

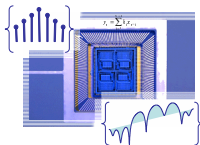
# Signaux et Systèmes Discrets

Olivier Sentieys

ENSSAT - Université de Rennes 1  
IRISA - Équipe de recherche  $R_2D^2$

Olivier.Sentieys@enssat.fr  
<http://r2d2.enssat.fr/enseignements/Tns>

22 février 2006



# Plan

## Introduction

## Signaux à temps discrets

- Définition

- Opérations sur les signaux à temps discret

- Signaux à temps discret de base

- Propriétés des signaux à temps discret

# Plan

## Transformée en $Z$

Définition de la transformée en  $Z$

Domaine de convergence  $\mathcal{D}_{CV}$

Propriétés de la  $TZ$

Transformée en  $Z$  inverse

## Transformée de Fourier d'un signal discret

Rappels sur les signaux continus

$TF$  d'un signal discret non périodique

$TF$  d'un signal discret périodique

Condition d'existence de la  $TF$

Propriétés de la transformée de Fourier

Transformée de Fourier discrète

# Plan

## Systèmes discrets

- Systèmes discrets linéaires invariants

- Représentation temporelle des systèmes discrets

- Analyse des systèmes discrets par la transformée en  $\mathcal{Z}$

- Représentation fréquentielle des systèmes discrets

## Échantillonnage et reconstruction des signaux

- Historique du Théorème d'échantillonnage

- Échantillonnage idéal

- Théorème d'échantillonnage de Shannon

- Reconstruction du signal continu à partir de ses échantillons

- Exemple pratique d'échantillonnage

- Reconstruction réelle du signal continu

## Introduction

Traitement (*numérique*) du signal (*numérique*) :

- **Modéliser** – ou identifier – consiste en l'analyse d'un signal ou d'un système, dans le domaine temporel ou fréquentiel (i.e. spectral). On parlera également d'estimation.
- **Synthétiser** – ou générer – un signal.
- **Transmettre** un ensemble de signaux sur un support.
- **Transformer** un ensemble de signaux à l'aide d'un système linéaire (filtrer, moduler, coder, ...) ou non linéaire ( $()^2$ ,  $||$ , ...).

## Classification des signaux (1/2)

- 1 Dimensionnalité = fonction de la dimension du signal ou des dimensions des variables du signal :
  - Signal scalaire pouvant prendre des valeurs réelles ou complexes :  $x(t)$
  - Signal vectoriel pouvant prendre des valeurs réelles ou complexes :  $[R, V, B] = TV(t)$
  - Signal mono-dimensionnel qui correspond à des fonctions à un seul argument, comme par exemple le temps
  - Signal multi-dimensionnel qui correspond à des fonctions à plusieurs arguments :  $[I] = TV(t, x, y)$
- 2 Caractéristiques temporelles
  - Signaux à temps continu ou signaux *analogiques*. La variable  $t \in \mathbb{R}$ . On notera un signal analogique de la façon suivante :  $s_a(t)$
  - Signaux à temps discret : ces signaux sont *définis* pour certaines valeurs de la variable  $t$  :  $s(n) = s(nT) = s(t)|_{t=nT}$

## Classification des signaux (2/2)

- ③ Valeurs prises par le signal
  - Signaux à valeurs continues pouvant prendre une valeur réelle dans un intervalle continu
  - Signaux à valeurs discrètes prenant seulement des valeurs parmi un ensemble fini de valeurs possibles : voir quantification
- ④ Prédicibilité des signaux
  - Signaux déterministes qui peuvent être représentés explicitement par une fonction mathématique
  - Signaux aléatoires qui évoluent dans le temps d'une manière imprévisible. Il est cependant possible de décrire mathématiquement certaines caractéristiques statistiques de ces signaux

# 1. Signaux à temps discrets

- ① Définition
- ② Opérations sur les signaux à temps discret
- ③ Signaux à temps discret de base
- ④ Propriétés des signaux à temps discret



## 1.1 Signaux à temps discret : définition

- Séquence  $\mathcal{X}$  de nombres dans laquelle le  $n$ ième nombre est  $x(n)$ . On écrira :

$$\mathcal{X} = \{x(n)\} \quad -\infty < n < \infty$$

### Exemple de signal discret

- $x(n)$  est égal à la valeur du signal analogique  $x_a(t)$  au temps  $t = nT$ , i.e.

$$x(n) = x_a(nT) \quad -\infty < n < \infty$$

- $T$  : période d'échantillonnage,  $f_e = \frac{1}{T}$  : fréquence d'échantillonnage

Exemple de signal de parole :  $T = ?$

## 1.2 Opérations sur les signaux à temps discret

- ➊ +, −, × de signaux
- ➋ +, −, × par une constante
- ➌ Décalage de  $n_0$  échantillons

$$y(n) = x(n - n_0)$$

- ➍ Convolution
- ➎ Corrélacion
- ➏ ...

