

Université de Rennes 1
DEA STIR
Signal — Télécommunications — Images — Radar
Option Signal

Examen du cours
“Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés”
Mercredi 15 décembre 1999, 8:00 à 9:30

PROBLÈME :

L’objectif de ce problème est de proposer un algorithme efficace pour calculer l’espérance conditionnelle d’une fonctionnelle exponentielle intégrale dans le modèle de Markov caché suivant :

- La suite $\{X_k, k \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à espace d’état fini $E = \{1, \dots, N\}$, de loi initiale

$$\mathbf{P}[X_0 = i] = \nu_i, \quad \text{pour tout } i \in E,$$

et de matrice de transition

$$\mathbf{P}[X_{k+1} = j \mid X_k = i] = \pi_{i,j}, \quad \text{pour tout } i, j \in E.$$

- Les observations $\{Y_k, k \geq 0\}$ sont à valeurs dans un espace fini $O = \{1, \dots, M\}$, et on suppose que la propriété de canal sans mémoire est vérifiée, avec

$$\mathbf{P}[Y_k = \ell \mid X_k = i] = b_i^\ell, \quad \text{pour tout } i \in E, \text{ et tout } \ell \in O.$$

Il s’agit de calculer la quantité suivante :

$$\mathbf{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \mid Y_0, \dots, Y_n],$$

où la fonction c , définie sur l’ensemble fini E et à valeurs réelles, est caractérisée de manière équivalente par la donnée d’un vecteur $c = (c_i)$, c’est-à-dire que

$$c(X_k) = c_i, \quad \text{si } X_k = i.$$

Pour tout $i \in E$ et tout $\ell_0, \dots, \ell_n \in O$, on définit

$$\gamma_n^i[\ell_0, \dots, \ell_n] = \mathbf{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \mathbf{1}_{[X_n = i]} \mathbf{1}_{[Y_0 = \ell_0, \dots, Y_n = \ell_n]}],$$

et comme dans le cours

$$\alpha_n^i[\ell_0, \dots, \ell_n] = \mathbf{P}[X_n = i, Y_0 = \ell_0, \dots, Y_n = \ell_n].$$

On rappelle que la fonction indicatrice $\mathbf{1}$ est définie par

$$\mathbf{1}_{[u \in A]} = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in A, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et que pour toute v.a. Z

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_{[Z \in A]}] = \mathbf{P}[Z \in A].$$

(i) **En procédant comme pour l'équation de Baum forward, montrer que**

$$\gamma_n^i[\ell_0, \dots, \ell_n] = \sum_{i_0, \dots, i_{n-1} \in E} \exp\{\sum_{k=0}^{n-1} c_{i_k} + c_i\} \nu_{i_0} \pi_{i_0, i_1} \cdots \pi_{i_{n-1}, i} b_{i_0}^{\ell_0} \cdots b_{i_{n-1}}^{\ell_{n-1}} b_i^{\ell_n}.$$

(ii) **De la même manière, montrer que**

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[\exp\{\sum_{k=0}^{n+1} c(X_k)\} \mathbf{1}_{[X_n = i, X_{n+1} = j]} \mathbf{1}_{[Y_0 = \ell_0, \dots, Y_n = \ell_n, Y_{n+1} = \ell_{n+1}]}] \\ &= \exp\{c_j\} b_j^{\ell_{n+1}} \pi_{i,j} \gamma_n^i[\ell_0, \dots, \ell_n]. \end{aligned}$$

(iii) **En sommant sur $i \in E$, montrer que**

$$\gamma_{n+1}^j[\ell_0, \dots, \ell_{n+1}] = \exp\{c_j\} b_j^{\ell_{n+1}} \sum_{i \in E} \pi_{i,j} \gamma_n^i[\ell_0, \dots, \ell_n].$$

On définit $w_n = (w_n^i)$ et $p_n = (p_n^i)$ avec

$$w_n^i = \gamma_n^i[Y_0, \dots, Y_n], \quad \text{pour tout } i \in E,$$

et comme dans le cours

$$p_n^i = \alpha_n^i[Y_0, \dots, Y_n], \quad \text{pour tout } i \in E.$$

- (iv) **Déduire du résultat obtenu à la question (iii) que la suite $\{w_n\}$ vérifie l'équation récurrente suivante**

$$w_{n+1}^j = \exp\{c_j\} b_j(Y_{n+1}) \sum_{i \in E} \pi_{i,j} w_n^i.$$

- (v) **Rappeler l'équation récurrente vérifiée par la suite $\{p_n\}$.**
 (vi) **Retrouver cette équation directement à partir du résultat obtenu à la question (iv).**
 (vii) **Directement à partir de la définition, montrer que**

$$\gamma_n^i[\ell_0, \dots, \ell_n] = \mathbf{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \mathbf{1}_{[X_n = i]} \mid Y_0 = \ell_0, \dots, Y_n = \ell_n] \sum_{j \in E} \alpha_n^j[\ell_0, \dots, \ell_n].$$

- (viii) **En déduire que**

$$w_n^i = \mathbf{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \mathbf{1}_{[X_n = i]} \mid Y_0, \dots, Y_n] \sum_{j \in E} p_n^j.$$

- (ix) **En sommant sur $i \in E$, proposer un algorithme efficace pour le calcul de**

$$\mathbf{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \mid Y_0, \dots, Y_n].$$