TD2 : NP-Complétude

1. 3-SAT

Le problème 3-SAT est défini comme suit. On souhaite montrer que 3-SAT est NP-complet.

3-SAT

Instance	–	Une formule φ du calcul propositionnel en forme normale conjonctive dont chaque clause possède au plus 3 littéraux.
Question	–	La formule φ est-elle satisfiable, *i.e.*, peut-on trouver une valuation ν des variables de φ qui la rende vraie ?

1.1. Montrer que 3-SAT est dans NP.

On souhaite maintenant trouver une transformation polynomiale de SAT vers 3-SAT.

1.2. Soit C une clause contenant deux littéraux. En introduisant un nouveau littéral, transformer C en une conjonction de clauses contenant 3 littéraux.

1.3. Pour une disjonction de k littéraux, C=$x_1 \vee \cdots \vee x_k$, on crée $k-3$ nouvelles variables pour dériver $k-2$ clauses :
$C' = (x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x_4 \vee y_3) \wedge \cdots \wedge (\neg y_{k-3} \vee x_{k-1} \vee x_k)$.
Que dire de C par rapport à C' ?

1.4. Conclure sur la complexité du problème.

2. MAX2SAT

Dans cet exercice, on souhaite prouver que le problème MAX2SAT est NP-complet. Ce problème est défini ainsi :

MAX2SAT

Instance	–	Une formule φ du calcul propositionnel en forme normale conjonctive dont chaque clause possède au plus 2 littéraux, et un entier k.
Question	–	La formule φ est-elle k-satisfiable, *i.e.*, peut-on trouver une valuation ν des variables de φ qui rende k clauses de φ vraies ?

2.1. Soit φ une formule 3-CNF. On suppose sans perte de généralité (quitte à dupliquer des littéraux) que chaque clause contient exactement 3 littéraux.

$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^{p} (a_i \vee b_i \vee c_i)$$

On choisit un ensemble de p nouvelles variables $(d_i)_{1 \leq i \leq p}$ et on pose

$$\begin{aligned}\varphi' = \textstyle\bigwedge_{i=1}^{p}(a_i \wedge b_i \wedge c_i \wedge d_i \\ &\wedge(\neg a_i \vee \neg b_i) \wedge (\neg a_i \vee \neg c_i) \wedge (\neg c_i \vee \neg b_i) \\ &\wedge(a_i \vee \neg d_i) \wedge (b_i \vee \neg d_i) \wedge (c_i \vee \neg d_i))\end{aligned}$$

Étudier la satisfaction des clauses de φ' en fonction de celle des clauses de φ.

2.2. Proposer une valeur de k telle que φ est satisfiable si et seulement si k clauses de φ' sont simultanément satisfiables.

2.3. Conclure la preuve de NP-complétude.

3. Couverture par sommets

On définit le problème de la couverture par sommets d'un graphe (*Vertex Cover*) :

> **VC**
> INSTANCE – Un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier naturel k
> QUESTION – Le graphe G admet-il une couverture par k sommets, *i.e.* existe-t-il $V' \subseteq V$, avec $|V'| \leq k$ tel que $\forall \{u, v\} \in E, u \in V' \vee v \in V'$?

3.1. Montrez que **VC** est dans NP.

On souhaite montrer que **VC** est NP-dur en exhibant une réduction polynomiale depuis 3-SAT.
Soit φ une formule CNF dont chaque clause contient 3 littéraux : $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{p}(\ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \ell_{i,3})$, portant sur les variables $x_1 \dots x_m$. On construit un graphe ayant $3p + 2m$ sommets. Ces sommets sont : pour chaque variable x_h, un sommet étiqueté x_h et un sommet étiqueté $\neg x_h$, et pour chaque littéral $\ell_{i,j}$, un sommet étiqueté $\ell_{i,j}$. On ajoute une arête entre les sommets représentant une variable et sa négation, entre les sommets représentant un littéral et la variable (ou négation de variable) correspondante, et enfin entre les littéraux d'une même clause.
Formellement, $G = (V, E)$ est défini ainsi :

- $V = \{x_h \mid h \in [1, m]\} \cup \{\neg x_h \mid h \in [1, m]\} \cup \{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i \leq p,\ j \in [1, 3]\}$, et
- $E = \{(x_h, \neg x_h) \mid h \in [1, m]\}$
  $\cup \{(x_h, \ell_{i,j}) \mid h \in [1, m], 1 \leq i \leq p,\ j \in [1, 3], \ell_{i,j} = x_h\}$
  $\cup \{(\neg x_h, \ell_{i,j}) \mid h \in [1, m], 1 \leq i \leq p,\ j \in [1, 3], \ell_{i,j} = \neg x_h\}$
  $\cup \{(\ell_{i,j}, \ell_{i,j'}) \mid 1 \leq i \leq p,\ j, j' \in [1, 3], j \neq j'\}$

3.2. Construire G pour $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4)$, et exhiber une couverture minimale de G.

3.3. Trouver k en fonction de p et m tel qu'il existe une couverture du graphe de taille k si et seulement si la formule est satisfiable. Conclure quant à la complexité du problème de couverture par sommets.