## 1.3 Signaux à temps discret de base (1/2)

- 1 Impulsion unité  $\delta(n)$ ,  $\delta(n - k)$
- 2 Echelon unité  $u(n)$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - k)$$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n - 1)$$

- 3  $x_1(n) = A\alpha^n$   
 $x_2(n) = A\alpha^n u(n)$

## 1.3 Signaux à temps discret de base (2/2)

- 4 Sinusoïde, période  $N = ?$

$$x_3(n) = A \cos(n\omega_0 + \varphi)$$

- 5 Signal complexe

$$x_4(n) = e^{jn\omega_0}$$

- 6 Cas général

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k).$$

e.g.  $p(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-2) - 0.5\delta(n-4)$

## 1.4 Propriétés des signaux à temps discret (1/2)

- ① Signaux causaux

$$x(n) = 0, \quad \forall n < 0$$

- ② Énergie totale : finie ou infinie

$$E(\infty) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1)$$

- ③ Puissance moyenne : finie ou infinie

$$P_m \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |x(n)|^2 \quad (2)$$

- ④ Périodique de période  $P$  :  $x(n + P) = x(n) \forall n$  sinon  $x(n)$  est apériodique

## 1.4 Propriétés des signaux à temps discret (2/2)

- 5 Intercorrélation entre deux signaux  $x(n)$  et  $y(n)$

$$\mathcal{R}_{xy}(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n+k) = \mathcal{R}_{yx}(-k) \quad (3)$$

- 6 Autocorrélation d'un signal  $x(n)$

$$\mathcal{R}_{xx}(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x(n+k) = \mathcal{R}_{xx}(-k) \quad (4)$$

- 7 Convolution linéaire entre deux signaux  $x(n)$  et  $y(n)$

$$\varphi_{xy}(k) = x(k) * y(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(k-n) \quad (5)$$

## 2. Transformée en $Z$

- 1 Définition de la  $TZ$
- 2 Domaine de convergence
- 3 Propriétés de la transformée en  $Z$
- 4 Transformée en  $Z$  inverse

## 2.1 Définition de la transformée en $Z$

La transformée en  $Z$  directe bilatérale d'un signal à temps discret  $x(n)$  est définie par :

$$Z [x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (6)$$

où  $z$  est une variable complexe ( $z \in \mathbb{C}$ ) définie partout où cette série converge.

Les signaux discrets étant la plupart du temps causaux on définit plutôt la transformée en  $Z$  (dite unilatérale) par :

$$Z [x(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (7)$$



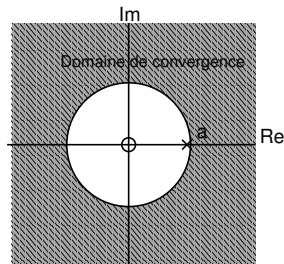
## 2.2 Domaine de convergence $\mathcal{D}_{CV}$

Dans le cas de la  $TZ$  unilatérale, le domaine de convergence correspond à l'extérieur du disque de convergence défini par  $|z| > r$ .

Le critère de Cauchy appliqué à la  $TZ$  donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} = r$$

Exemple :  $x(n) = a^n u(n)$



Domaine de convergence  
avec  $r = a$

## 2.3 Propriétés de la $TZ$ (1/2)

### 1 Linéarité

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \Rightarrow X(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$$

### 2 Théorème du retard

$$Z[x(n - k)] = z^{-k} X(z)$$

### 3 Théorème de l'avance

$$Z[x(n + k)] = z^{+k} X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{k-n}$$

## 2.3 Propriétés de la $TZ$ (2/2)

- 4 Dérivation dans l'espace en  $z$

$$Z [n.x(n)] = Y(z) = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

- 5 Théorème de la valeur initiale

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

- 6 Théorème de la valeur finale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})X(z)$$

- 7 Théorème de la convolution linéaire discrète

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \iff X(z) = X_1(z)X_2(z)$$

## 2.4 Transformée en $Z$ inverse

Soit  $X(z)$  la transformée en  $Z$  du signal  $x(n)$ . On définit la transformée en  $Z$  inverse, la relation déterminant  $x(n)$  à partir de  $X(z)$  telle que :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} z^{n-1} X(z) dz \quad (8)$$

Il existe trois principales méthodes :

- 1 l'intégration sur un contour fermé en utilisant le calcul des résidus,
- 2 le développement en puissance de  $z$  et de  $z^{-1}$ ,
- 3 le développement en fractions élémentaires.

