Licence Informatique ISTIC
Module ALG

Méthodes algorithmiques
Réductions polynomiales

Exercice 1
On considère les problèmes de décision suivants.

Problème Cycle Hamiltonien (CH)

Entrée :	Un graphe $G = (V, E)$.
Sortie :	"Oui" s'il existe un cycle passant une unique fois par chaque sommet, "Non" sinon.

Problème Voyageur de commerce (TSP)

Entrée :	Un graphe pondéré $G = (V, E)$ et un entier k.
Sortie :	"Oui" s'il existe un cycle de poids inférieur ou égal à k passant une unique fois par chaque sommet, "Non" sinon.

On souhaite exhiber une réduction polynomiale de CH à TSP. Pour cela, on définit une transformation $\mathtt{r}(.)$ des instances de CH en des instances de TSP, calculable en temps polynomial et telle que

$$G \in \text{CH si et seulement si } \mathtt{r}(G) \in \text{TSP}. \tag{1}$$

1. Comment définir $\mathtt{r}(G) = (G', k')$? Quel poids mettre à chaque arête de G' et comment choisir k' ?
2. Établir que $\mathtt{r}(.)$ est bien une réduction polynomiale qui satisfait l'Équation (**??**).
3. Avec cette réduction, a-t-on montré que TSP est plus simple ou plus compliqué de CH ?

Exercice 2
Les problèmes 3-SAT et SAT sont définis comme suit.

Problème 3-SAT

Entrée :	Une formule φ du calcul propositionnel en forme normale conjonctive dont chaque clause possède au plus 3 littéraux.
Sortie :	"Oui" si la formule φ est satisfiable, *i.e.,* il existe une valuation ν telle que $\nu(\varphi) =$ vrai, "Non" sinon.

Problème SAT

Entrée :	Une formule φ du calcul propositionnel en forme normale conjonctive.
Sortie :	"Oui" si la formule φ est satisfiable, *i.e.,* il existe une valuation ν telle que $\nu(\varphi) =$ vrai, "Non" sinon.

1. Définir une réduction polynomiale de 3-SAT vers SAT.
2. On souhaite maintenant trouver une réduction polynomiale de SAT vers 3-SAT.

   On montre comment se ramener à des clauses à 3 littéraux.

   - Si C est une clause contenant 2 littéraux, en introduisant une nouvelle variable propositionnelle y, on transforme C en une conjonction de clauses φ_C à 3 littéraux. Montrer que C et φ_C sont *équisatisfaisables*, en établissant qu'une valuation ν satisfait C si et seulement si ν_C satisfait φ_C, où ν_C est comme ν mais affecte y à une valeur quelconque, disons “vrai”.
   - Si C est une clause à 1 littéral, on considère une formule φ_C basée sur deux nouvelles variables y et z, et comme précédemment, montrer que C et φ_C sont équisatisfaisables.
   - Si $C = l_1 \vee \cdots \vee l_k$ est une clause à k littéraux (avec $k \geq 4$), on crée $k-3$ nouvelles variables pour dériver $k-2$ clauses comme suit :
     $\varphi_C = (l_1 \vee l_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee l_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee l_4 \vee y_3) \wedge \cdots \wedge (\neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$.
     Sans détailler, expliquer pourquoi une valuation ν satisfait φ_C si et seulement si il existe une valuation ν_C étendant ν à $\{y_1, \ldots, y_{k-3}\}$ satisfaisant φ_C.
3. Définir la réduction polynomiale de SAT vers 3-SAT.

Exercice 3
On définit le problème de la couverture par sommets d'un graphe comme suit.

Problème COUVERTURE PAR SOMMETS (VC)

Entrée :	Un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier naturel k.
Sortie :	“Oui” si le graphe G admet une couverture par k sommets, *i.e.* il existe $V' \subseteq V$, avec $\lvert V' \rvert \leq k$ tel que pour tout $u, v \in E, u \in V'$ ou $v \in V'$, “Non” sinon.

