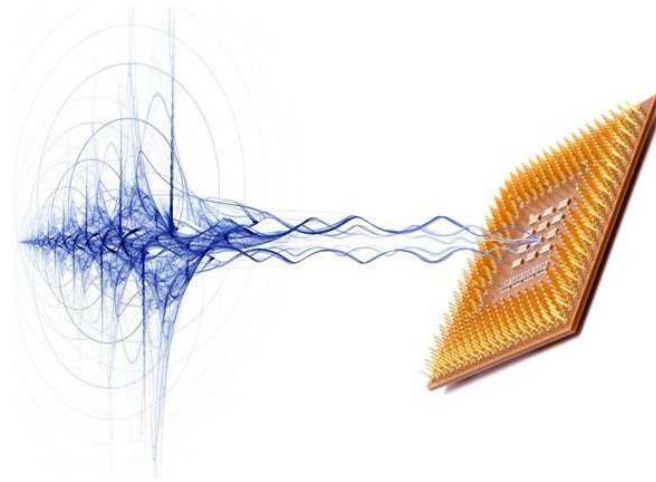


Électronique et Informatique Industrielle 2nde année - EII2
30 septembre 2014

Traitement Numérique du Signal

Fascicule de travaux dirigés



Olivier Sentieys

ENSSAT - Université de Rennes 1

sentieys@enssat.fr

<http://www.irisa.fr/cairn>

<http://perso.univ-rennes1.fr/olivier.sentieys>

6 Rue de Kerampont - BP 447

22305 LANNION - France



Table des matières

1	Travaux Dirigés en Traitement Numérique du Signal	1
1.1	Echantillonnage	1
1.1.1	Chaîne de TNS	1
1.1.2	Échantillonnage d'un signal	1
1.2	Analyse et implantation des filtres numériques	2
1.2.1	Filtrage numérique RIF	2
1.2.2	Filtrage numérique RIF (1)	4
1.2.3	Filtrage numérique RIF (2)	4
1.2.4	Filtrage numérique RIF cascade	4
1.2.5	Filtrage numérique RII	5
1.3	Synthèse des filtres RII	7
1.3.1	Filtre passe bas du deuxième ordre	7
1.3.2	Filtre passe haut	7
1.4	Synthèse des filtres RIF	8
1.4.1	Méthode du fenêtrage	8
1.4.2	Méthode de l'échantillonnage fréquentiel	9
1.5	Transformée de Fourier Discrète et Rapide (TFD et TFR)	9
1.5.1	TFD bidimensionnelle	9
1.5.2	Transformée de Fourier Glissante	10
1.5.3	Transformée de Fourier en Base 4	10
1.5.4	Optimisation du calcul de la TFR d'une suite de nombres réels	10
1.5.5	Optimisation du calcul de la TFR de deux suites de nombres réels	11
1.5.6	Comparaison entre TFSD et TFD	11
1.5.7	TFD par convolution	11
1.5.8	Bruits dans la TFD	12
1.5.9	Étude des bruits de calcul dans la transformée de Fourier Rapide	12
1.5.10	Calculs de TFD	13
1.6	Analyse spectrale	13
1.6.1	Questions	13
1.6.2	Analyse spectrale d'un signal sinusoïdal	14
1.6.3	Analyse spectrale d'un signal	14
1.7	Convolution	14
1.7.1	Calcul d'une convolution	14
1.7.2	Complexité de calcul d'une convolution	14
1.8	Interpolation et décimation	14
1.8.1	Interpolation linéaire	14
1.8.2	Suréchantillonnage	15

2	Corrections des Travaux Dirigés en TNS	17
2.1	Corrigés des TD sur l'échantillonnage	17
2.1.1	Chaîne de TNS	17
2.1.2	Échantillonnage d'un signal	17
2.2	Analyse des filtres numériques	18
2.2.1	Filtrage numérique RIF	18
2.2.2	Filtrage numérique RIF (1)	18
2.2.3	Filtrage numérique RIF (2)	18
2.2.4	Filtrage Numérique RIF cascade	19
2.2.5	Cellule élémentaire du premier ordre RII	19
2.2.6	Cellule du second ordre RII purement récursive	19
2.2.7	Étude des bruits de calcul dans les filtres numériques RII	20
2.3	Synthèse des filtres RII	20
2.3.1	Filtre passe bas du deuxième ordre	20
2.3.2	Filtre passe haut	20
2.4	Synthèse des filtres RIF	20
2.4.1	Méthode du fenêtrage	20
2.4.2	Méthode de l'échantillonnage fréquentiel	21
2.5	Transformée de Fourier Discrète et Rapide (TFD et TFR)	23
2.5.1	TFD bi-dimensionnelle	23
2.5.2	Transformée de Fourier Glissante	23
2.5.3	Transformée de Fourier en Base 4	23
2.5.4	Optimisation du calcul de la TFR d'une suite de nombres réels	23
2.5.5	Optimisation du calcul de la TFR de deux suites de nombres réels	23
2.5.6	Comparaison TFTD et TFD	23
2.5.7	TFD par convolution	24
2.5.8	Calculs de TFD	25
2.6	Analyse spectrale	26
2.6.1	Questions	26
2.6.2	Analyse spectrale d'un signal sinusoïdal	26
2.6.3	Analyse spectrale d'un signal	26
2.7	Convolution	26
2.7.1	Calcul d'une convolution	26
2.7.2	Complexité de calcul d'une convolution	26
2.8	Interpolation et décimation	26
2.8.1	Interpolation linéaire	26
2.8.2	Suréchantillonnage	27
3	Problèmes	29
3.1	Etude des filtres CIC	29
3.1.1	Intégrateur	29
3.1.2	Filtre en peigne	30
3.1.3	Mise en cascade	30
3.1.4	Association de plusieurs étages	30
3.2	Etude d'un système DTMF	31
3.2.1	Solution à base d'un filtre RIF	31
3.2.2	Solution à base d'une transformée de Fourier	32
3.2.3	Solution à base d'un filtre RII	32
3.2.4	Formulaire	34
3.3	Synthèse de filtres numériques	35
3.3.1	Synthèse de filtre RIF à phase linéaire par fenêtrage	35
3.3.2	Synthèse de filtre RII par la méthode bilinéaire	35
3.4	Etude d'un filtre en treillis	35
3.4.1	Détermination de la fonction de transfert	36

3.4.2	Complexité et développement du code C	36
3.4.3	Implantation en virgule fixe	36
3.4.4	Formulaire	37

Chapitre 1

Travaux Dirigés en Traitement Numérique du Signal

1.1 Echantillonnage

1.1.1 Chaîne de TNS

On s'intéresse à une chaîne de TNS du type de la figure 1.1



FIGURE 1.1 – Chaîne de TNS

Le signal $x(t) = A.e^{-at}.\sin(\omega_0.t).u(t)$ correspondant à une réponse transitoire d'un système oscillant amorti est échantillonné à une période T_e qui permette de limiter le recouvrement spectral.

1. Calculer la TF $X(f)$ de ce signal.
2. Tracer le module du spectre $|X(f)|$ de ce signal, et précisez le lieu du maximum F_{max} , ainsi que sa valeur (A.N. $\omega_0 = 2\pi 4 \text{ rad/s}$; $a = 7$; $A = 20$).
3. Ce spectre présente un support de durée infinie (à démontrer). Calculer et dessiner le spectre de $x^*(t)$ pour une période T_e quelconque.
4. Pour limiter l'effet de recouvrement spectral, on choisit de considérer la partie utile de $x(t)$ sur un support borné. Ainsi, toute composante spectrale dont l'amplitude ne dépasse pas 1% de l'amplitude maximale F_{max} du spectre sera considérée comme négligeable. Calculer la fréquence F_M au delà de laquelle l'amplitude des raies devient négligeable.
5. Calculer F_e telle que le recouvrement n'entraîne une erreur sur le spectre initial ne dépassant pas 1% de l'amplitude du spectre en F_M .
6. Existe-t-il d'autres solutions qui permettent de limiter le recouvrement spectral.

1.1.2 Échantillonnage d'un signal

1. Soit le signal $x(t) = e^{-at}.u(t)$, calculez et dessinez sa transformée de Fourier $X(\omega)$. On donnera les valeurs du modules en $\omega = 0, a, 10a$.
2. Calculez l'énergie du signal $x(t)$.
3. On échantillonne $x(t)$ à une période T . Calculez la transformée de Fourier $X_e(\omega)$ du signal échantillonné $x_e(nT)$.

4. Dessinez approximativement le module du spectre lorsque $T = \pi/10a$. Expliquez quels problèmes peuvent survenir lors de l'échantillonnage du signal $x(t)$.
5. Donner l'expression de l'énergie en fonction de la bande de fréquence $[-B, \dots + B]$ considérée. On rappelle que la primitive de $1/(1+x^2)$ est $\arctg(x)$. Trouver B donnant 90% de l'énergie totale du signal. Proposez, à partir de ces résultats, une solution pour limiter l'effet de l'échantillonnage en considérant qu'une bande de fréquence représentant 90% de l'énergie du signal suffit à caractériser le signal.

1.2 Analyse et implantation des filtres numériques

Pour les différents exercices de cette partie concernant l'implantation des filtres nous considérons un calculateur de type DSP (spécialisé dans le traitement du signal) dont les caractéristiques sont les suivantes :

- le cycle d'horloge est de $100ns$
- l'opération de base est du type $y = a \times x + b$;
- les opérations d'accumulation, ou de multiplication/addition sont exécutées en un cycle ;
- les calculs sont réalisés en simple précision ;
- les données en entrée et en sortie du multiplieur sont codées sur b bits ;
- les données en entrée et en sortie de l'additionneur sont codées sur b bits ;
- les données sont stockées en mémoire sur b bits ;
- le bit de signe redondant issu de la multiplication n'est pas automatiquement éliminé ;
- la loi de quantification utilisée est l'arrondi.

1.2.1 Filtrage numérique RIF

Soit un filtre à réponse impulsionnelle finie dont le schéma de fonctionnement dans le domaine temporel est donné figure 1.2. Soit T_e la période d'échantillonnage du système numérique, ($T_e = 1$).

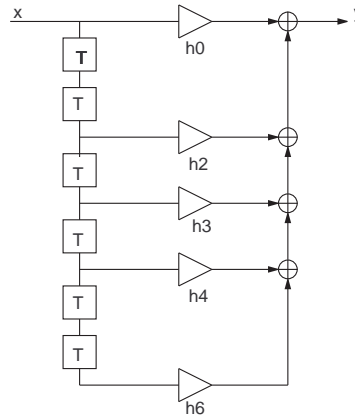


FIGURE 1.2 – Filtre FIR

1.2.1.1 Etude de la réponse fréquentielle

1. Donner les expressions de l'équation aux différences finies ainsi que la fonction de transfert en Z .
2. Déterminer et tracer la réponse impulsionnelle $h(n)$ du filtre, lorsque $h_0 = h_6 = 0.1$, $h_2 = h_4 = -0.3$, $h_3 = 0.4$.

3. Calculer la réponse fréquentielle $H(e^{j\Omega})$ du filtre. Déterminer son module et sa phase. Déterminer la valeur maximale du module.

On note que :

$$e^{-j\Omega_1} + e^{-j\Omega_2} = 2 \times e^{-j\frac{(\Omega_1+\Omega_2)}{2}} \times \cos\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)$$

4. Donner les valeurs du module en $\Omega = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 2\pi$.
5. Tracer approximativement son module. De quel type de filtre s'agit-il ?

1.2.1.2 Complexité de l'implantation du filtre

1. Quelle est la complexité du filtre tel que réalisé figure 1.2 en nombre de multiplications et d'additions. Quel est le nombre de mots mémoires nécessaires à l'exécution du calcul. (on considérera une complexité pour N points du signal d'entrée traités).
2. Quelle est dans ce cas la fréquence d'échantillonnage maximale du signal ?
3. Donner un schéma de principe de réalisation du filtre dans le domaine fréquentiel. Quelle est la complexité algorithmique de cette nouvelle solution (opérations et mots mémoire) ? Comparer les deux approches, la méthode fréquentielle est-elle exacte ?
4. Donner le code C de l'application utilisant l'arithmétique virgule flottante.

1.2.1.3 Étude de l'implantation du filtre en virgule fixe

Les données d'entrée et de sortie sont stockées en mémoire. Nous considérons que l'entrée du filtre est comprise dans l'intervalle $] - 1, 1[$.

1. Déterminer la dynamique de la sortie du filtre $y(n)$ à partir de la norme de Chebychev. En déduire le codage de la sortie.
2. Déterminer la position de la virgule des variables intermédiaires et des coefficients.
3. Déterminer le codage des variables intermédiaires et des coefficients.
4. Identifier les sources de bruits liées à la quantification d'un signal au sein du filtre. Rappeler brièvement le modèle de quantification d'un signal numérique.
5. Le bruit engendré par le signal en entrée du filtre est négligé. Donner la puissance de bruit σ_f^2 en sortie du filtre.
6. Maintenant, le signal d'entrée est bruité par l'opération de quantification (on note la puissance de ce bruit σ_e^2). Quelle est dans ce cas la puissance du bruit en sortie ? Que conclure ?
7. Le signal d'entrée est un signal sinusoïdal de 1V crête. Quel est la puissance de ce signal ? Déterminer le rapport signal à bruit en entrée et en sortie du filtre.
8. Quel serait le nombre de bits pour obtenir un RSB en sortie supérieure à 40dB ?

On rappelle que le rapport signal à bruit est donné par la relation :

$$RSB = \frac{\text{Puissance du signal}}{\text{Puissance du bruit}} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_b^2}$$

$$RSB_{dB} = 10 \log \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_b^2} \right)$$

1.2.2 Filtrage numérique RIF (1)

Soit le filtre numérique suivant : $H(z) = 0,1(z^{-1} + z^{-3}) + 0,2z^{-2}$

On posera T_e , période d'échantillonnage, égal à $1ms$.

1. Donnez et tracez sa réponse impulsionnelle $h(n)$. Quelles sont ses caractéristiques.
2. Calculez la réponse fréquentielle du système. Tracez son module et sa phase. On montrera que la phase du filtre est linéaire. Donnez la fréquence de coupure à $-3dB$.
3. Quel type de filtre est réalisé ?
4. Donnez l'expression de la sortie $y(n)$ du filtre en fonction de l'entrée $x(n)$. Calculez et dessinez le signal de sortie du filtre $y(n)$ pour $n = 0 \dots 7$ lorsque l'entrée est :

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n=0, 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1.2.3 Filtrage numérique RIF (2)

Soit le filtre de réponse impulsionnelle suivante :

$$h(n) = a_0\delta(n) + a_1\delta(n-1) + a_2\delta(n-2) + a_1\delta(n-3) + a_0\delta(n-4)$$

1. Donner l'expression de l'équation aux différences finies de ces filtres et de sa fonction de transfert en Z
2. En déduire la réponse fréquentielle $H(e^{j\Omega})$, puis l'expression de son module et de sa phase.
3. Calculer les valeurs du module pour $\Omega = 0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}$
4. Déterminer où se trouve le minimum et le maximum de ce module. En déduire quel type de filtre peut être réalisé par $h(n)$.
5. Trouver les valeurs des coefficients a_i tels que $|H(e^{j\Omega})|$ soit égal à $1, 0,5, 0$ en, respectivement, $\Omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, avec $a_i \geq 0 \quad \forall \quad i$
6. Chercher F_c la fréquence de coupure à $-3dB$ du filtre si la fréquence d'échantillonnage $F_e = 40kHz$

1.2.4 Filtrage numérique RIF cascade

Soit les filtres du second ordre suivant :

$$H^i(z) = b_0^i + b_1^i z^{-1} + b_2^i z^{-2}, \quad i = 0 \dots 2$$

1.2.4.1 Étude des fonctions de transfert

1. Donner l'expression de l'équation aux différences finies de ces filtres
2. Donner une structure de réalisation de ces filtres
3. Donner le synoptique d'une mise sous forme parallèle de ces filtres que l'on notera $M(z)$
4. Donner le synoptique d'une mise sous une forme cascade de ces filtres que l'on notera $N(z)$
5. En déduire les fonctions de transfert $M(z), N(z)$ en fonction des b_j^i

1.2.4.2 Étude de la complexité d'une implantation cascade

1. Quelle est la complexité du filtrage type $N(z)$ en nombre de multiplications et d'additions ?
2. On considère une signal audio de qualité HiFi en entrée du filtre ($F_e = 44.1kHz$), quel doit être le temps de cycle et la capacité mémoire d'une machine réalisant multiplication et addition en parallèle ?