## $TZ$ inverse par la méthode des résidus (1/2)

$$x(n) = \sum_{\text{Tous les pôles } p_i \text{ de } R(z)} \text{Résidus de } R(z) \text{ aux pôles } p_i \quad (9)$$

avec  $R(z) = z^{n-1}X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$  sous forme fractionnelle.

On notera plutôt :

$$x(n) = \sum_{\forall p_i \in \mathcal{D}_{CV}} \text{Res}(z^{n-1}X(z), p_i) \quad (10)$$

- ❶ Pôles simples de  $R(z)$  :  $p_i$  tel que  $D(z)|_{p_i} = 0$

$$\text{Res}(R(z), p_i) = \left[ (z - p_i) \frac{N(z)}{D(z)} \right]_{z=p_i} \quad (11)$$

## $TZ$ inverse par la méthode des résidus (2/2)

- ② Pôles multiples d'ordre  $m$  de  $R(z)$ .

Si  $D(z) = (z - p_i)^m F(z)$  avec  $F(p_i) \neq 0$  alors

$$\mathcal{R}es(R(z), p_i) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z - p_i)^m \frac{N(z)}{D(z)} \right]_{z=p_i} \quad (12)$$

Exemples :

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$
$$X(z) = \frac{z}{(z - a)}$$

## $TZ$ inverse par division polynômiale

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_k z^{-k} + \dots$$

alors

$$x(n) = c_n$$

Exemples :

$$X(z) = \frac{0.5z}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{0.5z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$





### 3. Transformée de Fourier d'un signal discret

- 1 Rappels sur les signaux continus
- 2  $TF$  d'un signal discret non périodique
- 3  $TF$  d'un signal discret périodique
- 4 Condition d'existence de la  $TF$
- 5 Propriétés de la transformée de Fourier
- 6 Transformée de Fourier discrète

## 3.1 Rappels sur les signaux continus

Soit un signal analogique  $x_a(t)$  dont la transformée de Fourier est définie par :

$$X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt \quad (15)$$

avec  $\omega = 2\pi f$ .

On retrouve le signal temporel à partir de sa transformée par la transformée de Fourier inverse définie par la relation suivante :

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (16)$$

## 3.2 $TF$ d'un signal discret non périodique (1/2)

Pour un signal  $x(n)$  discret quelconque non périodique, sa transformée de Fourier ( $TF$ ) s'écrit :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \quad (17)$$

$X(e^{j\Omega})$  peut être exprimé à partir de la transformée en  $Z$  par la relation :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \Big|_{z=e^{j\Omega}} = X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} \quad (18)$$

- Cette équation implique que le  $TF$  n'existe que si le cercle unité, caractérisé par  $z = e^{j\Omega}$ , appartient au domaine de convergence de  $X(z)$ .

## 3.2 TF d'un signal discret non périodique (2/2)

- $X(\Omega)$  est *périodique* de période  $2\pi$ . Ceci implique que **le spectre d'un signal discret est périodique**.

La TF inverse est obtenue à partir de la transformée en  $Z$  inverse de  $X(z)$ . On obtient :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega \quad (19)$$

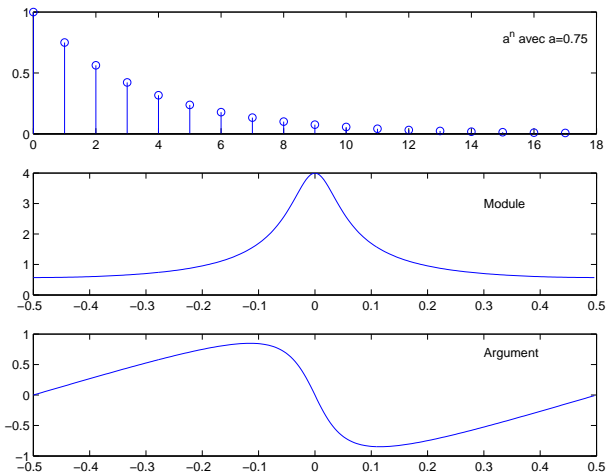
Sur la variable *fréquence*  $f$ , la TF périodique de période  $f_e = 1/T$  s'écrit :

$$X(f) = X(e^{j2\pi fT}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi fnT} \quad (20)$$

$$x(n) = \frac{1}{f_e} \int_0^{f_e} X(f) e^{j2\pi fnT} df \quad (21)$$

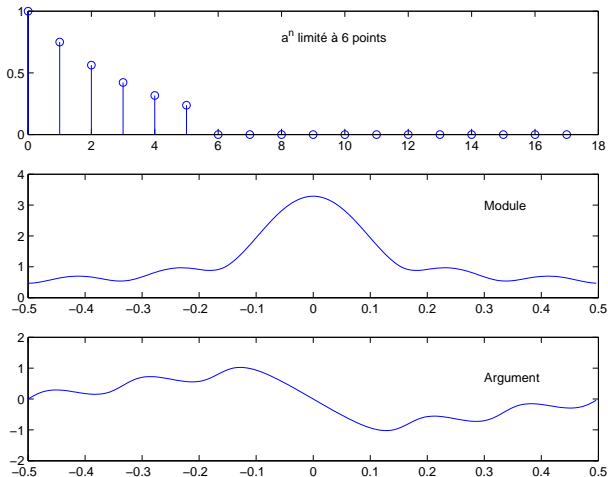
## TF d'un signal discret non périodique

