ALGO2 – TD 10 : Chaînes de Markov

Nous allons ici explorer quelques caractéristiques de l'algorithme de Propp et Wilson vu en cours.

1. Choix de la fonction de mise à jour

Dans cet exercice, on montre que le choix du successeur $\texttt{Simul}(s, r)$ d'un état s en fonction de la valeur aléatoire r est crucial pour la terminaison de l'algorithme de Propp et Wilson. Soit $\mathcal{M}$ la chaîne de Markov à deux états, dans laquelle toutes les probabilités sont $\frac{1}{2}$.

1.1. Définissons la fonction de mise à jour suivante : $\texttt{Simul}(s_1, r) = s_1$ ssi $r < \frac{1}{2}$, et $\texttt{Simul}(s_2, r) = s_2$ ssi $r < \frac{1}{2}$. Montrer que dans ce cas, l'algorithme de Propp et Wilson ne termine jamais.

1.2. Modifier la fonction de mise à jour pour garantir la terminaison avec probabilité 1.

2. Chaînes monotones

On considère une marche aléatoire sur $\{s_1, \cdots, s_k\}$ avec $k > 2$ définie par : $\mathsf{P}(s_1, s_1) = \mathsf{P}(s_1, s_2) = \frac{1}{2}$; $\mathsf{P}(s_k, s_k) = \mathsf{P}(s_k, s_{k-1}) = \frac{1}{2}$; et pour $1 < i < k$, $\mathsf{P}(s_i, s_{i-1}) = \mathsf{P}(s_i, s_{i+1}) = \frac{1}{2}$. Définissons la fonction de mise à jour par $\texttt{Simul}(s_1, r) = s_1$ ssi $r < \frac{1}{2}$, et pour tout $i > 1$, $\texttt{Simul}(s_i, r) = s_{i-1}$ ssi $r < \frac{1}{2}$.

2.1. Donner la représentation graphique de cette chaîne de Markov.

2.2. Montrer que pour l'ordre naturel sur les états $s_1 \leq s_2 \cdots \leq s_k$, pour tout $i \leq j \in [\![1, k]\!]$, $\texttt{Simul}(s_i, r) \leq \texttt{Simul}(s_j, r)$.

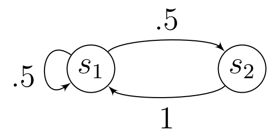
2.3. En déduire une optimisation de l'algorithme de Propp et Wilson qui réduit, sur cet exemple, le nombre de simulations effectuées en parallèle.

2.4. Représenter schématiquement une exécution de l'algorithme de Propp et Wilson sur cet exemple, et de votre version optimisée.

3. Couplage vers le futur

Pour justifier le fait que l'algorithme de Propp et Wilson nécessite de coupler « depuis le passé », on considère dans cet exercice une adaptation où l'on cherche à coupler « vers le futur ».

On considère la chaîne de Markov dont la représentation graphique est la suivante :



3.1. Donner la matrice P associée.

3.2. Montrer que cette chaîne de Markov est apériodique. Identifier une distribution réversible, qui est donc également stationnaire.

3.3. Supposons que l'on fasse deux simulations en parallèle, depuis chacun des états de la chaîne, à partir de l'instant 0. En considérant le premier instant $N > 0$ auquel les deux simulations ont convergé vers un même état, montrer que la distribution retournée par cet algorithme de couplage vers le futur ne coïncide pas avec la distribution stationnaire.

4. Valeurs aléatoires fraîchement tirées

L'objectif de cet exercice est de montrer l'importance de réutiliser la même suite de valeurs aléatoires lorsque l'on recommence des simulations depuis un instant plus loin dans le passé.

4.1. Écrire l'algorithme de Propp et Wilson adapté qui échantillonne de nouvelles valeurs aléatoires à chaque simulation.

Définissons Y comme la variable aléatoire calculée par cet algorithme, et M la variable aléatoire de la plus grande valeur de m telle que l'algorithme simule la chaîne depuis l'instant $-m$.

4.2. Donner une minoration de $\mathbb{P}(Y = s_1)$ en fonction de $\mathbb{P}(M = 1 \wedge Y = s_1)$ et $\mathbb{P}(M = 2 \wedge Y = s_1)$.

On considère à nouveau la chaîne de Markov de l'exercice 3.

4.3. En évaluant l'expression obtenue dans la question précédente, en déduire une borne inférieure sur $\mathbb{P}(Y = s_1)$ sur cet exemple. Conclure que Y ne coïncide pas avec la distribution stationnaire.