1.2.4.3 Etude des bruits de calcul

Les données de l'entrée et de la sortie sont codées sur des mots de b bits utiles en complément à 2. La dynamique des nombres est $[-1, 1]$. La machine de traitement possède uniquement des opérateurs travaillant sur b bits.

1. Exprimer le bruit en sortie d'un filtre $H^i(z)$ en fonction du bruit en entrée dans les cas où les coefficients multiplicatifs influent sur le puissance du bruit
2. En déduire le bruit en sortie du filtre $N(z)$ en considérant que le bruit en entrée du filtre provient de la conversion analogique numérique. L'ordre de la mise en cascade a-t-elle une influence ?
3. Quelle est la valeur maximale du signal d'entrée d'un filtre $H^i(z)$ pour qu'il n'y ait pas de débordement de calcul ? Exprimer ce résultat en fonction des b_j^i
4. En déduire la valeur maximale du signal d'entrée du filtre $N(z)$ pour éviter tout débordement.

1.2.4.4 Application numérique

Les coefficients sont les suivants pour les trois filtres élémentaires :

$$b_0^i = 0.5, \quad b_1^i = 0.75, \quad b_2^i = 0.5, \quad i = 0 \dots 2$$

1. Donner la réponse impulsionnelle puis fréquentielle des filtres $H^i(z)$, puis du filtre $N(z)$
2. Donner le bruit en sortie du filtre $N(z)$, puis sa dynamique maximale en entrée. Expliquer comment empêcher les débordements.

1.2.5 Filtrage numérique RII

1.2.5.1 Etude d'une cellule du second ordre purement réursive

Soit le système qui, à la suite de données $x(n)$, fait correspondre la suite $y(n)$ telle que :

$$y(n) = x(n) - b_1.y(n-1) - b_2.y(n-2)$$

1. Déterminer la fonction de transfert en Z du système.
2. Déterminer et tracer les pôles de la fonction de transfert $H(z)$. Le cas de deux pôles complexes est étudié. Analyser l'influence des coefficients b_1 et b_2 sur ces pôles.
3. Donner la réponse impulsionnelle du filtre numérique.
4. Étudier la réponse fréquentielle du filtre et les valeurs extrêmes obtenues.
5. Donner la structure de réalisation.

1.2.5.2 Etude d'une cellule du second ordre

Soit le système qui, à la suite de données $x(n)$, fait correspondre la suite $y(n)$ telle que :

$$y(n) = \sum_{i=0}^2 b_i.x(n-i) - \sum_{i=1}^2 a_i.y(n-i)$$

Les coefficients a_i et b_i sont des constantes. La fonction de transfert $H(z)$ est donnée ci-dessous.

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = N(z).H_D(z) = \frac{b_0 + b_1.z^{-1} + b_2.z^{-2}}{1 + a_1.z^{-1} + a_2.z^{-2}}$$

Pour illustrer cette étude, nous considérons les valeurs des coefficients suivants :

$$\begin{array}{ll} b_0 = 0.093636 & a_1 = -1.096 \\ b_1 = 0.187263 & a_2 = +0.5065 \\ b_2 = 0.093636 & \end{array}$$

1. Représenter le graphe flot de calculs pour **la structure directe de réalisation**. Cette forme est obtenue en écrivant $H(z)$ sous la forme $N(z) \cdot \frac{1}{D(z)}$
2. Déterminer la dynamique des différentes données à l'aide de la norme L1. Nous considérons que l'entrée du filtre est comprise dans l'intervalle $] -1, 1[$
3. Déterminer le codage des données, des coefficients et les recadrages nécessaires.
4. Rappeler la modélisation d'un bruit d'arrondi. Identifier les sources de bruit générées lors de la quantification d'un signal.
5. Déterminer la puissance du bruit en sortie du filtre. Le signal d'entrée $x(n)$ est entaché d'un bruit σ_e^2 ,

Pour les applications numériques, les différents éléments suivants sont donnés

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)|^2 = 0.31 \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h_D(i)|^2 = 2.86 \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| = 1.36 \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h_D(i)| = 3.85$$

1.2.5.3 Étude de cellules du quatrième ordre sous forme cascade

Soit un filtre du 4^{ème} ordre, mis en œuvre par deux cellules du second ordre (structure directe), cascades. Pour simplifier les calculs nous considérons que les cellules cascades possèdent le même codage

1. Représenter le graphe flot de calculs de ce filtre avec $a_{1,i}$ et $b_{1,j}$, les coefficients de la première cellule et $a_{2,i}$ et $b_{2,j}$ les coefficients de la seconde cellule.
2. Déterminer les expressions permettant de calculer la dynamique des données.
3. Déterminer l'expression de la puissance du bruit en sortie du filtre global.

1.3 Synthèse des filtres RII

1.3.1 Filtre passe bas du deuxième ordre

1.3.1.1 Étude par le gabarit

On désire réaliser un filtre numérique $H(z)$, équivalent à un filtre analogique passe-bas de Chebyshev respectant le gabarit suivant :

f_p	f_a	δ_1	δ_2
1 kHz	3 kHz	-3 dB	-20 dB

Après avoir dessiné le gabarit analogique équivalent, et déduit l'ordre du filtre, donnez la fonction de transfert obtenue par la transformation bilinéaire. On posera $f_e = 10\text{kHz}$.

Démontrer que

$$H(z) = \frac{0.079(z+1)^2}{z^2 + 1.2z + 0.516}$$

On rappelle que la transformation bilinéaire est obtenue par

$$p = f(z) = 2.Fe \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

1.3.1.2 Étude directe

On désire réaliser un filtre numérique $H(z)$ équivalent à un filtre analogique de Chebyshev passe-bas $H(j\omega)$ du deuxième ordre qui présente une fréquence de coupure F_c de 1 kHz. La fréquence d'échantillonnage Fe sera de 10 kHz. Les fonctions de transfert du filtre de Chebyshev normalisé puis dénormalisé sont les suivantes :

$$H_{Norm}(j\omega) = \frac{1}{1 + j0.995\omega - 0.907\omega^2} \quad (1.1)$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j0.995\omega - 0.907\omega^2} \quad (1.2)$$

$f_0 = 5.2\text{ kHz}$.

Les réponses fréquentielles des gain, phase et temps de propagation de groupe sont données par les équations suivantes :

$$|H(\omega)|^2 = \left[H(z)H(z^{-1}) \right]_{z=e^{j\omega}}$$

$$\phi(\omega) = \text{Arg}(H(z))$$

$$\rightarrow (\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$$

Faire la synthèse par la méthode bilinéaire du filtre $H(j\omega)$ afin d'obtenir $H(z)$. On étudiera l'influence de la distorsion en fréquence impliquée par la méthode.

1.3.2 Filtre passe haut

On désire réaliser un filtre RII dont la réponse en fréquence est définie par le gabarit fréquentiel ci-dessous. La période d'échantillonnage T est fixée à $10\pi\mu\text{s}$.

- Atténuation de 3dB pour $\Omega_c = 0.4\pi$ rad.
- Atténuation supérieure à 20dB pour $0 \leq \Omega \leq 0.1\pi$ rad.
- Atténuation inférieure à 1dB pour $0.5\pi \text{ rad} \leq \Omega \leq \pi$ rad.

1. Tracer le gabarit numérique du filtre en pulsation ω .

2. On désire réaliser le filtre numérique par la méthode de la transformation bilinéaire en ayant une réponse fréquentielle monotone dans la bande passante.
 - (a) Quel type de filtre analogique doit on prendre ?
 - (b) Dessiner le gabarit analogique du filtre équivalent.
 - (c) A partir du gabarit prototype équivalent, déterminer l'ordre et donner la fonction de transfert normalisée $H_N(p)$.
 - (d) Donnez l'expression littérale (sans application numérique) du filtre analogique équivalent $H(p)$ en se rappelant que le filtre numérique devra passer à -3dB en Ω_c .
 - (e) Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ du filtre numérique. Mettre $H(z)$ sous la forme littérale suivante. Exprimer les coefficients a_i et b_i en fonction de Ω_c .

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1.z^{-1} + b_2.z^{-2}}{1 + a_1.z^{-1} + a_2.z^{-2}}$$

- (f) Donner la fonction de transfert $H(z)$ sous forme numérique.
3. Donner l'expression de $H(e^{j\Omega})$, puis calculer son module pour $\Omega = 0, \pi/2, \pi$. Dessiner la réponse fréquentielle globale du filtre numérique.
4. Donner l'équation aux différences du filtre numérique puis sa structure canonique de réalisation.
5. On désire réaliser ce même filtre numérique par la méthode de l'invariance impulsionnelle.
 - (a) A partir de l'expression littérale du filtre analogique équivalent $H(p)$, donner la réponse impulsionnelle $h(t)$. On rappelle que :

$$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2} \iff e^{-a.t} \cos(\omega_0 t)$$

- (b) Donner l'expression de la fonction de transfert en z $H(z)$ du filtre.
- (c) Que peut-on dire de la réponse fréquentielle numérique par rapport au gabarit.

1.4 Synthèse des filtres RIF

1.4.1 Méthode du fenêtrage

On considère un filtre numérique idéal défini par la réponse fréquentielle suivante :

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & \text{pour } \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

1. Dessiner la réponse en fréquence (module et phase) sur l'intervalle $[-2\pi \dots 2\pi]$, préciser le type de filtre obtenu.
2. Donner l'expression des coefficients $h(n)$ de la réponse impulsionnelle du filtre. Calculer $h(n)$ pour $n = [-5, \dots, +5]$ pour le cas où $\Omega_c = \pi/4$. Dessiner la forme générale de cette réponse. Le filtre est-il causal ?
3. On recherche les relations entre cette réponse impulsionnelle et celles de filtres passe-haut, passe-bande, réjecteur-de-bande. Montrer que :
 - pour les filtres passe-haut de fréquence de coupure $\Omega'_c = \pi - \Omega_c$ les coefficients de la réponse impulsionnelle sont : $h_{PH}(n) = (-1)^n h(n)$,
 - pour les filtres passe-bande de fréquence de coupure basse $\Omega_1 = \Omega_0 - \Omega_c$ et de fréquence de coupure haute $\Omega_2 = \Omega_0 + \Omega_c$ (Ω_0 fréquence centrale), les coefficients de la réponse impulsionnelle sont : $h_{PB}(n) = 2h(n)\cos(n\Omega_0)$,

- pour les filtres rejeteur-de-bande de fréquence de coupure basse $\Omega_1 = \Omega_0 - \Omega_c$ et de fréquence de coupure haute $\Omega_2 = \Omega_0 + \Omega_c$ (Ω_0 fréquence centrale), les coefficients de la réponse impulsionnelle sont : $h_{RB}(0) = 1 - h_{PB}(0)$, $h_{RB}(n) = -h_{PB}(n)$.
- 4. Calculer les coefficients $h_{PH}(n)$, $h_{PB}(n)$, $h_{RB}(n)$ pour $n = [-5, \dots, +5]$, lorsque $\Omega_c = \pi/4$ et $\Omega_0 = \pi/2$. Dessiner les réponses correspondantes.
- 5. On s'intéresse au premier filtre $h(n)$ que l'on veut transformer en filtre causal à phase linéaire ayant une réponse impulsionnelle limitée à 11 points sans pondération de la réponse en ces points. Comment peut-on obtenir ce résultat ?
- 6. En déduire l'expression de la fonction de transfert $H_a(z)$, ainsi que $H_a(e^{j\Omega})$ dont on calculera les coefficients a_n ($a_0 \dots a_5$) lorsque $\Omega_c = \pi/4$.
- 7. Quelle est la largeur de la zone de transition de $H_a(e^{j\Omega})$ et l'amplitude maximale de l'ondulation dans la zone atténuée.

1.4.2 Méthode de l'échantillonnage fréquentiel

On désire réaliser un filtre dérivateur à Réponse Impulsionnelle Finie ayant une caractéristique en phase linéaire par la méthode de l'échantillonnage fréquentiel sur N points.

La réponse fréquentielle entre $-\pi$ et π du filtre idéal est donc définie par :

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} j\frac{\Omega}{\Omega_c} & \text{pour } -\Omega_c \leq \Omega \leq \Omega_c \\ 0 & \text{pour } \Omega_c < \Omega \leq \pi \text{ et } -\pi \leq \Omega < -\Omega_c \end{cases}$$

On fixe $\Omega_c = \frac{4\pi}{N}$

1. Dessiner le pseudo-module $A(\Omega)$ et la phase $\phi(\Omega)$ de la réponse fréquentielle pour $-2\pi \leq \Omega \leq 2\pi$.
2. Donner le type de réponse impulsionnelle issu de la classification vue en cours pouvant réaliser au mieux ce filtre RIF à phase linéaire.
3. On échantillonne le filtre idéal à $\Omega_e = \Omega_c/2$ pour $0 \leq k\Omega_e < 2\pi$.
 - Représenter la réponse fréquentielle du filtre échantillonné $H_a(k\Omega_e)$.
 - Exprimer la réponse impulsionnelle $h_a(n)$ en fonction de N .
 - Calculez et dessinez $h_a(n)$ pour le cas particulier où $N = 7$.
4. Donner l'expression de l'équation aux différences du filtre. En déduire la fonction de transfert $H_a(z)$ du filtre obtenu.
5. Donner une deuxième version de $H_a(z)$ directement déduite de $H_a(k\Omega_e)$ sous forme de cellules du second ordre en parallèle réelles.
6. Montrer que les deux versions du 4. et du 5. sont équivalentes.
7. A votre avis quels sont les problèmes sur la réponse fréquentielle de ce filtre. Donner une nouvelle version du filtre $h_b(n)$ déduite du filtre $h_a(n)$ dont le comportement en fréquence serait optimisé.

1.5 Transformée de Fourier Discrète et Rapide (TFD et TFR)

1.5.1 TFD bidimensionnelle

Soit une transformée de Fourier discrète d'un signal bidimensionnel ; par exemple une image de taille $N \times N$:

$$X(m, n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x(k, l) \times W_N^{mk} \times W_N^{nl}$$

avec :

$$W_N = e^{-\frac{2j\pi}{N}}$$

Montrer que cette transformée peut s'exprimer comme étant la succession d'une TF 1D sur les lignes de l'image et une TF 1D sur les colonnes de l'image.

1.5.2 Transformée de Fourier Glissante

On considère une séquence temporelle $x(n)$ que l'on échantillonne à une cadence fixe. On désire obtenir en permanence le spectre de cette séquence sur les N derniers points échantillonnés. A l'instant $i + N$, le spectre est obtenu par :

$$X_i(k) = \sum_{n=i}^{i+N-1} x(n).W_N^{k(n-i)}, \text{ pour } 0 \leq k \leq N-1$$

1. Donner l'expression du spectre $X_{i+1}(k)$.
2. Comment peut on calculer ce spectre de manière récurrente.
3. Comparer le nombre de calculs à effectuer entre la solution précédente et la solution consistant à calculer une TFD ou une TFR sur chaque séquence.

1.5.3 Transformée de Fourier en Base 4

Démontrer comment on peut obtenir une TFR à base 4 à partir d'une TFD. Sous quelle condition sur N peut-on y arriver. On utilisera l'exemple sur 16 points pour supporter la démonstration. On précisera les calculs d'un papillon.

1.5.4 Optimisation du calcul de la TFR d'une suite de nombres réels

Soit une séquence temporelle d'échantillons réels $u(k)$, $0 \leq k \leq 2N-1$ dont nous cherchons à calculer le spectre en minimisant le nombre de calculs à effectuer. Pour cela on forme une séquence temporelle complexe $x(n) = x_r(n) + j.x_i(n)$ telle que :

$x_r(n) = u(k)$, $k = 2n$, partie réelle de la séquence $x(n)$,

$x_i(n) = u(k)$, $k = 2n + 1$, partie imaginaire de la séquence $x(n)$,

$X(p) = X_r(p) + j.X_i(p)$ est la TFD de $x(n)$, $U(p) = U_r(p) + j.U_i(p)$ est la TFD de $u(k)$.