Exemple :  $x(n) = a^n u(n)$



## TF d'un signal discret non périodique

Exemple :  $x(n) = a^n$ , pour  $n = 0 \dots N - 1$



### 3.3 TF d'un signal discret périodique (1/2)

Pour un signal  $x_p(n)$  discret périodique de période  $N$ , une décomposition en série de Fourier doit être utilisée sous la forme :

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n).e^{-2j\pi\frac{n.k}{N}}, \quad k = 0, 1 \dots N - 1 \quad (22)$$

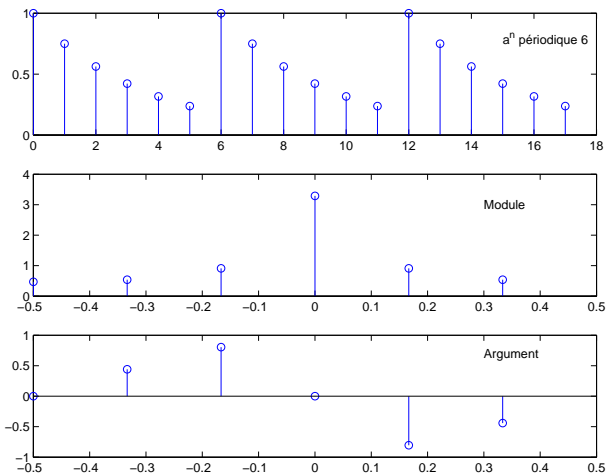
$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k).e^{2j\pi\frac{n.k}{N}}, \quad n = 0, 1 \dots N - 1 \quad (23)$$

Sa Transformée de Fourier s'écrit alors :

$$X_p(e^{j\Omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k)\delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N}\right) \quad (24)$$

## 3.3 TF d'un signal discret périodique (2/2)

Exemple :  $x(n) = a^n$ , pour  $n = 0 \dots N - 1$ , périodique  $N$





## 3.4 Condition d'existence de la $TF$ (1/3)

Une condition suffisante à la convergence de la  $TF$  peut être déterminée comme suit ( $x(n)$  est dite *absolument sommable*) :

$$|X(e^{j\Omega})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

De plus, la série converge uniformément vers une fonction continue de  $\Omega$ .

Certaines séquences ne sont pas *absolument sommables* mais sont de *carré sommable* (ou à énergie finie), i.e.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \quad (25)$$

## 3.4 Condition d'existence de la $TF$ (2/3)

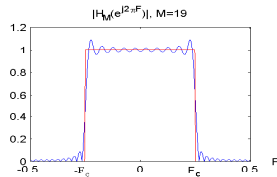
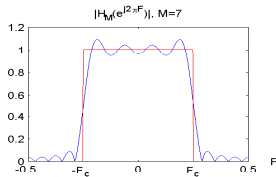
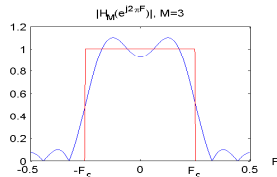
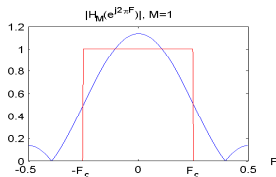
Ces séquences peuvent être représentées par une transformée de Fourier mais sans convergence uniforme de la somme infinie définissant  $X(e^{j\Omega})$ . Cela signifie que l'erreur  $|X(e^{j\Omega}) - X_M(e^{j\Omega})|$  ne tend pas vers 0 quand  $M \rightarrow \infty$  mais que par contre l'énergie de l'erreur tend vers 0.

