

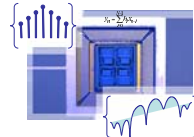
Signaux et Systèmes Discrets

Olivier Sentieys

ENSSAT - Université de Rennes 1
IRISA - Équipe de recherche R_2D^2

Olivier.Sentieys@enssat.fr
<http://r2d2.enssat.fr/enseignements/Tns>

22 février 2006



Plan

Introduction

Signaux à temps discrets

- Définition
- Opérations sur les signaux à temps discret
- Signaux à temps discret de base
- Propriétés des signaux à temps discret

Plan

Transformée en Z

- Définition de la transformée en Z
- Domaine de convergence \mathcal{D}_{CV}
- Propriétés de la TZ
- Transformée en Z inverse

Transformée de Fourier d'un signal discret

- Rappels sur les signaux continus
- TF d'un signal discret non périodique
- TF d'un signal discret périodique
- Condition d'existence de la TF
- Propriétés de la transformée de Fourier
- Transformée de Fourier discrète

Plan

Systèmes discrets

- Systèmes discrets linéaires invariants
- Représentation temporelle des systèmes discrets
- Analyse des systèmes discrets par la transformée en Z
- Représentation fréquentielle des systèmes discrets

Échantillonnage et reconstruction des signaux

- Historique du Théorème d'échantillonnage
- Échantillonnage idéal
- Théorème d'échantillonnage de Shannon
- Reconstruction du signal continu à partir de ses échantillons
- Exemple pratique d'échantillonnage
- Reconstruction réelle du signal continu

Introduction

Traitement (*numérique*) du signal (*numérique*) :

- **Modéliser** – ou identifier – consiste en l'analyse d'un signal ou d'un système, dans le domaine temporel ou fréquentiel (i.e. spectral). On parlera également d'estimation.
- **Synthétiser** – ou générer – un signal.
- **Transmettre** un ensemble de signaux sur un support.
- **Transformer** un ensemble de signaux à l'aide d'un système linéaire (filtrer, moduler, coder, ...) ou non linéaire ($(\cdot)^2$, $|\cdot|$, ...).

5 / 68

Classification des signaux (1/2)

- 1 Dimensionnalité = fonction de la dimension du signal ou des dimensions des variables du signal :
 - Signal scalaire pouvant prendre des valeurs réelles ou complexes : $x(t)$
 - Signal vectoriel pouvant prendre des valeurs réelles ou complexes : $[R, V, B] = TV(t)$
 - Signal mono-dimensionnel qui correspond à des fonctions à un seul argument, comme par exemple le temps
 - Signal multi-dimensionnel qui correspond à des fonctions à plusieurs arguments : $[I] = TV(t, x, y)$
- 2 Caractéristiques temporelles
 - Signaux à temps continu ou signaux *analogiques*. La variable $t \in \mathbb{R}$. On notera un signal analogique de la façon suivante : $s_a(t)$
 - Signaux à temps discret : ces signaux sont *définis* pour certaines valeurs de la variable t : $s(n) = s(nT) = s(t)|_{t=nT}$

6 / 68

Classification des signaux (2/2)

- 3 Valeurs prises par le signal
 - Signaux à valeurs continues pouvant prendre une valeur réelle dans un intervalle continu
 - Signaux à valeurs discrètes prenant seulement des valeurs parmi un ensemble fini de valeurs possibles : voir quantification
- 4 Prédicibilité des signaux
 - Signaux déterministes qui peuvent être représentés explicitement par une fonction mathématique
 - Signaux aléatoires qui évoluent dans le temps d'une manière imprévisible. Il est cependant possible de décrire mathématiquement certaines caractéristiques statistiques de ces signaux

7 / 68

1. Signaux à temps discrets

- 1 Définition
- 2 Opérations sur les signaux à temps discret
- 3 Signaux à temps discret de base
- 4 Propriétés des signaux à temps discret

8 / 68

1.1 Signaux à temps discret : définition

- Séquence \mathcal{X} de nombres dans laquelle le n ème nombre est $x(n)$. On écrira :

$$\mathcal{X} = \{x(n)\} \quad -\infty < n < \infty$$

Exemple de signal discret

- $x(n)$ est égal à la valeur du signal analogique $x_a(t)$ au temps $t = nT$, i.e.

$$x(n) = x_a(nT) \quad -\infty < n < \infty$$

- T : période d'échantillonnage, $f_e = \frac{1}{T}$: fréquence d'échantillonnage

Exemple de signal de parole : $T = ?$

9 / 68

1.2 Opérations sur les signaux à temps discret

- 1 +, -, × de signaux
- 2 +, -, × par une constante
- 3 Décalage de n_0 échantillons

$$y(n) = x(n - n_0)$$

- 4 Convolution
- 5 Corrélation
- 6 ...