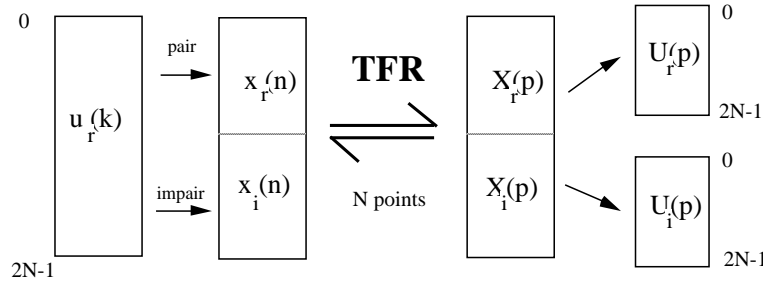


FIGURE 1.3 – TFR d'une suite de $2N$ nombres réels

1. Trouver $U(p)$ et $X(p)$ en fonction de $x_r(n)$ et $x_i(n)$. Démontrer que :

$$\begin{aligned} X(p) &= A + j.B \\ U(p) &= A + B.e^{-\frac{j\pi p}{N}} \end{aligned}$$

où A et B sont des nombres complexes. Exprimer $X(N-p)$ en fonction de A et B afin d'en déduire les valeurs de A et B . Donner finalement les relations permettant de retrouver $U(p)$ à partir de $X(p)$ et $X(N-p)$.

2. Évaluer le gain en nombre de calculs (\oplus et \otimes) que l'on obtient entre l'application de la méthode précédente et l'application directe de la TFR de $u(k)$.

1.5.5 Optimisation du calcul de la TFR de deux suites de nombres réels

Soit deux séquences temporelles réelles $u(k)$ et $v(l)$ sur N points dont nous cherchons à calculer les TFR en minimisant le nombre de calculs à effectuer. Pour cela on forme une séquence temporelle complexe $x(i)$ telle que :

$$x_r(i) = u(k), \quad k = i, \text{ partie réelle de la séquence } x(i),$$

$$x_i(i) = v(l), \quad l = i, \text{ partie imaginaire de la séquence } x(i),$$

$$x(i) = x_r(i) + j.x_i(i).$$

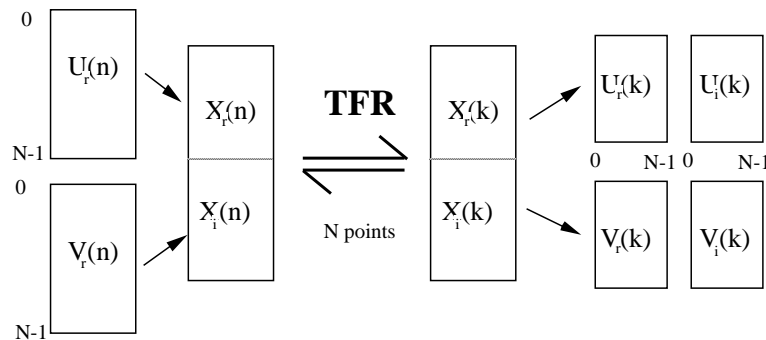


FIGURE 1.4 – TFR de 2 suites de N nombres réels

1. Donner les relations permettant de retrouver les TFD $U(p)$ et $V(q)$ de $u(k)$ et $v(l)$ à partir du spectre $X(n)$ de $x(i)$.
2. Évaluer le gain en nombre de calculs (\oplus et \otimes) que l'on obtient entre l'application de la méthode précédente et l'application directe de la TFR de $u(k)$ et de $v(l)$.

1.5.6 Comparaison entre TFSD et TFD

Soit le signal :

$$x(n) = e^{-a.n} \times u(n)$$

avec $u(n)$ l'échelon unité, la période d'échantillonnage étant $T_e = \frac{1}{F_e}$.

- Déterminer la TFSD – Transformée de Fourier d'un Signal Discret – de $x(n)$ que l'on notera $X_{TFSD}(f)$
- Déterminer la TFD, Transformée de Fourier Discrète de $x(n)$ que l'on notera $X_{TFD}(k)$
- Comparer les résultats de la TFSD et de la TFD. D'où peut provenir l'écart entre ces résultats et évaluer son comportement? On cherchera à exprimer une relation entre $X_{TFD}(k)$ et $X_{TFSD}(f)$.

1.5.7 TFD par convolution

1. En utilisant la relation $n.k = (n^2 + k^2 - (n - k)^2)/2$, montrez que l'on peut exprimer une TFD à partir d'une convolution.
2. Donner le schéma de principe de la TFD par convolution. Quel avantage peut comporter cette solution?

1.5.8 Bruits dans la TFD

On rappelle l'expression de la transformée de Fourier Discrète $X(k)$ d'un signal $x(n)$ que l'on supposera réel :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \times W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

1. Évaluer le nombre de multiplications et le nombre d'additions de la TFD.
2. Rappeler le modèle statistique de quantification par arrondi d'un signal sur b bits, on prendra comme application numérique $b = 8$ (préciser l'intervalle de variation de l'erreur, la densité de probabilité, moyenne et variance de ce bruit)
3. On suppose que le signal d'entrée est entâché d'un bruit de puissance σ_e^2 , évaluer la puissance de bruit σ_s^2 en sortie de la TFD en fonction de σ_e^2 et de b .
4. Dans quel rapport (exprimé en linéaire ou log) diminue-t-on la puissance de σ_s^2 lorsqu'on multiplie le nombre de bits de représentation par 2.
5. Montrer que chaque sortie d'une TFD, $X(k)$, peut être obtenue à partir des entrées $x(n)$ par une relation de récurrence du type suivant :

$$\begin{aligned} y(m) &= A_k \times y(m-1) + B_m \\ y(0) &= 0 \\ X(k) &= y(N) \end{aligned}$$

6. Cette équation comporte-t-elle des avantages ?

1.5.9 Étude des bruits de calcul dans la transformée de Fourier Rapide

On s'intéresse à l'estimation du bruit de calcul d'une transformée de Fourier rapide, à base 2 et à entrelacement temporel (DIT). Les calculs de cette transformation numérique reposent sur l'enchaînement de papillons, suivant la structure donnée dans les documents.

Le papillon de la TFR est la structure de calcul qui se répète. On étudiera donc les bruits de calcul qui s'y produisent. Pour cela on considère un modèle de graphe où les données sont complexes (figure 1.5 à gauche), ou réelles (figure 1.5 à droite).

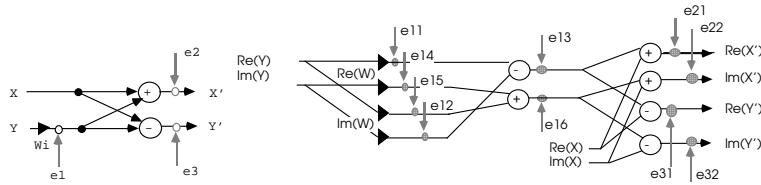


FIGURE 1.5 – Modèles de bruits de calcul dans un papillon

1.5.9.1 Calcul en virgule fixe cadrée à gauche $[-1 \dots +1]$ sur b bits

1. Précisez le bruit de calcul additionnel à la sortie de chaque opération. Calculez le bruit de calcul σ_s^2 sur les données sortant du papillon, en fonction du bruit de calcul et du bruit σ_e^2 sur les données complexes en entrée du papillon. On demande de spécifier tous les bruits de calcul en fonction de q , l'échelon de quantification. Exprimez q en fonction de b , le nombre de bits du format de codage.

2. Pour une transformée de Fourier sur N points, le nombre d'étapes de calcul est $\log_2(N)$. Si les échantillons sont entachés d'un bruit de conversion σ_o^2 , quel est le bruit σ_n^2 sur les sorties de la TFR sur N points (on considère que N est une puissance de 2).
3. Les calculs sont opérés sur un processeur de traitement du signal qui permet de sauvegarder les résultats des multiplications en double précision, sur $2b$ bits. Les additions peuvent être opérées sur $2b$ bits (double précision), mais la mémorisation des données calculées à la sortie de chaque papillon n'est faite que sur b bits (on considère que les calculs intermédiaires du papillon peuvent être mémorisés en double précision). Un arrondi est donc effectué uniquement lors de la mémorisation des résultats d'un papillon. Indiquez à partir du graphe flot de calcul du 2. la valeur des différents bruits de calcul. Calculez comme au 1. σ_s^2 en fonction de σ_e^2 , puis comme au 2. σ_n^2 en fonction de σ_o^2 .
4. Pour résoudre des problèmes de dynamique de calcul, une division par 2 des données calculées à la sortie des papillons est opérée systématiquement, soit globalement une division par N . On appellera σ_{div}^2 la valeur du bruit d'arrondi de la division, on admettra qu'une division complexe entraîne un bruit de puissance $q^2/4$. Préciser sur le graphe flot de calcul du papillon les sources de bruit (on ne considère plus la mémorisation des résultats intermédiaires en double précision).
5. Indiquez pour les conditions précédentes la valeur de σ_s^2 en fonction de σ_e^2 , puis de σ_n^2 en fonction de σ_o^2 .

1.5.10 Calculs de TFD

1. Donner la représentation matricielle de la TFD d'un vecteur de N échantillons. Donner en particulier la matrice de transformation de Fourier discrète lorsque $N = 4$. Simplifier au maximum les éléments de la matrice.
2. Soient les signaux $x(n)$ et $h(n)$ suivants :

$$h(n) = \begin{cases} \frac{(n+1)}{10} & \text{si } n = 0 \dots 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad x(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 4k \\ 1 & \text{si } n = 4k + 1, 4k + 3 \\ 2 & \text{si } n = 4k + 2 \end{cases}$$

- $x(n)$ est un signal périodique. Calculer $X(k)$ et $H(k)$ les TFD sur 4 points des signaux $x(n)$ et $h(n)$. Tracer le module.
3. Comparer qualitativement $H(k)$ et $X(k)$ avec les transformées de Fourier des signaux $x(n)$ et $h(n)$.
 4. Exprimer $y(n)$, résultat du filtrage de $x(n)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$.
 5. Expliquer comment obtenir $Y(k)$, la représentation spectrale du signal $y(n)$.

1.6 Analyse spectrale

1.6.1 Questions

1. Un signal analogique est échantillonné à $F_e = 10$ kHz. On calcule son spectre à partir de 1024 points de la séquence temporelle. Quel est l'intervalle de fréquence entre deux points successifs du spectre ?
2. On rappellera le schéma de principe d'une analyse spectrale. La bande occupée par un signal à analyser s'étend de 0 à 10 kHz. La résolution fréquentielle recherchée est de 1 Hz. La résolution en amplitude doit être supérieure à 40 dB.
 - (a) Quelle doit être la fréquence d'échantillonnage.
 - (b) Quelle longueur d'enregistrement doit on prélever pour faire une telle analyse.
 - (c) Déterminez les caractéristiques d'une machine 8 bits capable de réaliser une telle analyse spectrale (capacité de mémoire, temps d'addition et de multiplication). On désire que le résultat de l'analyse soit affiché sur un écran à une fréquence de 25 images/s.

1.6.2 Analyse spectrale d'un signal sinusoïdal

On effectue l'analyse spectrale par voie numérique d'un signal sinusoïdal de fréquence f_s . On sait que l'observation du signal temporel durant un temps limité à $[0, N.T]$ amène à une pondération du signal temporel par une fenêtre d'observation. On se propose d'étudier l'effet sur le spectre du signal observé.

1. Dans le cas d'une fenêtre rectangulaire, tracer le spectre du signal continu $x(t)$, puis celui du signal discrétisé, tronqué et pondéré $x_{T_0}(n.T)$. Calculer l'erreur maximale en % que l'on fait sur l'estimation de l'amplitude du spectre lorsque $f_0 \neq N/T_0$.
2. Calculer le TF d'une fenêtre triangulaire entre 0 et T_0 , valant 1 en $T_0/2$. Reprendre dans le cas d'une fenêtre triangulaire (Bartlett) la question 1.
3. Même question que le 1. lorsque la fenêtre d'observation est une fenêtre de Hanning.
4. On veut une résolution fréquentielle de 1 Hz entre deux raies du spectre, avec des amplitudes pouvant varier de 1 à 10. Calculer T_0 dans les cas où on utilise une des trois fenêtres précédentes.

1.6.3 Analyse spectrale d'un signal

1. Calculer la TFD $X(n)$ de la suite $x(k) = \sin\left[2\pi\frac{k}{3.5}\right]$ avec $0 \leq k \leq 15$. Quel type de fenêtre est implicitement utilisé pour l'analyse de $x(k)$?
2. Tracer $X(k)$ et la TF du signal sinusoïdal complet sur le même graphique. Calculez, pour cet exemple, les erreurs d'analyse (en fréquence et en amplitude) induites par le fenêtrage. Ceci peut être fait même si la TFD n'est pas calculée.

1.7 Convolution

1.7.1 Calcul d'une convolution

1. Soit $x(n) = a^n.u(n)$ et $h(n) = b^n.u(n)$, trouver par la méthode directe $y(n) = x(n) * h(n)$. * est la convolution de 2 signaux.
2. Retrouver ce résultat par l'application de la transformée en Z de la convolution.
3. On tronque $x(n)$ sur $N = 8$ points et $h(n)$ sur $M = 4$ points. Donner l'expression de $y(n)$ dans ce cas. On donnera les valeurs et on dessinera $y(n)$ pour $n = 0 \dots 15$.

1.7.2 Complexité de calcul d'une convolution

1. Donner la complexité de calcul de la convolution par la méthode directe.
2. Donner la complexité de calcul de la convolution par la méthode rapide en utilisant la Transformée de Fourier Rapide.

1.8 Interpolation et décimation

1.8.1 Interpolation linéaire

On considère l'interpolation d'ordre 1 d'une fonction $x(t) : x(t + \epsilon) = x(t) + \epsilon \frac{dx(t)}{dt}$, avec ϵ petit. On peut appliquer cette formule à une séquence $x(k)$ échantillonnée :

$$x(k + \epsilon) = x(k).(1 - \epsilon) + \epsilon.x(k + 1)$$

On appelle $X(n)$ la TFD de cette séquence. On appelle $Y(p)$, $0 \leq p \leq 2N - 1$, la TFD de la séquence $y(l)$, où $y(l)$ est égale à la séquence $x(k)$ interpolée avec $\epsilon = 1/2$. Si l est pair, $y(l) = x(k)$ ($k = l/2$) est l'échantillon contenu primitivement dans la séquence temporelle, si l est impair $y(l)$ est un échantillon interpolé.

1. Montrer que le spectre $Y(p)$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} Y(p) &= X(p) \cdot [1 + \cos(\pi p/N)], \quad 0 \leq p \leq N-1 \\ Y(p) &= X(p) \cdot [1 - \cos(\pi p/N)], \quad N \leq p \leq 2N-1 \end{aligned}$$

On considérera les conditions initiales $x(0) = x(N) = 0$.

2. Indiquer comment on peut effectuer une interpolation linéaire en utilisant la TFR.

1.8.2 Suréchantillonnage

On considère la séquence temporelle $x_N(k)$ sur N points et $X_N(n)$ son spectre. On complète $x(k)$ par des zéros pour obtenir une séquence sur M points ($M > N$). Cette nouvelle suite $x_M(k)$ a un spectre $X_M(n)$.

1. Qu'il y a-t-il de changé au niveau spectral ?
2. Déterminez la relation entre M et N pour que toutes les composantes de $X_N(n)$ soient contenues dans $X_M(n)$.