Exemple :

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad h(n) = \frac{\sin n\Omega_c}{n\pi}, \quad -\infty < n < \infty$$

3.4 Condition d'existence de la *TF* (3/3)

$$H_M(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\sin n\Omega_c}{n\pi} e^{-jn\Omega}$$



## 3.5 Propriétés de la transformée de Fourier (1/2)

- Linéarité ou superposition

$$a.x(n) + b.y(n) \Leftrightarrow a.X(e^{j\Omega}) + b.Y(e^{j\Omega})$$

- Décalage en temps-fréquence

$$x(n - n_0) \Leftrightarrow e^{-jn_0\Omega} X(e^{j\Omega}) \quad x(n)e^{jn\Omega_0} \Leftrightarrow X(e^{j(\Omega - \Omega_0)})$$

- Dérivation en fréquence

$$n.x(n) \Leftrightarrow j \frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}$$

- Produit de convolution

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_1(i).x_2(n - i) \Leftrightarrow X_1(e^{j\Omega}).X_2(e^{j\Omega})$$

## 3.5 Propriétés de la transformée de Fourier (2/2)

- Théorème du fenêtrage (ou de la modulation)

$$x_1(n).x_2(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\Theta}).X_2(e^{j(\Omega-\Theta)})d\Theta$$

- Théorème de Parseval (conservation de la puissance d'un signal)

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |x(i)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

- Si  $x(n)$  est une suite réelle, alors sa TF est symétrique conjuguée (partie réelle et module pairs ; partie imaginaire et phase impaires)

$$x(n) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X(e^{j\Omega}) = X^*(e^{-j\Omega})$$

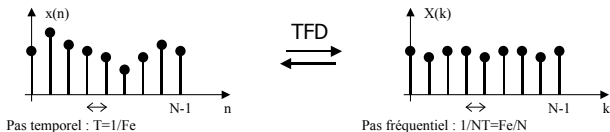
- Densité spectrale d'énergie (pour des signaux à énergie finie)

$$S_E(f) = |X(e^{j2\pi fT})|^2$$

## 3.6 Transformée de Fourier discrète

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (26)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j \frac{2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (27)$$



## Propriétés de la TFD

- Décalage en temps-fréquence  $x(n - n_0) \Leftrightarrow e^{-2j\pi \frac{kn_0}{N}} X(k)$
- Produit de convolution circulaire

$$x_1(n) \circledast x_2(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x_1(i) \cdot x_2(n - i) \Leftrightarrow X_1(k) \cdot X_2(k)$$

avec  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$  des signaux périodiques de période  $N$ .

- Théorème de Parseval (conservation de la puissance d'un signal)

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

- Propriétés de symétrie  $x(n) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X(k) = X^*(N - k)$
- Calcul rapide (*Fast Fourier Transform, FFT*)

## 4. Systèmes discrets

- 1 Systèmes linéaires invariants
- 2 Représentation temporelle
- 3 Analyse par transformée en  $Z$
- 4 Représentation fréquentielle



## 4.1 Systèmes discrets linéaires invariants

- ① Un signal d'entrée  $e(n)$  est *transformé* en un signal de sortie  $s(n)$  :

$$s(.) = \mathcal{T}[e(.)]$$

- ② Un système est dit *invariant* en temps (ou au décalage) ssi :

$$e(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} s(n) \quad \Rightarrow \quad e(n-k) \xrightarrow{\mathcal{T}} s(n-k) \quad \forall e(.), \forall k \in (\mathbb{N})$$

- ③ Un système est *linéaire* ssi :

$$\mathcal{T}[a \times e_1(n) + b \times e_2(n)] = a \times \mathcal{T}[e_1(n)] + b \times \mathcal{T}[e_2(n)]$$

$$\forall e_1(.), \forall e_2(.), \forall (a, b)$$

## Systèmes linéaires invariants (SLI)

- 1 Causalité : un système est *causal* si un changement en sortie ne *précède* pas un changement en entrée.

Un système linéaire invariant est causal si et seulement si  $h(n) = 0$  pour  $n < 0$ .

- 2 Stabilité : un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée. La condition de stabilité d'un système s'écrit :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < +\infty$$

Exemples : retard idéal, moyenneur, sans mémoire, ...

# Représentation temporelle des systèmes discrets

Stratégie générale d'analyse d'un système linéaire invariant :

- 1 Décomposition du signal d'entrée en une somme de signaux ou fonctions de base.

$$e(n) = \sum_k \alpha_k e_k(n)$$

- 2 Etude de la réponse du système pour l'ensemble des fonctions de base.

$$s_k(n) = \mathcal{T}[e_k(n)]$$

- 3 Recomposition de la sortie en appliquant le principe de superposition.

$$s(n) = \sum_k \alpha_k s_k(n)$$

## Produit de convolution (1/2)

$$e(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\delta(n-k)$$

$$s(n) = \mathcal{T}[e(n)] = \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\mathcal{T}[\delta(n-k)]$$

On pose  $h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]$ , alors

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)h(n-k) = e(n) * h(n) = h(n) * e(n)$$

## Produit de convolution (2/2)

Un système discret est donc entièrement caractérisé par sa *réponse impulsionnelle*  $h(n)$ . L'opération  $*$  liant la sortie  $s(n)$  à l'entrée  $e(n)$  et à la réponse impulsionnelle du système  $h(n)$  est appelée produit de convolution.