10 / 68

1.3 Signaux à temps discret de base (1/2)

- 1 Impulsion unité $\delta(n)$, $\delta(n - k)$
- 2 Echelon unité $u(n)$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - k)$$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n - 1)$$

- 3 $x_1(n) = A\alpha^n$
 $x_2(n) = A\alpha^n u(n)$

11 / 68

1.3 Signaux à temps discret de base (2/2)

- 4 Sinusoïde, période $N = ?$

$$x_3(n) = A \cos(n\omega_0 + \varphi)$$

- 5 Signal complexe

$$x_4(n) = e^{jn\omega_0}$$

- 6 Cas général

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n - k).$$

e.g. $p(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n - 2) - 0.5\delta(n - 4)$

12 / 68

1.4 Propriétés des signaux à temps discret (1/2)

- 1 Signaux causaux

$$x(n) = 0, \quad \forall n < 0$$

- 2 Énergie totale : finie ou infinie

$$E(\infty) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1)$$

- 3 Puissance moyenne : finie ou infinie

$$P_m \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |x(n)|^2 \quad (2)$$

- 4 Périodique de période P : $x(n + P) = x(n) \forall n$ sinon $x(n)$ est aperiodique

1.4 Propriétés des signaux à temps discret (2/2)

- 5 Intercorrélation entre deux signaux $x(n)$ et $y(n)$

$$\mathcal{R}_{xy}(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n+k) = \mathcal{R}_{yx}(-k) \quad (3)$$

- 6 Autocorrélation d'un signal $x(n)$

$$\mathcal{R}_{xx}(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x(n+k) = \mathcal{R}_{xx}(-k) \quad (4)$$

- 7 Convolution linéaire entre deux signaux $x(n)$ et $y(n)$

$$\varphi_{xy}(k) = x(k) * y(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(k-n) \quad (5)$$

2. Transformée en Z

- 1 Définition de la TZ
- 2 Domaine de convergence
- 3 Propriétés de la transformée en Z
- 4 Transformée en Z inverse

2.1 Définition de la transformée en Z

La transformée en Z directe bilatérale d'un signal à temps discret $x(n)$ est définie par :

$$Z[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (6)$$

où z est une variable complexe ($z \in \mathbb{C}$) définie partout où cette série converge.

Les signaux discrets étant la plupart du temps causaux on définit plutôt la transformée en Z (dite unilatérale) par :

$$Z[x(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (7)$$

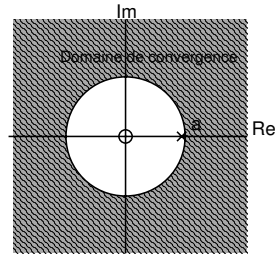
2.2 Domaine de convergence \mathcal{D}_{CV}

Dans le cas de la TZ unilatérale, le domaine de convergence correspond à l'extérieur du disque de convergence défini par $|z| > r$.

Le critère de Cauchy appliqué à la TZ donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} = r$$

Exemple : $x(n) = a^n u(n)$



Domaine de convergence avec $r = a$

17 / 68

2.3 Propriétés de la TZ (1/2)

1 Linéarité

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \Leftrightarrow X(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$$

2 Théorème du retard

$$Z[x(n - k)] = z^{-k} X(z)$$

3 Théorème de l'avance

$$Z[x(n + k)] = z^{+k} X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{k-n}$$

18 / 68

2.3 Propriétés de la TZ (2/2)

Dérivation dans l'espace en z

$$Z[n \cdot x(n)] = Y(z) = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

5 Théorème de la valeur initiale

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

6 Théorème de la valeur finale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) X(z)$$

7 Théorème de la convolution linéaire discrète

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \Leftrightarrow X(z) = X_1(z) X_2(z)$$