Chapitre 2

Corrections des Travaux Dirigés en TNS

2.1 Corrigés des TD sur l'échantillonnage

2.1.1 Chaîne de TNS

Soit le signal : $x(t) = A \cdot e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-2j\pi ft} dt = A \cdot \int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot e^{-2j\pi ft} dt \\ X(\omega) &= \frac{A\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2} \\ y(n) &= a^2 \cdot y(n-2) + a \cdot x(n-1) + x(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= a^3 \cdot y(n-3) + a^2 \cdot x(n-2) + a \cdot x(n-1) + x(n) \\ y(n) &= a^N \cdot y(n-N) + D(n, N) \\ D(n, N) &= \sum_{j=0}^{N-1} a^j \cdot x(n-j) \end{aligned}$$

1. $X(f) = \frac{A\omega_0}{a^2 + \omega_0^2 - \omega^2 + 2a \cdot j \cdot \omega}$
2. $\omega_{MAX} = 24.14 \text{ rad/s}$; $|X(0)| = 0.73$; $|X(\omega_{MAX})| = A/2a = 1, 43$
3. $|X(F_m)|^2 = 10^{-4} |X(F_{max})|^2 \Rightarrow F_m = 30 \text{ Hz}$
4. $|X(F_r)| = 0.01 |X(F_{max})| = 0.0001 |X(F_m)| \Rightarrow F_r = 298 \text{ Hz}$

2.1.2 Échantillonnage d'un signal

1. $X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$
2. $E_x = 1/(2a)$
3. $X_e(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-aT} e^{-j\Omega T}}$
4. Problème de recouvrement de spectre.
5. $E_{[-B..+B]} = \int_{-B}^B |X(f)|^2 df = \frac{\arctan(2\pi B/a)}{\pi a}$, pour 90% : $B = a$.

2.2 Analyse des filtres numériques

2.2.1 Filtrage numérique RIF

2.2.2 Filtrage numérique RIF (1)

1. $h(n) = 0.1[\delta(n-1) + \delta(n-3)] + 0.2\delta(n-2)$: RIF symétrique
2. $H(\Omega) = 0.2.e^{-2j\Omega}[1 + \cos\Omega]$
 $|H(\Omega)| = 0.2(1 + \cos\Omega)$
 $Arg[H(\Omega)] = -2\Omega \Rightarrow$ phase linéaire
 $f_c = 182Hz$
3. Filtre passe bas
4. $y(0) = y(5) = 0$; $y(1) = y(4) = 0.1$; $y(2) = y(3) = 0.3$

2.2.3 Filtrage numérique RIF (2)

A partir de la réponse impulsionnelle d'un filtre exprimée comme une somme d'impulsions, on trouve aisément en fonction d'un signal d'entrée la sortie suivante :

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) \\ &= a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + a_1x(n-3) + a_0x(n-4) \end{aligned}$$

On trouve la fonction de transfert :

$$H(z) = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_1z^{-3} + a_0z^{-4}$$

Pour trouver la réponse fréquentielle du filtre on évalue la transformée en z sur le cercle unité :

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= a_0 + a_1e^{-j\Omega} + a_2e^{-2j\Omega} + a_1e^{-3j\Omega} + a_0e^{-4j\Omega} \\ &= 2a_0e^{-2j\Omega} \cos(2\Omega) + 2a_1e^{-2j\Omega} \cos(\Omega) + a_2e^{-2j\Omega} \\ &= e^{-2j\Omega}[a_2 + 2a_1 \cos(\Omega) + 2a_0 \cos(2\Omega)] \end{aligned}$$

On trouve alors les modules et arguments suivants :

$$\begin{aligned} |H(e^{j\Omega})| &= a_2 + 2a_1 \cos(\Omega) + 2a_0 \cos(2\Omega) \\ \angle H(e^{j\Omega}) &= -2\Omega \end{aligned}$$

On trouve les modules et les phases pour les quelques valeurs de Ω suivantes :

	0	$\pi/2$	π	2π
$ H(e^{j\Omega}) $	$ a_2 + 2a_1 + 2a_0 $	$ a_2 - 2a_0 $	$ a_2 + 2a_0 - 2a_1 $	$ a_2 + 2a_1 + 2a_0 $
$\angle H(e^{j\Omega})$	0	$-\pi$	-2π	-4π

On peut tout d'abord noter que le module en 0 est toujours supérieur au module en π puisque les coefficients sont positifs. Il n'est donc pas possible de réaliser un filtre passe-haut avec une telle équation.

On recherche a_0, a_1, a_2 tels que $|H(e^{j0})| = 1$, $|H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = \frac{1}{2}$ et $|H(e^{j\pi})| = 0$. Il faut tout d'abord noter que l'on travaille avec une norme L_2 , c'est-à-dire des valeurs absolues pour des nombres réels. On cherche tout d'abord à faire disparaître les valeurs absolues en distinguant éventuellement plusieurs solutions selon les coefficients a_i . Pour cela on dispose d'une contrainte supplémentaire : les a_i sont supérieurs ou égaux à 0. On a donc $\forall a_i \quad |H(e^{j0})| \geq |H(e^{j\pi})|$, c'est-à-dire $\forall a_i \quad |H(e^{j0})| \geq 0$. On trouve alors comme première équation $(a_2 + 2a_1 + 2a_0) = 1$, comme secondes $(a_2 - 2a_0) = \frac{1}{2}$ ou $-(a_2 - 2a_0) = \frac{1}{2}$, et comme troisième $(a_2 + 2a_0 - 2a_1) = 0$. On distingue deux solutions donnant chacune un jeu de coefficients différents.

2.2.3.1 Première solution

On a le système suivant :

$$\begin{aligned} a_2 + 2a_1 + 2a_0 &= 1 \\ a_2 - 2a_0 &= \frac{1}{2} \\ a_2 + 2a_0 - 2a_1 &= 0 \end{aligned}$$

On trouve $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{2}$.

2.2.3.2 Deuxième solution

$$\begin{aligned} a_2 + 2a_1 + 2a_0 &= 1 \\ a_2 - 2a_0 &= -\frac{1}{2} \\ a_2 + 2a_0 - 2a_1 &= 0 \end{aligned}$$

On trouve $a_0 = \frac{1}{4}$, $a_1 = \frac{1}{4}$ et $a_2 = 0$.

Une fréquence de coupure à $-3dB$ correspond à trouver la pulsation Ω_c telle que

$$\frac{|H(e^{j\Omega_c})|^2}{|H(e^{j\Omega_{max}})|_{max}^2} = \frac{1}{2}$$

En prenant les coefficients de la première solution, on obtient :

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j2\Omega} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\Omega) \right]$$

On cherche Ω_c vérifiant :

$$0.5 + 0.5 \cos(\Omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On trouve donc $\cos(\Omega) = \sqrt{2} - 1$, soit $\Omega = 65.5^\circ = \frac{2\pi}{5.5}$. On les relations $\frac{\Omega}{T_e} = 2\pi f$, donc :

$$F_c = \frac{F_e}{5.5} = 7273 Hz$$

Il n'existe pas de solution qui respecte le théorème de Shannon en utilisant l'autre jeu de coefficients.

2.2.4 Filtrage Numérique RIF cascade**2.2.5 Cellule élémentaire du premier ordre RII****2.2.6 Cellule du second ordre RII purement récursive**

2.2.7 Étude des bruits de calcul dans les filtres numériques RII

2.2.7.1 Cellule du second ordre

2.2.7.2 Cellule du quatrième ordre sous forme cascade

2.2.7.3 Dynamique d'un filtre du septième ordre

2.3 Synthèse des filtres RII

2.3.1 Filtre passe bas du deuxième ordre

2.3.1.1 Étude par le gabarit

2.3.1.2 Étude directe

2.3.2 Filtre passe haut

2.4 Synthèse des filtres RIF

2.4.1 Méthode du fenêtrage

2.4.2 Méthode de l'échantillonnage fréquentiel

On désire réaliser un filtre dérivateur à Réponse Impulsionnelle Finie ayant une caractéristique en phase linéaire par la méthode de l'échantillonnage fréquentiel sur N points.

On fixe $\Omega_c = \frac{4\pi}{N}$

1. $A(\Omega) = \frac{\Omega}{\Omega_c}$ entre $-\Omega_c$ et Ω_c . La phase $\phi(\Omega)$ est constante entre $-\Omega_c$ et Ω_c et vaut $\pi/2$ (voir figure 2.1).

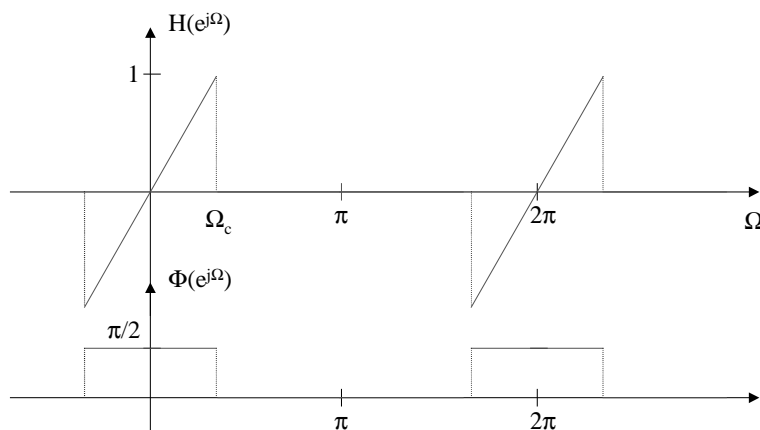


FIGURE 2.1 – Pseudo module et phase du dérivateur

2. Le type de réponse permettant de réaliser au mieux ce filtre RIF à phase linéaire est le type III (réponse impulsionnelle antisymétrique et N impair). Cela implique deux zéros en $\Omega = 0$ et $\Omega = \pi$.
3. On échantillonne le filtre idéal à $\Omega_e = \Omega_c/2$ pour $0 \leq k\Omega_e < 2\pi$.
— La réponse fréquentielle du filtre échantillonné $H_a(k\Omega_e)$ est donnée figure 2.1.

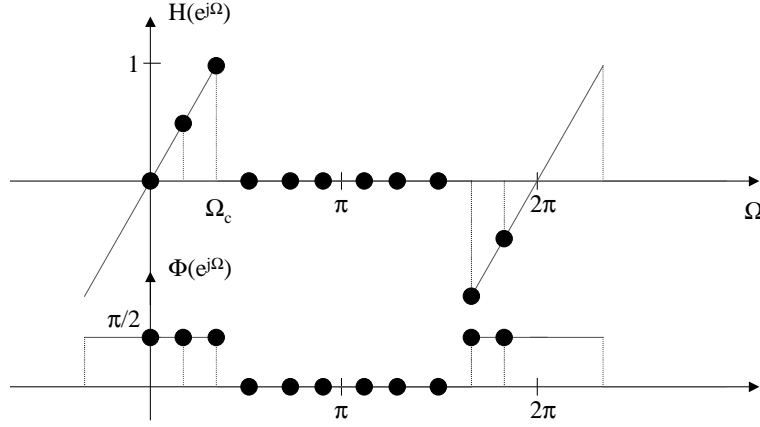


FIGURE 2.2 – Pseudo module et phase du dérivateur échantillonné

— Calcul de $h_a(n)$ pour $n = 0 \dots N - 1$:

$$\begin{aligned}
 h_a(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k\Omega_e) e^{j2\pi k.n/N} \\
 h_a(n) &= j \frac{1}{N} [0.5e^{j2\pi n/N} + e^{j4\pi n/N} - e^{j2\pi(N-2)n/N} - 0.5e^{j2\pi(N-1)n/N}] \\
 h_a(n) &= j \frac{1}{N} [0.5e^{j2\pi n/N} + e^{j4\pi n/N} - e^{-j2\pi 4n/N} - 0.5e^{-j2\pi n/N}] \\
 h_a(n) &= j \frac{1}{N} [j.\sin(2\pi n/N) + j.\sin(4\pi n/N)] \\
 h_a(n) &= -\frac{1}{N} [\sin(2\pi n/N) + \sin(4\pi n/N)]
 \end{aligned}$$

— Pour $N = 7$: $h_a(n) = -\frac{1}{7}[\sin(2\pi n/7) + \sin(4\pi n/7)]$ pour $n = 0 \dots 6$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
h(n)	0	-0.39	-0.0153	0.1614	-0.1614	0.0153	0.39	0

4. Equation aux différences du filtre et fonction de transfert en z :

$$\begin{aligned}
 y(n) &= -0.39x(n-1) - 0.0153x(n-2) + 0.1614x(n-3) \\
 &\quad - 0.1614x(n-4) + 0.0153x(n-5) + 0.39x(n-6) \\
 H_a(z) &= -0.39(z^{-1} - z^{-6}) - 0.0153(z^{-2} - z^{-5}) + 0.1614(z^{-3} - z^{-4})
 \end{aligned}$$

5. On peut également déduire $H_a(z)$ directement de $H_a(k\Omega_e)$ sous forme de cellules du second ordre en parallèle réelles en utilisant la formule vue en cours.

$$\begin{aligned}
 H_a(z) &= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k\Omega_e)}{1 - z^{-1}.e^{\frac{j2\pi k}{N}}} \\
 H_a(z) &= \frac{1 - z^{-N}}{N} \left[\frac{0.5}{1 - z^{-1}.e^{\frac{j2\pi}{N}}} + \frac{1}{1 - z^{-1}.e^{\frac{j4\pi}{N}}} - \frac{1}{1 - z^{-1}.e^{\frac{-j4\pi}{N}}} - \frac{0.5}{1 - z^{-1}.e^{\frac{-j2\pi}{N}}} \right] \\
 H_a(z) &= \frac{1 - z^{-N}}{N} \left[\frac{-z^{-1}\sin(2\pi/N)}{1 - 2\cos(2\pi/N)z^{-1} + z^{-2}} + \frac{-2z^{-1}\sin(4\pi/N)}{1 - 2\cos(4\pi/N)z^{-1} + z^{-2}} \right] \\
 H_a(z) &= (1 - z^{-7}) \left[\frac{-0.11z^{-1}}{1 - 1.247z^{-1} + z^{-2}} + \frac{-0.28z^{-1}}{1 - 0.445z^{-1} + z^{-2}} \right]
 \end{aligned}$$

6. Montrer que les deux versions du 4. et du 5. sont équivalentes : il suffit de réduire au même dénominateur la formule précédente, puis de faire une division polynomiale.
7. Les problèmes sur le filtre (module de $H_a(\Omega)$ très différent d'un dérivateur) viennent de la contrainte sur la phase qui a été implicitement posée. En effet, la spécification impose une phase nulle. D'autre part, on a ici $N = 7$ alors que le centre de symétrie est placé en 3.5, différent du $\alpha = \frac{N-1}{2}$. Il faut donc utiliser un filtre à phase linéaire $h_b(n)$. Pour cela, nous devons décaler $h_a(n)$ de $\alpha = 3$: $h_b(n) = h_a(n - 3)$. Dans ce cas le filtre se comporte beaucoup mieux en fréquence. Ce résultat est illustré dans le TP.

2.5 Transformée de Fourier Discrète et Rapide (TFD et TFR)

2.5.1 TFD bi-dimensionnelle

$$\begin{aligned} X(m, n) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{l=0}^{N-1} x(k, l) e^{-2j \frac{\pi n l}{N}} \right] e^{-2j \frac{\pi m k}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \overrightarrow{X(k)} e^{-2j \frac{\pi m k}{N}} \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{X(k)}$ est le vecteur formé par la TFD de ligne k de l'image composée des pixels $x(k, l)$ avec $l = 0 \dots N - 1$. $X(m, n)$, $m, n = 0 \dots N - 1$ est donc calculé à partir de deux TFD successives sur les lignes puis sur les colonnes (ou inversement).

Complexité : $O(N^2 \log_2 N)$

2.5.2 Transformée de Fourier Glissante

2. $X_{i+1}(n) = [X_i(n) - x(i) + x(i + N)] e^{-2j \frac{\pi n}{N}}$
3. TFR : $3N \log_2 N.Tcycle < Te$
TFD : $2N^2.Tcycle < Te$
TFR glissante : $4N.Tcycle < Te$

2.5.3 Transformée de Fourier en Base 4

2.5.4 Optimisation du calcul de la TFR d'une suite de nombres réels

1. $A = \frac{X(p) + X^*(N-p)}{2}$, $B = \frac{X(p) - X^*(N-p)}{2}$

$$\Re U(p) = \Re A + \Re B \cos \beta + \Im B \sin \beta \quad (2.1)$$

$$\Im U(p) = \Im A + \Im B \cos \beta - \Re B \sin \beta \quad (2.2)$$

$$\beta = \pi p / N \quad (2.3)$$

2. Méthode directe : $4N \log_2(2N) \otimes$ et $6N \log_2(2N) \oplus$.
Méthode optimisée : $2N \log_2(N) + 4N \otimes$, $6N \log_2(N) + 8N \oplus$ et $4N$ divisions par 2.