### Exemple

---

---

$h(n)$  : réponse im-  
pulsionnelle

$e(n)$  : entrée du  
système

$s(n)$  : réponse du  
système à l'entrée

## Equation aux différences finies

Une équation aux différences finies peut s'écrire sous la forme :

$$s(n) = - \sum_{k=1}^N a_k s(n - k) + \sum_{k=0}^M b_k e(n - k) \quad (28)$$

- Système *récuratif* ou *non-récuratif*
- Réponse impulsionnelle infinie (RII *ou* IIR) ou finie (RIF *ou* FIR)

## Fonction de transfert en $z$ (1/2)

La fonction de transfert en  $z$   $H(z)$  d'un système est définie par :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} \quad (29)$$

**$H(z)$  est également la transformée en  $Z$  de la réponse impulsionnelle  $h(n)$  du système.**

À partir de l'équation aux différences (28), on obtient :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (30)$$

ou

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{N-k}}{z^N + \sum_{k=1}^N a_k z^{N-k}} \quad (31)$$

## Fonction de transfert en $z$ (2/2)

ou en faisant apparaître les pôles et les zéros :

$$H(z) = b_0 z^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)} = b_0 \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i) z^{-1}} \quad (32)$$

L'équation précédente permet de tracer dans le plan complexe le **diagramme des pôles et des zéros**.

Exemple :

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}}$$



## 4.3 Analyse des SLD par la transformée en $Z$ (1/3)

Soit le système décrit par  $S(z) = H(z)E(z)$ , il s'agit de **caractériser**  $s(n)$ .

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \quad E(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

On a donc :

$$S(z) = \frac{N(z)P(z)}{D(z)Q(z)}$$

$$s(n) = TZ^{-1} [S(z)]$$

## 4.3 Analyse des SLD par la transformée en $Z$ (2/3)

Sous la condition d'unicité des pôles et des zéros, on peut écrire  $Y(z)$  sous la forme :

$$S(z) = \sum_{k=1}^N \frac{D_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^L \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}}$$

$$s(n) = \underbrace{\sum_{k=1}^N D_k p_k^n u(n)}_{\text{régime naturel}} + \underbrace{\sum_{k=1}^L Q_k q_k^n u(n)}_{\text{régime forcé}}$$

L'équation précédente montre que le signal de sortie peut être considéré comme composé de deux parties :

- une réponse en régime naturel (termes en  $p_k$ ), appelée réponse transitoire si  $|p_k| < 1 \quad \forall k$ .
- une réponse en régime forcé (termes en  $q_k$ ).

## 4.3 Analyse des SLD par la transformée en $Z$ (3/3)

Condition de stabilité :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Un SLI causal est **stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à l'intérieur, strictement, du cercle unité.**

## 4.4 Représentation fréquentielle des SLD (1/2)

Soit l'entrée  $e(n) = e^{jn\omega T} = e^{jn\Omega}$  pour  $-\infty < n < +\infty$  d'un SLI de réponse impulsionnelle  $h(k)$ . La sortie peut alors s'écrire :

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j(n-k)\Omega} = e^{jn\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-jk\Omega}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-jk\Omega}$$

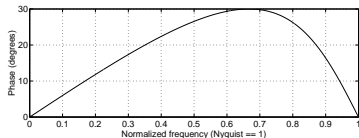
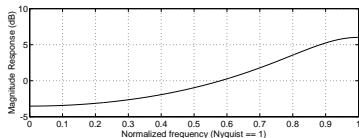
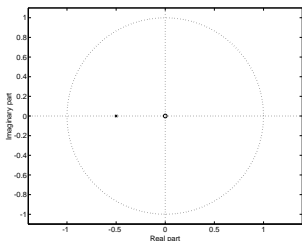
$H(e^{j\Omega})$  est appelé *réponse fréquentielle* du système. On étudie son module et sa phase :

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| e^{j \arg[H(e^{j\Omega})]}$$

## 4.4 Représentation fréquentielle des SLD (2/2)

Exemple :

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}}$$



## 5. Échantillonnage et reconstruction des signaux

- 1 Historique du Théorème d'échantillonnage
- 2 Échantillonnage idéal
- 3 Théorème d'échantillonnage de Shannon
- 4 Reconstruction du signal continu à partir de ses échantillons
- 5 Exemple pratique d'échantillonnage
- 6 Reconstruction réelle du signal continu

## 5.1 Historique du Théorème d'échantillonnage (1/3)

*De tout temps, l'Homme a cherché à échantillonner ...*<sup>1</sup>

**1918** E.T. Whittaker s'intéresse aux représentations analytiques d'une fonction connue seulement pour des valeurs équidistantes :  $a, a + w, a + 2w, \dots, a + nw$

Ceci l'a conduit à la forme finale de la série cardinale :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a + nw) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{w}(t - a - nw)\right)}{\frac{\pi}{w}(t - a - nw)}$$

**1928** Nyquist s'intéresse à la communication télégraphique. La vitesse d'échantillonnage de Nyquist correspond à la vitesse minimale pour laquelle on peut obtenir une reconstruction stable.