1. On souhaite exhiber une réduction polynomiale de 3-SAT vers VC.

   Soit $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{p} (\ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \ell_{i,3})$ une formule en FNC dont chaque clause contient 3 littéraux, et portant sur les variables $x_0 \ldots x_{m-1}$. On construit une instance $\mathtt{r}(\varphi) = (G, k)$ où G a $3p + 2m$ sommets. Ses sommets sont : pour chaque variable x_h, un sommet étiqueté x_h et un sommet étiqueté $\neg x_h$, et pour chaque littéral $\ell_{i,j}$, un sommet étiqueté $\ell_{i,j}$. On ajoute une arête entre les sommets représentant une variable et sa négation, entre les sommets représentant un littéral et la variable (ou négation de variable) correspondante, et enfin entre les littéraux d'une même clause.

   Formellement, $G = (V, E)$ est défini ainsi :

   - $V = \{x_h \mid h \in [0, m-1]\} \cup \{\neg x_h \mid h \in [0, m-1]\} \cup \{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i \leq p,\ j \in [1, 3]\}$, et
   - $E = \{(x_h, \neg x_h) \mid h \in [0, m-1]\}$
     $\cup \{(x_h, \ell_{i,j}) \mid h \in [0, m-1], 1 \leq i \leq p,\ j \in [1, 3], \ell_{i,j} = x_h\}$
     $\cup \{(\neg x_h, \ell_{i,j}) \mid h \in [0, m-1], 1 \leq i \leq p,\ j \in [1, 3], \ell_{i,j} = \neg x_h\}$
     $\cup \{(\ell_{i,j}, \ell_{i,j'}) \mid 1 \leq i \leq p,\ j, j' \in [1, 3], j \neq j'\}$

2. Construire le graphe G pour $\varphi = (x_0 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_0 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$, et exhiber une couverture minimale de G.

3. Montrer que $\varphi \in$ 3-SAT si et seulement si $\mathtt{r}(\varphi) = (G, 2p + m) \in$ VC.

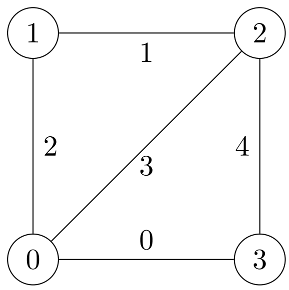
Exercice 4
On définit le problème de la somme de sous-ensembles comme suit.

Problème SOMME DE SOUS-ENSEMBLES (SUBETSUM)

Entrée :	Un ensemble fini d'entiers $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et un entier naturel t.
Sortie :	"Oui" s'il existe un sous-ensemble $A' \subseteq A$ tel que $\sum_{a \in A'} a = t$, "Non" sinon.

On souhaite montrer construire une réduction polynomiale de VC vers SUBSETSUM.
On considère la transformation suivante : étant donnée une instance (G, k) de VC, on construit $\mathtt{r}(G, k) = A$ une instance de SUBSETSUM. On suppose que les sommets G sont numérotés entre 0 et $n - 1$ et que ses arêtes sont numérotées entre 0 et $m - 1$.
On associe un entier e_{ij} pour chaque couple arête-sommet qui vaut 1 si le sommet j est une extrêmité de l'arête i, et 0 sinon.
On définit A de la façon suivante : pour une base b, $a_j = b^m + \sum_{i=0}^{m-1} e_{ij} b^i$ et $A = \{a_j, j \leq n\} \cup \{b^i, i < m\}$ et $t = k * b^m + \sum_{i=0}^{m-1} 2 * b^i$.

1. Construire l'instance de SUBSETSUM correspondant au graphe suivant avec $k = 2$:



2. Dans t, à quoi sert le $k * b^m$?

3. Combien de fois apparaissent les nombres $b^0, \dots, b^{m-1}$ dans A? En déduire une bonne valeur de b (*i.e.* qui permette de ne pas avoir à faire de retenue en base b pour les b^i, $i < m$).

4. On prend $b = 4$. Montrer que G admet une k couverture par sommet si et seulement si A admet une sous-ensemble de somme t.