2.5.5 Optimisation du calcul de la TFR de deux suites de nombres réels

2.5.6 Comparaison TFTD et TFD

On a le signal suivant, avec $u(n)$ l'échelon unité, échantillonné à $T_e = 1$:

$$x(n) = e^{-an} \times u(n)$$

Soit $X_{TFTD}(f)$ la transformée de Fourier à temps discret de $x(n)$, on a :

$$\begin{aligned} X_{TFTD}(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \times u(n) \times e^{-j2\pi n f} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an} \times e^{-j2\pi n f} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-a} \times e^{-j2\pi f})^n \end{aligned}$$

Si $|a| < 1$ la série précédente converge, on obtient alors :

$$X_{TFTD}(f) = \frac{1}{1 - e^{-a} \times e^{-j2\pi f}}$$

Soit $X_{TFD}(k)$ la transformée de Fourier discrète de $x(n)$ pour $n = 0 \dots N - 1$, on a :

$$\begin{aligned} X_{TFD}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \times e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-an} \times e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-a} \times e^{-j2\pi \frac{k}{N}})^n \\ &= \frac{1 - (e^{-a} \times e^{-j2\pi \frac{k}{N}})^N}{1 - e^{-a} \times e^{-j2\pi \frac{k}{N}}} \\ &= \frac{1 - e^{-aN} \times e^{-j\frac{2\pi kN}{N}}}{1 - e^{-a} \times e^{-j2\pi \frac{k}{N}}} \\ &= \frac{1 - e^{-a}}{1 - e^{-aN} \times e^{-j2\pi \frac{k}{N}}} \end{aligned}$$

Dans le calcul de la TFD, la variable fréquence, f , de la transformée de Fourier est échantillonnée pour des valeurs $f_k = k \frac{F_e}{N}$, avec ici $F_e = 1$. On a alors la relation suivante entre $X_{TFD}(k)$ et $X_{TFTD}(f)$:

$$\begin{aligned} X_{TFD}(k) &= \frac{1}{1 - e^{-a} \times e^{-j2\pi \frac{k}{N}}} - \frac{e^{-aN}}{1 - e^{-a} \times e^{-j2\pi \frac{k}{N}}} \\ X_{TFD}(k) &= X_{TFTD}\left(\frac{kF_e}{N}\right) \times [1 - e^{-aN}] \\ X_{TFD}(k) &= X_{TFTD}\left(\frac{kF_e}{N}\right) \times [1 - \varepsilon(N, a)] \end{aligned}$$

La dernière équation du système précédent montre que la TFD de $x(n)$ correspond à l'échantillonnage fréquentiel de la TFTD de ce même signal multiplié par un terme d'erreur. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - \varepsilon(N, a)] = 1$$

On s'arrange pour qu'en pratique on puisse négliger $\varepsilon(N, a)$

2.5.7 TFD par convolution

2.5.8 Calculs de TFD

La Transformée de Fourier discrète d'un signal composé de N échantillons s'écrit :

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2j\frac{\pi kn}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \end{aligned}$$

Avec $x(n)$ le signal d'entrée et $X(k)$ sa transformée, on a la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_N^{0 \times 0} & \dots & W_N^{0 \times (N-1)} \\ \vdots & W_N^{k \times n} & \vdots \\ W_N^{0 \times (N-1)} & \dots & W_N^{(N-1) \times (N-1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

Il faut noter les propriétés de périodicité des racines W , on a :

$$\begin{aligned} W_N^{k(N-n)} &= (W_N^{kn})^* \\ W_N^{kn} &= W_N^{k(n+N)} \end{aligned}$$

On prend maintenant $N = 4$, on obtient alors, après simplification :

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & (W_4^1)^* \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^2 \\ 1 & (W_4^1)^* & W_4^2 & W_4^1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & j \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{pmatrix}$$

Soit le signal $h(n)$ de durée finie, $N = 4$, pour trouver $H(k)$ il suffit d'une TFD sur 4 points, en utilisant la relation matricielle précédente, on a :

$$\begin{pmatrix} H(0) \\ H(1) \\ H(2) \\ H(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & j \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5}(1-j) \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5}(1+j) \end{pmatrix}$$

$x(n)$ est un signal périodique de période $N = 4$, pour trouver $X(k)$, pour $k = 0 \dots 3$ il suffit d'une TFD sur 4 points :

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & j \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5}(1-j) \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5}(1+j) \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned} H(k) &= \frac{1}{10} + \frac{2}{10}(-j)^k + \frac{3}{10}(-1)^k + \frac{4}{10}(j)^k \\ X(k) &= -e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\pi k} + e^{j\frac{3\pi k}{2}} \\ &= e^{-j\pi k}(2 + 2\cos(\frac{\pi k}{2})) \end{aligned}$$

Comme $h(n)$ est à durée limitée on a $H_{TFD}(k) = H_{TFD}(e^{j\frac{2\pi k}{N}})$. Sa transformée de Fourier discrète correspond à un échantillonnage de sa transformée de Fourier. Comme $x(n)$ est périodique sa TFD est exactement sa TF.

Si on écrit $y(n)$ résultat du filtrage de $x(n)$ par $h(n)$, on a :

$$y(n) = \sum_{i=0}^n h(i)x(n-i) = \sum_{i=0}^n x(i)h(n-i)$$

On constate que le schéma périodique temporel de $y(n)$ est de longueur 7 et non 4!. On a donc $Y(k) \neq X(k) \times H(k)$! Pour obtenir $Y(k)$ il faut compléter par des zéros les signaux $h(n)$ et une période de $x(n)$ pour traiter le support $n = 0, \dots, 6$. Il est ensuite possible d'appliquer le produit des TFD.

2.6 Analyse spectrale

2.6.1 Questions

1. $10kHz/1024 = 9.765Hz$. Attention, cette valeur est différente de la finesse en fréquence.
2. Une bande de 0 à $10kHz$ implique $f_e \geq 20kHz$.
Atténuation $> 40dB \implies$ Fenêtre de Hamming (ou Blackman).
Hamming : $\Delta\Omega = 8\pi/N \implies N \geq 4f_e/1Hz = 80.000 \implies N = 2^{17}$
 $T_{calcul} = (N + 3N\log_2 N + 2N).T_{cycle} < 1/25 \implies T_{cycle} = 25ns$

2.6.2 Analyse spectrale d'un signal sinusoïdal

2.6.3 Analyse spectrale d'un signal

A vérifier sous Matlab ou Scilab.

2.7 Convolution

2.7.1 Calcul d'une convolution

$$y(n) = \frac{b^{n+1} [1 - (a/b)^{n+1}]}{b - a} u(n)$$

2.7.2 Complexité de calcul d'une convolution

Voir le TP de TNS.

2.8 Interpolation et décimation

2.8.1 Interpolation linéaire

$$x(k + 1/2) = [x(k) + x(k + 1)]/2$$

1. Avec $x(0) = x(N) = 0$:

$$Y(p) = X(p)[1 + \cos(\pi p/N)], \quad 0 \leq p \leq N - 1 \quad (2.4)$$

$$Y(p) = X(p)[1 - \cos(\pi p/N)], \quad N \leq p \leq 2N - 1 \quad (2.5)$$

2. On fait une TFR, puis on recombine la sortie pour obtenir $Y(p)$.

Méthode directe : $N \otimes, N \oplus$

Méthode TFR : $N \log_2(N)/2 + N/2 \otimes \mathbb{C}, N \log_2(N) + N \oplus \mathbb{C}$

2.8.2 Suréchantillonnage

1. Il s'agit du même signal mais échantillonné à une fréquence f'_e différente. En fait, ajouter des zéros puis filtrer revient à suréchantillonner.
2. M multiple de N .

Chapitre 3

Problèmes

3.1 Etude des filtres CIC

L'implantation matérielle des multiplieurs demande un nombre de d'éléments logiques important. Dans les systèmes à décimation à très hautes fréquences d'échantillonnage, le besoin de filtres longs avec des multiplieurs de plus en plus rapides devient un sérieux problème. Les filtres d'Hogenuer ou filtres CIC (pour Cascaded Integrator-Comb) dont un exemple est donné par la figure 3.1 constituent une alternative intéressante dont l'implantation matérielle nécessite seulement des additions et des retards.

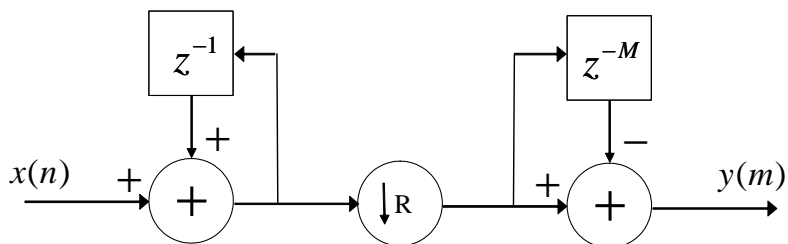


FIGURE 3.1 – Filtre CIC décimateur à 1 étage

3.1.1 Intégrateur

La première partie d'un filtre CIC est constituée d'un intégrateur (figure 3.2).

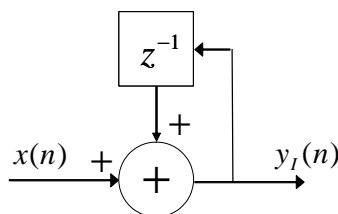


FIGURE 3.2 – Filtre intégrateur

1. Donner l'équation aux différences finies de ce filtre intégrateur.
2. Donner sa fonction de transfert $H_I(z)$.

3.1.2 Filtre en peigne

L'autre partie est constituée par un le filtre représenté sur la figure 3.3.

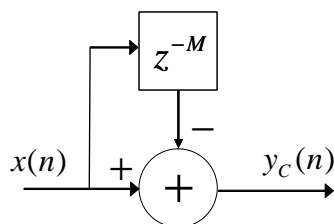


FIGURE 3.3 – Filtre peigne

1. Donner l'équation aux différences finies de ce filtre.
2. Donner sa fonction de transfert $H_C(z)$.
3. Calculer la réponse fréquentielle $H_C(e^{j\Omega})$. Déterminer son module et sa phase.
4. En prenant $M = 4$, donner les valeurs du module en $\Omega = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.
5. Tracer approximativement ce module et expliquer pourquoi ce filtre est appelé filtre en peigne.

3.1.3 Mise en cascade

Ces deux filtres sont mis en cascade selon le schéma de la figure 3.1. La décimation d'un facteur R entre les 2 filtres est prise en compte en considérant la fonction de transfert $H_C(z^R)$ au lieu de $H_C(z)$.

1. Donner la fonction de transfert $H_{CIC}(z)$ du filtre résultant et montrer qu'il est équivalent à un filtre à Réponse Impulsionnelle Finie.
2. Calculer sa réponse fréquentielle en posant $z = e^{j\frac{\Omega}{R}}$ et montrer que son module peut s'écrire sous la forme $|H_{CIC}(\Omega)| = \left| \frac{\sin \frac{M\Omega}{2}}{\sin \frac{\Omega}{2R}} \right|$
3. Donner plusieurs raisons pour placer la partie en peigne après la décimation plutôt que d'utiliser simplement le système décimateur représenté sur la figure 3.4.

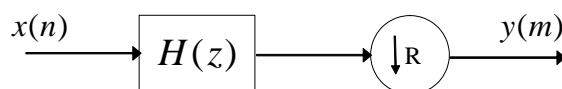


FIGURE 3.4 – Système décimateur équivalent

3.1.4 Association de plusieurs étages

Considérons maintenant l'association de plusieurs étages CIC telle que la présente la figure 3.5 pour 3 étages. On pose par ailleurs $M=2$ et $R=2$.

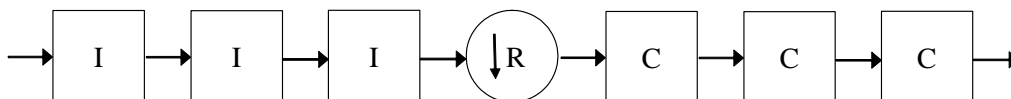


FIGURE 3.5 – Filtre CIC décimateur à 3 étages

1. Donner la fonction de transfert $H_{CIC3}(z)$ du filtre résultant. Que peut-on dire de sa phase ?
2. Représenter sa réponse impulsionnelle.

3.2 Etude d'un système DTMF

L'objectif de cette partie est d'étudier différentes solutions pour la réalisation d'un système DTMF. Les codes DTMF (Dual-tone multi-frequency) correspondent à des combinaisons de fréquences utilisées pour coder les touches du clavier d'un téléphone. Ces codes ont permis la création de services vocaux. Chaque touche d'un téléphone est associée à un couple de deux fréquences audibles générées simultanément telle que représentée à la figure 3.6.a.

Au niveau du récepteur, le signal reçu est analysé afin de détecter le couple de fréquences utilisé. Le synoptique d'un récepteur DTMF est détaillé à la figure 3.6.b. Nous nous intéressons plus particulièrement à la partie de détection des composantes associées aux fréquences f_1, f_2, f_3 et f_4 . La fréquence d'échantillonnage F_e est de 8 KHz et les valeurs des fréquences sont les suivantes :

$$f_1 = \frac{21}{256} \cdot F_e \quad f_2 = \frac{24}{256} \cdot F_e \quad f_3 = \frac{27}{256} \cdot F_e \quad f_4 = \frac{30}{256} \cdot F_e \quad (3.1)$$

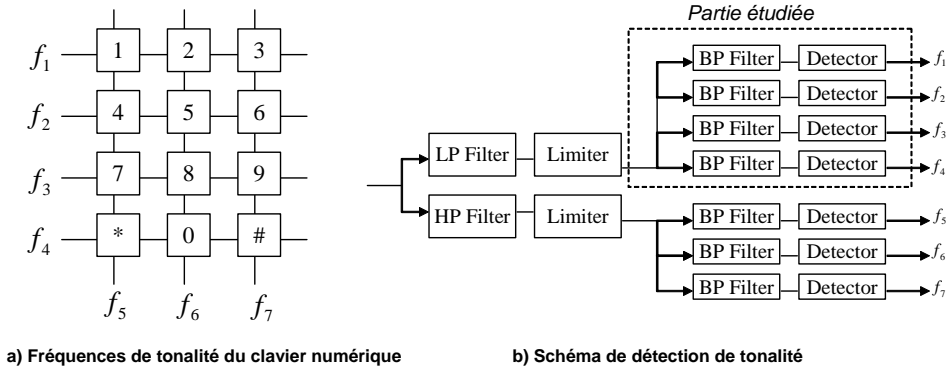


FIGURE 3.6 – Synoptique d'un système DTMF

3.2.1 Solution à base d'un filtre RIF

Pour détecter la composante associée à la fréquence f_i , un filtre RIF passe-bande centré sur la fréquence f_i et de bande passante $2.f_c$ est mis en œuvre. La bande passante $2.f_c$ est égale à $\frac{F_e}{256}$. Les spécifications du filtre idéal utilisé pour la synthèse des filtres RIF et exprimées en pulsations normalisées sont les suivantes :

$$H_1(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \Omega_1 - \Omega_c \leq |\Omega| \leq \Omega_1 + \Omega_c \\ 0 & \text{pour } 0 < |\Omega| < \Omega_1 - \Omega_c \text{ et } \Omega_1 + \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

1. Dessiner le module sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour le filtre passe bande idéal H_1 . Vous donnerez les valeurs numériques des différentes pulsations normalisées utilisées.
2. Calculer l'expression de la réponse impulsionnelle $h_1(n)$ du filtre RIF H_1 .
3. Déterminer la longueur N_{RIF} du filtre RIF H_1 et le type de fenêtre nécessaire pour respecter le gabarit du filtre présenté à la figure 3.7.
4. Donner la complexité **en nombre d'opérations par seconde** pour les multiplications et les additions.