---

<sup>1</sup>Merci à Simon Mathieu de l'Université Laval pour cet historique précis

## 5.1 Historique du Théorème d'échantillonnage (2/3)

- 1933 Kotel'nikov a introduit ce théorème dans la littérature scientifique russe.
- 1948 Shannon énonce un théorème qui selon lui est généralement admis dans le domaine des communications :

**Whittaker Kotel'nikov Shannon — WKS**

*Si une fonction  $f(t)$  ne contient pas de fréquences supérieures à  $\omega_{max}$  en radians par seconde, alors elle est complètement déterminée par l'ordonnée d'une série de points espacés de  $T = \frac{\pi}{\omega_{max}}$  secondes.*

Ce théorème prend sa source dans les travaux de Borel, Cauchy et De La Vallée Poussin au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle.



## 5.1 Historique : reconstruction (3/3)

Classe de fonctions de Paley-Wiener (largeur de bande limitée) regroupe les fonctions telles que :

$$PW_B = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp } \hat{f} \subseteq [-\sigma, \sigma] \right\},$$

où  $\hat{f}$  est la transformée de Fourier définie dans  $L^1(\mathbb{R})$ , i.e. la définition usuelle de la transformée et  $\text{supp } \hat{f}$  est le plus petit support de  $\hat{f}$ . Le théorème nous conduit à la série cardinale utilisée pour reconstruire la fonction originale :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{w}\right) \text{sinc}\left(t - \frac{n}{w}\right) \quad (33)$$

## 5.2 Échantillonnage idéal (1/2)

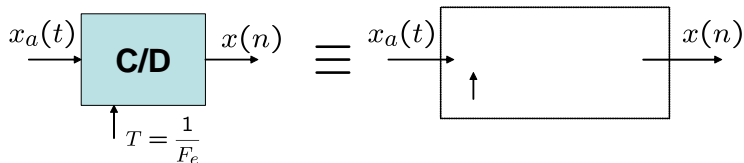
Soit un signal analogique  $x_a(t)$  défini par sa  $TF$  :

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (34)$$

L'échantillonnage de  $x_a(t)$  est défini par  $x(n) = x_a(t)|_{t=nT}$

Le signal discret  $x(n)$  est défini par :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (35)$$

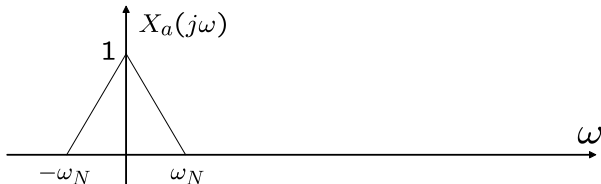


## 5.2 Échantillonnage idéal (2/2)

On trouve la relation suivante entre les  $TF$  de  $x(n)$  et de  $x_a(t)$  :

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{j\Omega}{T} + \frac{j2\pi k}{T}\right) \quad (36)$$

Le spectre du signal numérique est donc composé d'une somme infinie de versions décalées du signal analogique.



Exemple :

## 5.3 Théorème d'échantillonnage de Shannon

Il est possible de reconstruire le signal continu à partir du signal discret si le signal analogique est à bande limitée, i.e.  $X(\omega)$  est nulle pour  $|\omega| > \omega_{\max}$

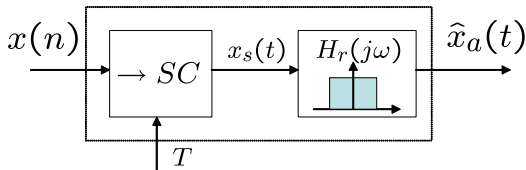
On obtient alors :

$$\omega_{\max} < \frac{2\pi}{T} - \omega_{\max} \quad (37)$$

$$2f_{\max} < f_N \quad \text{avec} \quad f_N = \frac{1}{T} \quad (38)$$

$f_N$  est la fréquence limite d'échantillonnage ou encore appelée fréquence de Nyquist.

## 5.4 Reconstruction du signal à partir de ses échantillons



Sous l'hypothèse de Shannon précédente, et si le filtre  $H_r(j\omega)$  est un filtre passe-bas idéal de pulsation de coupure  $\omega_c = \pi/T$ , il est possible de reconstruire le signal d'origine  $x_a(t)$  de façon idéale.

