(s_k) \, X_k + W_k \ ,$$
où la suite $\{W_k \, , \, k \geq 0\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de matrice de covariance Q inversible, et où la suite $\{s_k \, , \, k \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à espace d'état fini $E = \{1, \cdots, N\}$, de loi initiale
$$\mathbf{P}[s_0 = i] = \nu_i \ ,$$
et de matrice de transition
$$\mathbf{P}[s_{k+1} = j \mid s_k = i] = \pi_{i,j} \ .$$
La condition initiale X_0 est une variable aléatoire gaussienne, de moyenne μ_0 et de matrice de covariance Σ_0 inversible.

- La suite des observations $\{Y_k \, , \, k \geq 0\}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, est définie par
$$Y_k = H \, X_k + V_k \ ,$$
où la suite $\{V_k \, , \, k \geq 0\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de matrice de covariance R inversible.

On suppose que la chaîne de Markov $\{s_k \, , \, k \geq 0\}$, la condition initiale X_0, et les bruits blancs gaussiens $\{W_k \, , \, k \geq 0\}$ et $\{V_k \, , \, k \geq 0\}$ sont mutuellement indépendants.

Dans cette partie, seule la suite $\{Y_k \, , \, k \geq 0\}$ est observée, et on se propose de calculer la distribution de probabilité conditionnelle jointe de (X_n, s_n) sachant $(Y_0, \cdots, Y_n)$.

(v) **Donner l'expression de la densité conditionnelle de Y_k sachant (X_k, s_k), définie par**
$$\mathbf{P}[Y_k \in dy \mid X_k = x, s_k = i] = \psi(x,y) \, dy \ ,$$
et vérifier que cette densité ne dépend pas de $i \in E$.

(vi) **Montrer que la propriété de canal sans mémoire est vérifiée, et en déduire l'expression de la distribution de probabilité conditionnelle**
$$\mathbf{P}[Y_n \in dy_n, \cdots, Y_0 \in dy_0 \mid X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0] \ .$$

(vii) **En déduire la distribution de probabilité jointe**
$$\mathbf{P}[Y_n \in dy_n, \cdots, Y_0 \in dy_0, X_n \in dx_n, \cdots, X_0 \in dx_0, s_n = i_n, \cdots, s_0 = i_0] \ .$$

(viii) **Établir l'équation de Baum forward permettant de calculer la distribution de probabilité conditionnelle jointe de (X_n, s_n) sachant $(Y_0, \cdots, Y_n)$, puis la distribution de probabilité conditionnelle marginale de s_n sachant $(Y_0, \cdots, Y_n)$.**