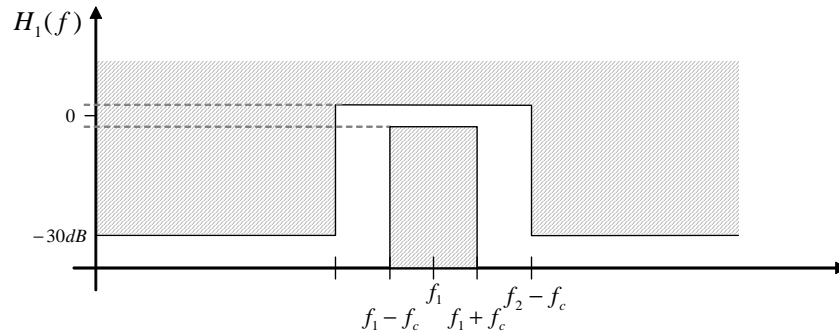


FIGURE 3.7 – Gabarit du filtre FIR

3.2.2 Solution à base d'une transformée de Fourier

L'objectif du système DTMF est de détecter la présence d'un signal à une fréquence f_i . Une approche possible pour réaliser cette détection est d'analyser le signal x dans le domaine fréquentiel à travers une transformée de Fourier discrète et ensuite de comparer les amplitudes des composantes aux fréquences f_i .

Nous considérons que la fréquence du signal d'entrée est exactement égale à une des fréquence f_i . La transformée de Fourier discrète du signal d'entrée x est réalisée sur des vecteurs de taille N_{TFD} égale à 256. Le résultat de cette transformée correspond au vecteur X .

1. Donner le schéma de principe du système permettant de détecter les fréquences f_1, f_2, f_3 et f_4 . Vous donnerez l'indice exact des échantillons du vecteur X utilisés.
2. Donner la valeur minimale du nombre de point de la transformée de Fourier N_{TFD} permettant de déterminer exactement l'amplitude des composantes f_1, f_2, f_3 et f_4 . Quel phénomène pouvons-nous observer si le nombre de points est inférieur à cette valeur minimale.

Dans un premier temps, la transformée de Fourier discrète est réalisée à l'aide d'un algorithme rapide correspondant à la FFT.

3. Donner la complexité en **nombre d'opérations par seconde** pour les multiplications et les additions.

Dans un second temps, la transformée de Fourier est réalisée à l'aide d'un algorithme de TFD classique. L'ensemble des échantillons du vecteur de sortie n'étant pas exploité, la complexité du système peut être fortement réduite dans ce cas.

4. Donner la complexité de ce système basé sur la TFD en prenant en compte la réduction de complexité. Ce système doit permettre de détecter les quatre composantes f_1, f_2, f_3 et f_4 .
5. Donner l'expression utilisée pour traiter la composante à la fréquence f_1 . En déduire une implantation à base de filtres permettant de réaliser ce système.

3.2.3 Solution à base d'un filtre RII

Des filtres de type RII ont été proposés pour réaliser la détection DTMF.

3.2.3.1 Etude du filtre

Nous considérons un filtre RII dont le graphe flot de signal est présenté à la figure 3.8. L'expression de la sortie $y(n)$ est présentée à l'équation 3.2.

$$y(n) = x(n) + b_1.x(n-1) - a_1.y(n-1) - a_2.y(n-2) \quad (3.2)$$

avec

- $b_1 = -\beta.\cos(\Omega_1) = -0.509$
- $a_1 = -2.\beta.\cos(\Omega_1) = -1.0179$
- $a_2 = \beta^2 = 0.98$

Le terme β est très proche de 1. Les valeurs des coefficients ont été obtenues pour $\beta = 0.99$.

1. Déterminer la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle de ce filtre RII.
2. Déterminer le module des pôles de ce filtre RII et conclure sur la stabilité.
3. Quel est le type de filtre réalisé et quel est son rôle dans le cadre d'un système DTMF. Vous pouvez calculer $H(e^{j\Omega_1})$ **si nécessaire** en considérant β égal à 1.
4. Donner la complexité en nombre d'opérations par seconde pour les multiplications et les additions.

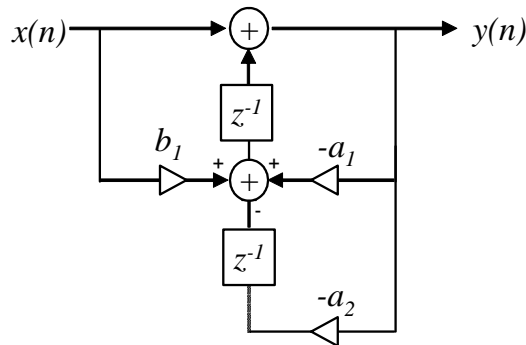


FIGURE 3.8 – Graphe flot de signal du filtre RII

3.2.3.2 Etude de l'implantation virgule fixe

Nous considérons que l'entrée $x(n)$ est comprise dans l'intervalle $] -1, 1[$.

Nous utilisons un processeur DSP dont les caractéristiques sont les suivantes :

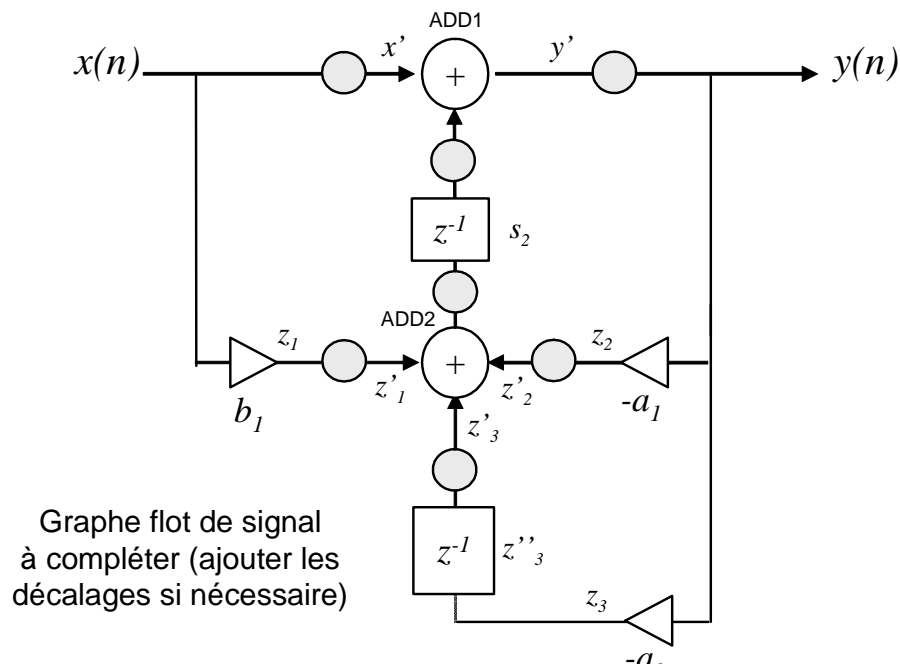
- les données en entrée du multiplieur sont codées sur 16 bits et les données en sortie du multiplieur sur 32 bits ;
- les données en entrée et en sortie de l'additionneur sont codées sur 32 bits ;
- les données sont stockées en mémoire sur 16 bits ;
- le bit de signe redondant issu de la multiplication n'est pas automatiquement éliminé ;

— la loi de quantification utilisée est l'arrondi.

L'étude de la dynamique montre que 7 bits sont nécessaires pour coder le résultat de la sortie de l'additionneur ADD2 et 6 bits sont nécessaires pour coder la sortie de l'additionneur ADD1. L'étude du format des données pour les deux additionneurs doit être faite séparément

1. Déterminer le codage (partie entière et partie fractionnaire) des coefficients et des différentes données. *Vous complétez directement le formulaire mis à votre disposition en annexe.*
2. Nous considérons **uniquement** les sources de bruit liées au renvoi de données en mémoire (32 → 16 bits). Déterminer ces sources de bruit et en déduire l'expression de la puissance du bruit de quantification en sortie du système.

3.2.4 Formulaire



Position de la virgule (donner la formule) :

— $m_x =$, $m_y =$, $m_{s_2} =$

— $m_{z_1} =$

— $m_{z_2} =$

— $m_{z_3} =$

— $m_{ADD_2} =$

— $m_{ADD_1} =$

Format des données :

- $x : (\quad , \quad , \quad)$ $x' : (\quad , \quad , \quad)$
- $y : (\quad , \quad , \quad)$ $y' : (\quad , \quad , \quad)$
- $z_1 : (\quad , \quad , \quad)$ $z'_1 : (\quad , \quad , \quad)$
- $z_2 : (\quad , \quad , \quad)$ $z'_2 : (\quad , \quad , \quad)$
- $z_3 : (\quad , \quad , \quad)$ $z'_3 : (\quad , \quad , \quad)$ $z''_3 : (\quad , \quad , \quad)$
- $ADD_1 : (\quad , \quad , \quad)$
- $ADD_2 : (\quad , \quad , \quad)$
- $s_2 : (\quad , \quad , \quad)$

3.3 Synthèse de filtres numériques

L'objectif de ce problème est la réalisation d'un filtre numérique passe-haut dont les caractéristiques sont : ondulation en bande passante $\delta_1 = 3dB$, atténuation $\delta_2 = 40dB$, fréquence de coupure à $-3dB$ $f_c = 6kHz$, fréquence en bande atténuée $f_a = 2kHz$, fréquence d'échantillonnage $f_e = 36kHz$.

3.3.1 Synthèse de filtre RIF à phase linéaire par fenêtrage

1. On considérera pour cette synthèse un filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure f_c . Après avoir tracé de manière précise le filtre idéal $H(e^{j\Omega})$, calculez sa réponse impulsionnelle $h(n)$. Pour ne pas vous trompez, il vous faudra calculer $h(0)$ de manière isolée. Donnez les valeurs de $h(n)$ pour $n = [-4 \dots +4]$.
2. En fonction de l'atténuation et de la sélectivité, quel type de fenêtre faut-il utiliser, et quelle est la longueur N d'un filtre RIF dont la phase serait linéaire ?
3. Exprimez $h_a(n)$, le filtre RIF à phase linéaire correspondant aux contraintes précédentes, en fonction de $h(n)$.
4. Tracez sa réponse impulsionnelle dans le cas où $N = 9$. Tracez approximativement $|H(e^{j\Omega})|$.

3.3.2 Synthèse de filtre RII par la méthode bilinéaire

1. Après avoir tracé le gabarit du filtre numérique, donnez les gabarits analogique et passe-bas normalisé correspondants. La méthode utilisée est la transformation bilinéaire.
2. En déduire l'ordre et la fonction du filtre de Butterworth normalisé $H_n(p)$.
3. Expliquez, sans les calculer, la méthode de dénormalisation vers le filtre passe-haut $H(p)$, et la méthode permettant la fonction de transfert $H_{bi}(z)$ du filtre numérique entrant dans le gabarit numérique de départ.
4. Tracez approximativement $|H(e^{j\Omega})|$ sur même le graphique que précédemment en faisant apparaître le gabarit.

3.4 Etude d'un filtre en treillis

Nous considérons le filtre en treillis dont l'entrée est $x(n)$ et la sortie $y(n)$. Le graphe flot de signal de celui-ci est présenté à la figure 3.9. Les valeurs des coefficients sont les suivantes :

$$K_1 = 0.9116 \quad K_2 = 0.9 \quad (3.3)$$

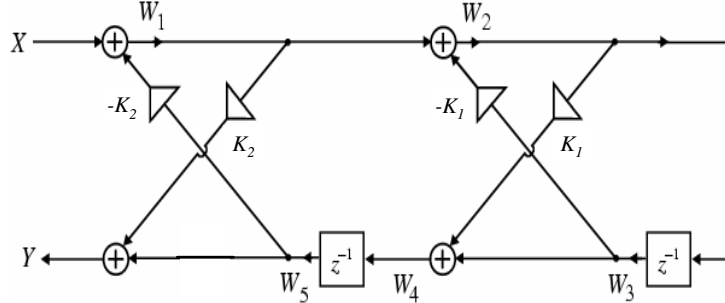


FIGURE 3.9 – Graphe flot de signal du filtre en treillis

3.4.1 Détermination de la fonction de transfert

1. Nous souhaitons déterminer les fonctions de transfert $H_{Y,X}(z)$ entre la sortie y et l'entrée x et $H_{W_2,X}(z)$ entre la variable intermédiaire w_2 et l'entrée x :
 - Donner les expressions des variables $w_1(n)$, $w_2(n)$, $w_3(n)$, $w_4(n)$, $w_5(n)$ et $y(n)$.
 - Déterminer l'expression de $w_2(n)$ en fonction de $x(n)$ et des versions précédentes de $w_2(n)$. En déduire la fonction de transfert entre $W_2(z)$ et $Y(z)$.
 - Déterminer l'expression de $y(n)$ en fonction de w_2 . En déduire la fonction de transfert entre $Y(z)$ et $W_2(z)$.
 - En déduire la fonction de transfert $H(z)$ entre $Y(z)$ et $X(z)$
2. Analyser la stabilité de ce filtre.

3.4.2 Complexité et développement du code C

1. Déterminer la complexité du filtre en nombre d'opérations et en nombre d'éléments mémoires.
2. Écrire le code C de la routine permettant de calculer la sortie du filtre $y(n)$. Cette routine possède comme argument d'entrée l'échantillon $x(n)$ et elle retourne la valeur de la sortie du filtre $y(n)$. Le type utilisé pour les différentes données est `float`

3.4.3 Implantation en virgule fixe

Nous considérons que l'entrée $x(n)$ est comprise dans l'intervalle $]-1, 1[$ et que ce signal est entaché d'un bruit de quantification.

Nous utilisons un processeur DSP dont les caractéristiques sont les suivantes :

- les données en entrée du multiplieur sont codées sur 16 bits et les données en sortie du multiplieur sur 32 bits ;
- les données en entrée et en sortie de l'additionneur sont codées sur 32 bits ;
- les données sont stockées en mémoire sur 16 bits ;
- le bit de signe redondant issu de la multiplication n'est pas automatiquement éliminé ;
- la loi de quantification utilisée est l'arrondi.

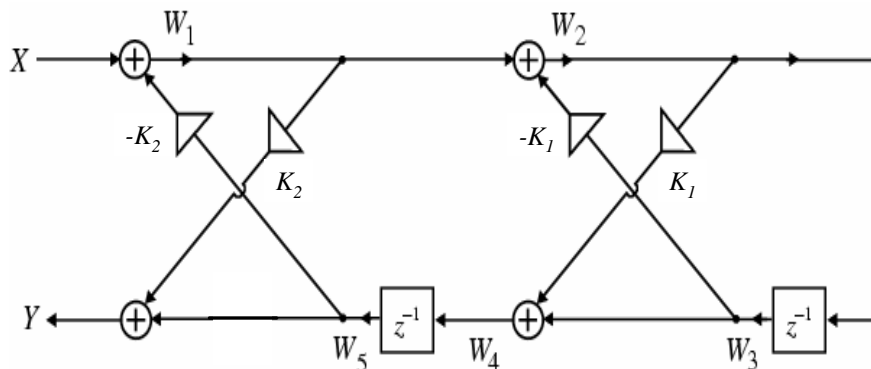
1. Nous devons calculer la dynamique des variables w_1, w_2, w_4 et y à l'aide de la norme L1. Pour ces quatre variables, donner l'expression permettant de calculer la dynamique et la valeur numérique obtenue à l'aide de la table 3.1.
2. Déterminer le codage des données et des coefficients (position de la virgule et largeur des données) et les différentes opérations de recadrage nécessaires à l'obtention d'une spécification en virgule fixe correcte. Nous considérons que les variables x, w_i et y sont stockées en mémoire sur 16 bits. Vous devez compléter le formulaire présent en annexe.
3. Après avoir identifié les différentes sources de bruit, vous déterminerez l'expression et la valeur numérique de la puissance de chaque source de bruit. Déterminer l'expression de la puissance du bruit en sortie du filtre en fonction des différentes réponses impulsionnelles concernées. Vous calculerez la valeur numérique à l'aide de la table 3.1.