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h_r(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}$$

## 5.5 Exemple pratique d'échantillonnage

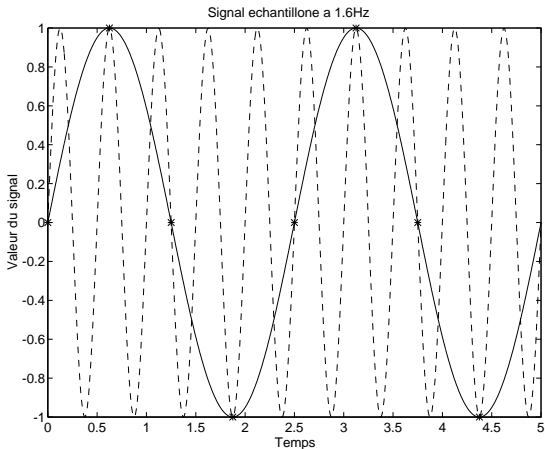
Soit un signal analogique  $x_a(t)$  correspondant à une sinusoïde de fréquence  $f = 2\text{Hz}$  et défini par :

$$x_a(t) = \sin(2\pi \times 2t)$$

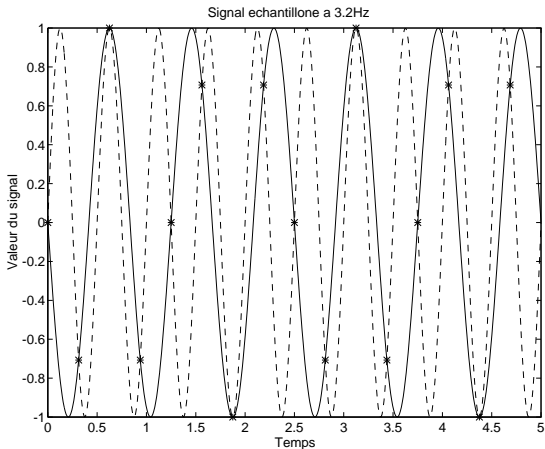
avec  $0 \leq t \leq +5s$ .

La fréquence de Nyquist correspond à  $f_N = 2 \times 2 = 4\text{Hz}$ .

# Sinusoïde de fréquence $2Hz$ , $f_e = 1.6Hz$

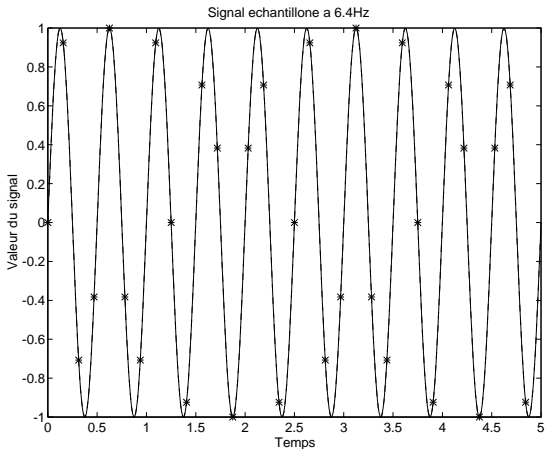


# Sinusoïde de fréquence $2Hz$ , $f_e = 3.2Hz$





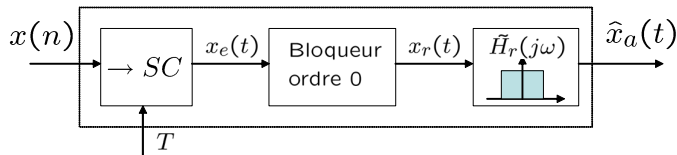
# Sinusoïde de fréquence $2Hz$ , $f_e = 6.4Hz$



## 5.6 Reconstruction réelle du signal continu

Reconstruction réelle dans le cas d'une conversion numérique analogique avec blocage d'ordre 0 : le signal  $x(n)$  est converti en un train d'impulsions  $x_e(t)$ , puis transformé en  $x_r(t)$  par un bloqueur d'ordre 0 :

$$h_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Il existe un filtre de reconstruction idéal  $\widetilde{H}_r(j\omega)$  permettant de reconstruire le signal analogique de sortie  $\hat{x}_a(t)$  de façon parfaite, en compensant l'influence du bloqueur  $h_0(t)$ .

Pour plus d'informations...



## Pour plus d'informations...



J. McClellan, R. Schafer, and M. Yoder.  
*DSP First : a Multimedia Approach.*  
Prentice Hall, 1998.



A. V. Oppenheim and R. W. Schafer.  
*Discrete-Time Signal Processing, second edition.*  
Prentice-Hall, 1999.



J. Proakis and D. Manolakis.  
*Digital Signal Processing : Principles, Algorithms and Applications.*  
Prentice Hall, 1996.



B. Poart.  
*A Course in Digital Signal Processing.*  
John Wiley & Sons, 1997.



R. David S. Stearns.  
*Signal Processing Algorithms.*  
Prentice Hall, 1988.