$H_{S.E}$	G_1	G_2
$H_{W_1.X}$	12.6442	5.2642
$H_{Y.W_1}$	3.8333	1.8317
$H_{W_2.X}$	30.0853	29.2269
$H_{Y.W_2}$	3.6436	4.8310
$H_{W_4.X}$	12.9209	5.2642
$H_{Y.W_4}$	0.1900	0.0361
$H_{Y.X}$	3.2317	1.0007

avec $H_{S.E}(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$ $G_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |h(i)|$ $G_2 = \sum_{i=0}^{\infty} |h(i)|^2$

TABLE 3.1 – Paramètres des différentes fonctions de transfert

3.4.4 Formulaire



Position de la virgule (donner la formule) :

- Variables :
- $m_x =$

- $m_{w_1} =$
- $m_{w_2} =$
- $m_{w_4} =$
- $m_y =$
- Sorties des multiplications :
 - $m_{z_1} =$
 - $m_{z_2} =$
 - $m_{z_3} =$
 - $m_{z_5} =$
- Additions :
 - $m_{ADD_1} =$
 - $m_{ADD_2} =$
 - $m_{ADD_3} =$
 - $m_{ADD_4} =$

Format des données :

- $x : (\quad , \quad , \quad)$
- $ADD_1 : (\quad , \quad , \quad)$
- $w_1 : (\quad , \quad , \quad)$
- $ADD_2 : (\quad , \quad , \quad)$
- $w_2 : (\quad , \quad , \quad)$
- $w_3 : (\quad , \quad , \quad)$
- $ADD_3 : (\quad , \quad , \quad)$
- $w_4 : (\quad , \quad , \quad)$
- $w_5 : (\quad , \quad , \quad)$
- $y : (\quad , \quad , \quad)$

ENSSAT EII2
DS Traitement Numérique du Signal
Tous documents autorisés
Lundi 13 janvier 2014

1 Problème 1 : Synthèse de filtres numériques (8 points)

L'objectif de ce problème est la réalisation d'un filtre numérique passe-haut dont les caractéristiques sont : ondulation en bande passante $\delta_1 = 3dB$, atténuation $\delta_2 = 40dB$, fréquence de coupure à $-3dB$ $f_c = 6kHz$, fréquence en bande atténuée $f_a = 2kHz$, fréquence d'échantillonnage $f_e = 36kHz$.

1.1 Synthèse de filtre RIF à phase linéaire par fenêtrage (5 points)

1. On considérera pour cette synthèse un filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure f_c . Après avoir tracé de manière précise le filtre idéal $H(e^{j\Omega})$, calculez sa réponse impulsionnelle $h(n)$. Pour ne pas vous trompez, il vous faudra calculer $h(0)$ de manière isolée. Donnez les valeurs de $h(n)$ pour $n = [-4 \dots +4]$.
2. En fonction de l'atténuation et de la sélectivité, quel type de fenêtre faut-il utiliser, et quelle est la longueur N d'un filtre RIF dont la phase serait linéaire ?
3. Exprimez $h_a(n)$, le filtre RIF à phase linéaire correspondant aux contraintes précédentes, en fonction de $h(n)$.
4. Tracez sa réponse impulsionnelle dans le cas où $N = 9$. Tracez approximativement $|H_a(e^{j\Omega})|$.

1.2 Synthèse de filtre RII par la méthode bilinéaire (3 points)

1. Après avoir tracé le gabarit du filtre numérique, donnez les gabarits analogique et passe bas normalisé correspondants. La méthode utilisé est la transformation bilinéaire.
2. En déduire l'ordre et la fonction du filtre de Butterworth normalisé $H_n(p)$.
3. Expliquez, sans les calculer, la méthode de dénormalisation vers le filtre passe-haut $H(p)$, et la méthode permettant d'obtenir la fonction de transfert $H_{bi}(z)$ du filtre numérique entrant dans le gabarit numérique de départ.
4. Tracez approximativement $|H(e^{j\Omega})|$ sur même le graphique que précédemment en faisant apparaître le gabarit.

2 Implantation d'un filtre FIR (7 pts)

Le processeur utilisé est un DSP possédant les caractéristiques suivantes :

- le processeur peut exécuter soit une multiplication, soit une addition, soit une multiplication/addition en un cycle d'horloge de 5ns (200MHz) ;
- les calculs sont réalisés en double précision ;
- les données en entrée du multiplieur sont codées sur 16 bits et la sortie sur 32 bits ;

- les données en entrée et en sortie de l'additionneur sont codées sur 32 bits ;
- les données sont stockées en mémoire sur 16 bits.

Analyse du filtre RIF Nous considérons un filtre RIF de longueur $N = 8$ dont l'équation aux différences est la suivante et dont le graphe flot de signal est présenté à la figure 1.

$$y(n) = \sum_{i=0}^3 b_i \cdot [x(n-i) - x(n-7+i)] \quad (1)$$

avec

$$b_0 = 0.2, \quad b_1 = 0.3, \quad b_2 = -0.4, \quad b_3 = -0.49 \quad (2)$$

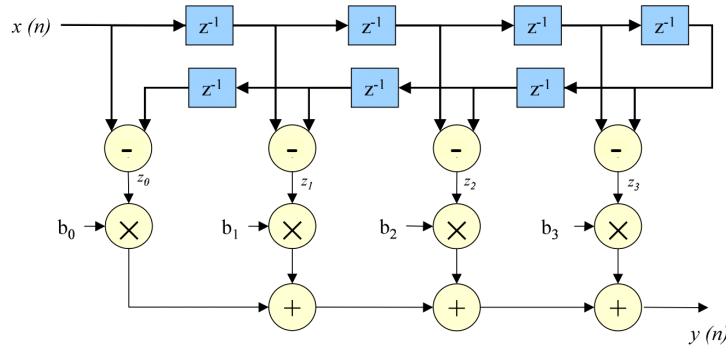


FIGURE 1 – Synoptique du filtre RIF

- Pour le filtre défini ci-dessus
 - Déterminez l'expression de la réponse impulsionnelle $h(n)$ et tracer celle-ci.
 - Déterminez le type (I, II, III ou IV) de ce filtre RIF.
 - Déterminez l'expression de la fonction de transfert $H(z)$.
- Déterminez l'expression de la réponse fréquentielle $H(e^{j\Omega})$ et calculez le module de celle-ci. Calculez la valeur de $|H(e^{j\Omega})|$ pour Ω égal à $0, \pi/2, \pi$. En déduire la nature du filtre.

Implantation du filtre RIF

- L'entrée $x(n)$ est comprise dans l'intervalle $] -1, 1[$.
Déterminez la dynamique de la sortie du filtre y , à l'aide de la norme L1.
Déterminez la dynamique de la donnée z_i correspondant à la sortie de la soustraction $x(n-i) - x(n-7+i)$ en se plaçant dans le pire cas.
- Déterminez le codage des coefficients et donnez la valeur de l'entier sur 16 bits utilisé pour le codage.
- Déterminez le codage des données et des coefficients (position de la virgule et largeur des données) et les différentes opérations de recadrage nécessaires à l'obtention d'une spécification en virgule fixe correcte.
- Nous considérons que le signal d'entrée est entaché d'un bruit de quantification dû à un échantillonnage sur 12 bits. Après avoir identifié les différentes sources de bruit, vous déterminerez l'expression et la valeur numérique de la puissance de chaque source de bruit. Déterminez l'expression de la puissance du bruit en sortie du filtre en fonction des coefficients du filtre.
- Déterminez le nombre de cycles minimums nécessaires pour l'exécution de ce filtre. En déduire la fréquence maximale que pourrait supporter ce processeur.

3 Analyse Spectrale dans un radar Doppler (5 pts)

Un radar Doppler voit plusieurs avions et on admettra que le signal qu'il reçoit est composé de plusieurs sinusoides (une par avion). Celui-ci est ramené en bande de base à l'aide de son enveloppe complexe qui est constituée d'une somme d'exponentielles complexes dont les fréquences sont proportionnelles à la vitesse des avions. Les fréquences de ces exponentielles sont supposées séparées d'au moins 200Hz. Le rapport de leur amplitude est au maximum de 50. La fréquence d'échantillonnage est de 5 kHz. On souhaite une précision de 25 Hz sur l'estimation des sinusoides. Pour classer les signaux reçus par un radar suivant leur fréquence (i.e. la vitesse), une analyse spectrale est réalisée à partir d'un échantillon de N valeurs $x(k)$ de l'enveloppe complexe du signal reçu. L'analyse est effectuée à l'aide d'une TFD modifiée de la forme suivante :

$$X(n) = c \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot h(k) e^{-\frac{2j\pi kn}{L}} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq L-1$$

où $h(k)$ est une fenêtre de pondération de longueur N et L le nombre de points de calcul de la TFD avec $L \geq N$. On ajoutera donc $L - N$ zéros aux N valeurs de $x(k)$. Le paramètre c est un facteur d'échelle permettant de calibrer l'échantillon fréquentiel $X(n)$ à 1 lorsque le signal reçu $x(k)$ tombe sur une raie de la TFD.

1. Déterminez le type de fenêtre et le nombre de points N nécessaires aux respects des contraintes, c'est à dire pouvoir distinguer deux raies spectrales du signal $x(k)$.
2. Expliquez à quoi sert d'effectuer la TFD sur L points. En déduire la valeur de L nécessaire.
3. Dans le cas où le signal reçu est une composante de fréquence f_0 , c'est à dire que $x(k) = e^{\frac{2j\pi k f_0}{F_e}}$, tombant sur une raie de la TFD d'indice n_0 , on veut que le calcul de $X(n_0)$ soit normalisé à 1. En déduire, après avoir calculé $X(n_0)$ dans ce cas, la valeur du facteur d'échelle c .

1 Synthèse d'un filtre réjecteur-de-bande (xx/9 pts)

- On souhaite réaliser un filtre réjecteur de bande RIF à phase linéaire, de fréquences de coupure $\Omega_1 = \Omega_0 - \Omega_c$ et $\Omega_2 = \Omega_0 + \Omega_c$. On prendra $\Omega_0 = \pi/4$ et $\Omega_c = \pi/8$. Représenter l'amplitude et la phase de $H(e^{j\Omega})$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
- Prévoir le type de la réponse impulsionnelle ainsi que la parité de sa longueur N .
- Donner l'expression des coefficients $h(n)$ de la réponse impulsionnelle du filtre idéal.
- On souhaite transformer $h(n)$ en un filtre causal à phase linéaire, de longueur finie N la plus petite possible, respectant le gabarit ci-dessous figure 1. Comment s'y prendre ? Quelle valeur de N choisir ?

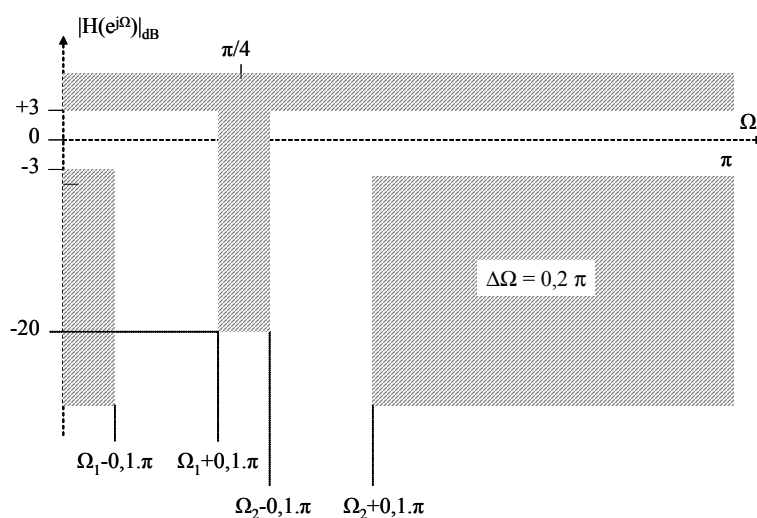


FIGURE 1 – Gabarit du filtre réjecteur de bande

- On cherche maintenant à réaliser un filtre RII respectant ce gabarit, tel que la phase reste proche de la linéarité. Quel type de filtre choisir ?
- Ce filtre RII est synthétisé par la méthode de la transformation bilinéaire. La fréquence d'échantillonnage est fixée à $8kHz$. On veut bien sûr que ce filtre numérique entre dans le gabarit de la figure 1.
 - Dessiner le gabarit analogique équivalent.
 - En déduire le gabarit du prototype passe-bas.
 - Déterminer l'ordre et donner la fonction de transfert normalisée $H_N(p)$.
 - Exprimer la fonction de transfert $H(p)$ du filtre analogique équivalent en fonction de la largeur de bande analogique B et de la pulsation centrale analogique ω_{centr} .

7. Soit $H(z)$ la fonction de transfert du filtre numérique obtenu par transformation bilinéaire à partir de $H(p)$. Sans faire de calcul, pouvez-vous dire si le filtre RII ainsi obtenu sera plus intéressant que la réalisation RIF précédente, en terme de complexité ?

2 Implantation d'un système en virgule fixe (xx/7 pts)

Le processeur utilisé est un DSP de type TMS320C54. Les différentes caractéristiques de ce processeur sont les suivantes :

- les données en entrée du multiplieur sont codées sur 16 bits et la sortie sur 32 bits ;
- les données en entrée et en sortie de l'additionneur sont codées sur 32 bits ;
- les données sont stockées en mémoire sur 16 bits.

Nous considérons un système H dont l'entrée est $x(n)$ et la sortie $y(n)$. Les équations régissant le système sont les suivantes

$$\begin{aligned} y(n) &= c_0 y_1(n) + c_1 y_1(n-1) \\ y_1(n) &= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) \end{aligned}$$

avec

$$b_0 = 1/3, \quad b_1 = 2/3, \quad b_2 = 1/3, \quad c_0 = 1/3, \quad c_1 = 2/3$$

1. Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ du système et en déduire la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système.
2. Déterminez le Graphe Flot de Signal de ce système.
3. Nous considérons que l'entrée $x(n)$ est comprise dans l'intervalle $] -1, 1[$. Déterminez la dynamique des sorties y_1 et y , à l'aide de la norme L1.
4. Déterminez le codage des données et des coefficients (position de la virgule et largeur des données) et les différentes opérations de recadrage nécessaires à l'obtention d'une spécification en virgule fixe correcte.
5. Nous considérons que le signal d'entrée est entaché d'un bruit de quantification. Après avoir identifié les différentes sources de bruit, vous déterminerez l'expression de la puissance du bruit en sortie du système.

3 Analyse de filtres (xx/4 pts)

Nous considérons quatre filtres H_A, H_B, H_C et H_D purement récursifs. Nous avons pour ces quatre filtres déterminé les poles dont les valeurs sont les suivantes :

- $p_1 = -0.8660 + 0.3873j$ et $p_1^* = -0.8660 - 0.3873j$;
- $p_2 = 0.7071j$ et $p_2^* = -0.7071j$;
- $p_3 = 0.5$;
- $p_4 = 0.8660 + 0.5000j$ et $p_4^* = 0.8660 - 0.5000j$.

Nous avons déterminé pour chaque filtre, soit la réponse impulsionnelle soit la réponse fréquentielle. Celles-ci sont représentées à la figure 2.

1. Vous devez associer à chaque filtre H , les poles p_i correspondant. Vous justifierez obligatoirement votre réponse.

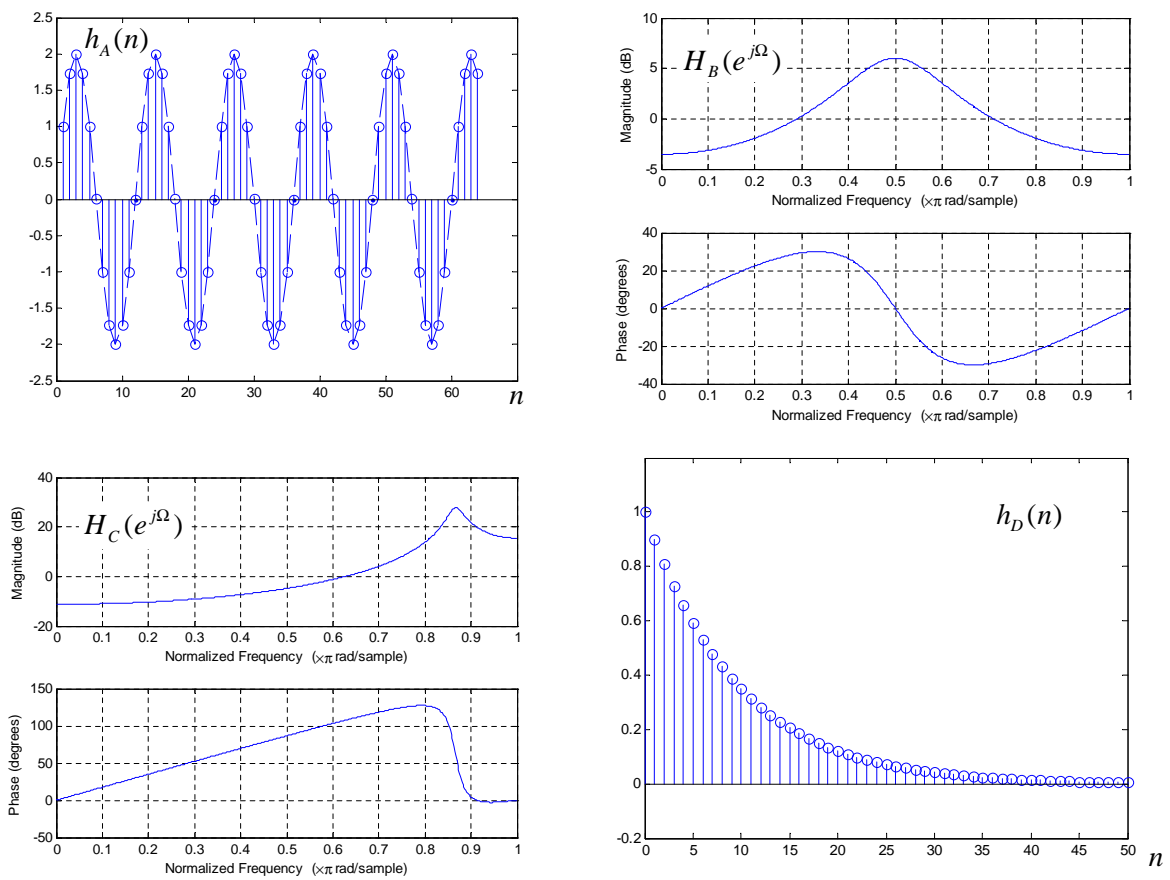


FIGURE 2 – Réponse impulsionnelle ou fréquentielle des différents filtres.

1 Synthèse de filtre RIF (8 pts)

On désire réaliser un filtre RIF dont la réponse s'approche du filtre idéal défini ci dessous.

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} -j & \text{pour } \Omega \leq -\Omega_c \\ j \frac{\Omega}{\Omega_c} & \text{pour } -\Omega_c < \Omega < \Omega_c \\ j & \text{pour } \Omega \geq \Omega_c \end{cases}$$

1. Représenter le pseudo-module et la phase de $H(e^{j\Omega})$.
2. Prévoir le type de la réponse impulsionnelle $h(n)$, ainsi que la parité de N .
3. Donner l'expression des termes $h(n)$ de la réponse impulsionnelle pour $\Omega_c = \pi/2$.
Dessinez $h(n)$ pour $n = -4 \dots +4$.
4. On veut réaliser un filtre RIF $H_a(z)$ à phase linéaire dont la réponse impulsionnelle $h_a(n)$ est $h(n)$ limitée à N points sans pondération. Indiquez comment obtenir ce filtre RIF. Dessinez $h_a(n)$ dans le cas où $N = 7$.
5. Donner les expressions du pseudo-module $A_a(e^{j\Omega})$ et de la phase $\Phi_a(\Omega)$.
6. Dessiner l'allure de $A_a(e^{j\Omega})$ dans le cas précédent ainsi que dans le cas où on pondérerait $h(n)$ par une fenêtre de Hamming. Expliquez vos résultats.

2 Implantation d'un système en virgule fixe (7 pts)

Le processeur utilisé est un DSP de type TMS320C54. Les différentes caractéristiques de ce processeur sont les suivantes :

- les données en entrée du multiplieur sont codées sur 16 bits et la sortie sur 32 bits ;
- les données en entrée et en sortie de l'additionneur sont codées sur 32 bits ;
- les données sont stockées en mémoire sur 16 bits.

Nous considérons un système H dont l'entrée est $x(n)$ et la sortie $y(n)$. Les équations régissant le système sont les suivantes

$$\begin{aligned} y(n) &= c_0 y_1(n) + c_1 y_1(n-1) \\ y_1(n) &= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) \end{aligned}$$

avec

$$b_0 = 1/3, \quad b_1 = 2/3, \quad b_2 = 1/3, \quad c_0 = 1/3, \quad c_1 = 2/3$$

1. Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ du système et en déduire la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système.

2. Déterminez le Graphe Flot de Signal de ce système.
3. Nous considérons que l'entrée $x(n)$ est comprise dans l'intervalle $] - 1, 1[$. Déterminez la dynamique des sorties y_1 et y , à l'aide de la norme L1.
4. Déterminez le codage des données et des coefficients (position de la virgule et largeur des données) et les différentes opérations de recadrage nécessaires à l'obtention d'une spécification en virgule fixe correcte.
5. Nous considérons que le signal d'entrée est entaché d'un bruit de quantification. Après avoir identifié les différentes sources de bruit, vous déterminerez l'expression de la puissance du bruit en sortie du système.

3 Analyse Spectrale dans un radar Doppler (5 pts)

Un radar Doppler voit plusieurs avions et on admettra que le signal qu'il reçoit est composé de plusieurs sinusoides (une par avion). Celui-ci est ramené en bande de base à l'aide de son enveloppe complexe qui est constituée d'une somme d'exponentielles complexes dont les fréquences sont proportionnelles à la vitesse des avions. Les fréquences de ces exponentielles sont supposées séparées d'au moins 200Hz. Le rapport de leur amplitude est au maximum de 50. La fréquence d'échantillonnage est de 5 kHz. On souhaite une précision de 25 Hz sur l'estimation des sinusoides.

Pour classer les signaux reçus par un radar suivant leur fréquence (i.e. la vitesse), une analyse spectrale est réalisée à partir d'un échantillon de N valeurs $x(k)$ de l'enveloppe complexe du signal reçu. L'analyse est effectuée à l'aide d'une TFD modifiée de la forme suivante :

$$X(n) = c \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h(k)e^{-\frac{j2\pi kn}{L}} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq L-1$$

où $h(k)$ est une fenêtre de pondération de longueur N et L le nombre de points de calcul de la TFD avec $L \geq N$. On ajoutera donc $L - N$ zéros aux N valeurs de $x(k)$. Le paramètre c est un facteur d'échelle permettant de calibrer l'échantillon fréquentiel ($X(n)$) à 1 lorsque le signal reçu $x(k)$ tombe sur une raie de la TFD.

1. Déterminez le type de fenêtre et le nombre de points N nécessaires aux respects des contraintes, c'est à dire pouvoir distinguer deux raies spectrales du signal $x(k)$.
2. Expliquez à quoi sert d'effectuer la TFD sur L points. En déduire la valeur de L nécessaire.
3. Dans le cas où le signal reçu est une composante de fréquence f_0 ($x(k) = e^{\frac{2j\pi k f_0}{F_e}}$) tombant sur une raie de la TFD d'indice n_0 , on veut que le calcul de $X(n_0)$ soit normalisé à 1. En déduire, après avoir calculé $X(n_0)$ dans ce cas, la valeur du facteur d'échelle c .

ENSSAT EII2

DS Traitement Numérique du Signal

Tous documents autorisés

Lundi 31 janvier 2011

1 Synthèse de filtre RII (7 points)

Un filtre analogique présente une fonction de transfert exprimée par :

$$H(p) = \frac{2}{p^2 + 3p + 2}$$

1. Calculez les pôles et les zéros de $H(p)$. Le filtre est-il stable ?
2. Donnez le module de la réponse fréquentielle $|H(j\omega)|$ de ce filtre. Calculez le module (dB) en $\omega = 0, 0.5, 1, 2, 4$ [rad/s]. De quel type de filtre s'agit-il ?
3. Tracez approximativement le module pour ω variant de 0 à 6 rad/s. Dessinez sur la même courbe un gabarit correspondant à ce filtre analogique, pour lequel on prendra pour pulsations en bande passante et atténuée, respectivement $\omega_p = 0.5$ rad/s et $\omega_a = 4$ rad/s.

On posera pour la suite les valeurs d'échantillonnage suivantes : $T = 0.5$ s, $f_e = 2$ Hz, $\omega_e = 4\pi$ rad/s.

4. Donnez l'expression de la fonction de transfert en z du filtre numérique $H_{bi}(z)$ obtenue par transformation bilinéaire sans prédistorsion.
5. Donnez la valeur de $|H_{bi}(e^{j\omega T})|$ en ω [rad/s] = $0, \omega_p, \omega_a, \omega_e/2$. Tracez approximativement le module sur la courbe de la question 1.
6. Le filtre entre-t-il dans le gabarit de la question 1 ? Expliquez comment prévoir les valeurs de $|H_{bi}(e^{j\omega T})|$ en ω [rad/s] = $0, \omega_p, \omega_a, \omega_e/2$ à partir de celles calculées dans la question 1.
7. Expliquez comment obtenir l'expression de la fonction de transfert en z du filtre numérique $H'_{bi}(z)$ obtenue par transformation bilinéaire avec prédistorsion autour de ω_p .

2 Unité de réverbération (5 pts)

La figure 1 présente le schéma bloc d'une unité de réverbération numérique simple mais efficace. Les triangles symbolisent des amplificateurs. Le coefficient d'amplification est précisé à l'intérieur du triangle. Les signaux $x(k)$, $y(k)$ et tous les signaux intermédiaires présents sur la figure 1 sont numériques, échantillonnés. La fréquence d'échantillonnage est T_e . On note que le signal issu du premier sommateur subit un retard de r échantillons. Le coefficient g règle la persistance de l'écho. Il doit être impérativement inférieur à 1 en valeur absolue pour éviter l'instabilité du système. Le coefficient b positif règle l'amplification du son direct et a celui des sons retardés. r règle la profondeur

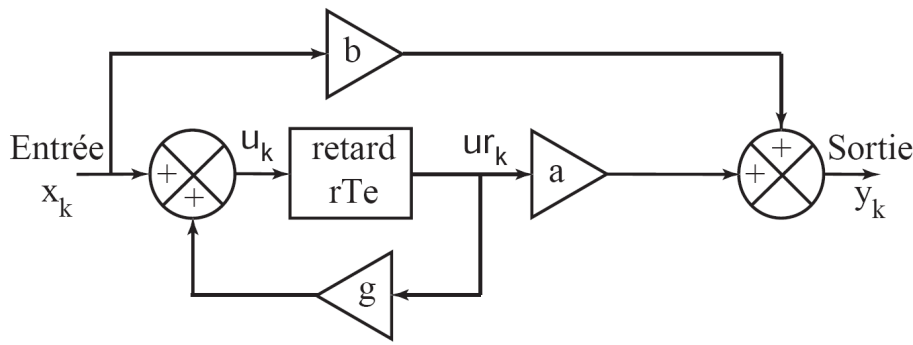


FIGURE 1 – Unité de réverbération

de l'écho liée à la dimension de la salle d'écoute simulée. Soit $u(k)$ le signal à l'entrée du bloc de retard et $ur(k)$ le signal à la sortie du bloc de retard. On note $U(j\omega)$ et $UR(j\omega)$ les signaux lorsque l'entrée est $e^{j\omega n}$.

1. Ecrire la fonction de transfert en $j\omega$ liant $U(j\omega)$ et $UR(j\omega)$
2. En déduire la fonction de transfert entre $X(j\omega)$ et $UR(j\omega)$ puis la fonction de transfert $H(j\omega)$ entre l'entrée $X(j\omega)$ et la sortie $Y(j\omega)$ en fonction des paramètres a, b, g, r .
3. Déterminer alors la réponse en fréquence $H(j\omega)$ du système puis calculer le carré de son module $|H(j\omega)|^2$.
4. On souhaite que toutes les fréquences du spectre soient amplifiées de la même quantité (pas de coloration du spectre); c'est à dire que le module $|H(j\omega)|^2$ soit égal à 1 indépendamment de ω . En déduire une relation entre b et g et une relation entre a et g . On éliminera les solutions inintéressantes correspondant à $b = \pm 1$ et on ne retiendra que la valeur de b positive parmi les deux autres solutions.
5. Exprimer la fonction de transfert simplifiée $H(j\omega)$ qui en découle en fonction de g et r .
6. Donner l'expression de l'équation aux différences qui permet de calculer $y(k)$ en fonction des échantillons de x et des échantillons précédents de y .
7. La fréquence d'échantillonnage est de $44,1\text{KHz}$. On veut obtenir un retard τ de 100ms . Quelle doit être la valeur de r ?

3 Implantation d'un filtre en virgule fixe (8 pts)

Le processeur utilisé est un DSP de type TMS320C54. Les différentes caractéristiques de ce processeur sont les suivantes :

- les données en entrée du multiplieur sont codées sur 16 bits et la sortie sur 32 bits ;
- les données en entrée et en sortie de l'additionneur sont codées sur 32 bits ;
- les données sont stockées en mémoire sur 16 bits ;

Analyse du filtre RIF Nous considérons un filtre RIF de longueur $N = 8$ dont l'équation aux différences est la suivante et dont le graphe flot de signal est présenté à la figure 2.

$$y(n) = \sum_{i=0}^3 b_i \cdot [n - i + n - 7 + i] \quad (1)$$

avec

$$b_0 = 0, 2, \quad b_1 = 0, 3, \quad b_2 = 0, 4, \quad b_3 = 0, 49 \quad (2)$$

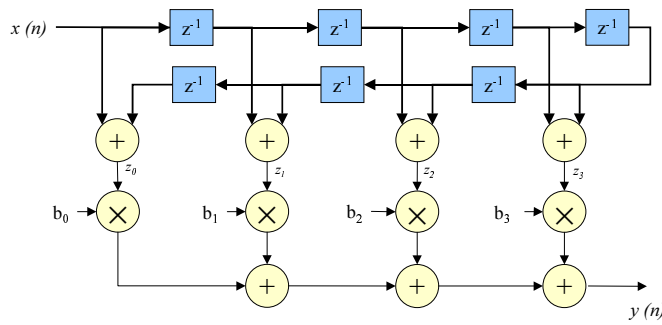


FIGURE 2 – Synoptique du filtre RIF

1. Pour le filtre défini ci-dessus
 - Déterminez l'expression de la réponse impulsionnelle $h(n)$ et tracer celle-ci.
 - Déterminez le type (I, II, III ou IV) de ce filtre RIF.
 - Déterminez l'expression de la fonction de transfert $H(z)$.
2. Déterminez l'expression de la réponse fréquentielle $H(e^{j\Omega})$ et calculez le module de celle-ci. Calculez la valeur de $|H(e^{j\Omega})|$ pour Ω égal à $0, \pi, \pi/2$. En déduire la nature du filtre.

Implantation du filtre RIF

3. Nous considérons que l'entrée n est comprise dans l'intervalle $] - 1, 1[$. Déterminez la dynamique de la sortie du filtre y , à l'aide de la norme L1 et de la norme de Chebychev. Vous démontrerez que pour les valeurs des coefficients donnés, 1 bit est suffisant et nécessaire pour coder la partie entière de la sortie du filtre y .

Déterminez la dynamique de la donnée z_i correspondant à la sortie de l'addition $n - i) + n - 7 + i)$ en se plaçant dans le pire cas (arithmétique d'intervalle).

4. Déterminez le codage des données et des coefficients (position de la virgule et largeur des données) et les différentes opérations de recadrage nécessaires à l'obtention d'une spécification en virgule fixe correcte.

5. Nous considérons que le signal d'entrée n'est pas entaché de bruit de quantification. Après avoir identifié les différentes sources de bruit, vous déterminerez leur expression. Les sources de bruit dont la puissance est faible par rapport aux autres seront négligées.

Déterminez l'expression de la puissance du bruit en sortie du filtre en fonction des coefficients du filtre.