19 / 68

2.4 Transformée en Z inverse

Soit $X(z)$ la transformée en Z du signal $x(n)$. On définit la transformée en Z inverse, la relation déterminant $x(n)$ à partir de $X(z)$ telle que :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1} X(z) dz \quad (8)$$

Il existe trois principales méthodes :

- 1 l'intégration sur un contour fermé en utilisant le calcul des résidus,
- 2 le développement en puissance de z et de z^{-1} ,
- 3 le développement en fractions élémentaires.

20 / 68

TZ inverse par la méthode des résidus (1/2)

$$x(n) = \sum_{\text{Tous les pôles } p_i \text{ de } R(z)} \text{Résidus de } R(z) \text{ aux pôles } p_i \quad (9)$$

avec $R(z) = z^{n-1}X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ sous forme fractionnelle.
 On notera plutôt :

$$x(n) = \sum_{\forall p_i \in \mathcal{D}_{CV}} \text{Res}(z^{n-1}X(z), p_i) \quad (10)$$

❶ Pôles simples de $R(z)$: p_i tel que $D(z)|_{p_i} = 0$

$$\text{Res}(R(z), p_i) = \left[(z - p_i) \frac{N(z)}{D(z)} \right]_{z=p_i} \quad (11)$$

21 / 68

TZ inverse par la méthode des résidus (2/2)

❷ Pôles multiples d'ordre m de $R(z)$.

Si $D(z) = (z - p_i)^m F(z)$ avec $F(p_i) \neq 0$ alors

$$\text{Res}(R(z), p_i) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - p_i)^m \frac{N(z)}{D(z)} \right]_{z=p_i} \quad (12)$$

Exemples :

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

22 / 68

TZ inverse par division polynômiale

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_k z^{-k} + \dots$$

alors

$$x(n) = c_n$$

Exemples :

$$X(z) = \frac{0.5z}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{0.5z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

23 / 68

TZ inverse par décomposition en fonctions rationnelles

On décompose $X(z)$ selon :

$$z^{-1}X(z) = \alpha_1 \frac{1}{z - p_1} + \alpha_2 \frac{1}{z - p_2} + \dots \quad (13)$$

On aura alors par TZI :

$$x(n) = \alpha_1 p_1^n + \alpha_2 p_2^n + \dots \quad (14)$$

Exemple : $X(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$

Attention au cas des pôles doubles (voir le détail dans le cours de Mathématiques sur les fonctions holomorphes).

24 / 68

3. Transformée de Fourier d'un signal discret

- ① Rappels sur les signaux continus
- ② *TF* d'un signal discret non périodique
- ③ *TF* d'un signal discret périodique
- ④ Condition d'existence de la *TF*
- ⑤ Propriétés de la transformée de Fourier
- ⑥ Transformée de Fourier discrète

3.1 Rappels sur les signaux continus

Soit un signal analogique $x_a(t)$ dont la transformée de Fourier est définie par :

$$X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt \quad (15)$$

avec $\omega = 2\pi f$.

On retrouve le signal temporel à partir de sa transformée par la transformée de Fourier inverse définie par la relation suivante :

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (16)$$

3.2 *TF* d'un signal discret non périodique (1/2)

Pour un signal $x(n)$ discret quelconque non périodique, sa transformée de Fourier (*TF*) s'écrit :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \quad (17)$$

$X(e^{j\Omega})$ peut être exprimé à partir de la transformée en Z par la relation :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \Big|_{z=e^{j\Omega}} = X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} \quad (18)$$

- Cette équation implique que le *TF* n'existe que si le cercle unité, caractérisé par $z = e^{j\Omega}$, appartient au domaine de convergence de $X(z)$.

3.2 *TF* d'un signal discret non périodique (2/2)

- $X(\Omega)$ est *périodique* de période 2π . Ceci implique que **le spectre d'un signal discret est périodique**.

La *TF* inverse est obtenue à partir de la transformée en Z inverse de $X(z)$. On obtient :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega \quad (19)$$

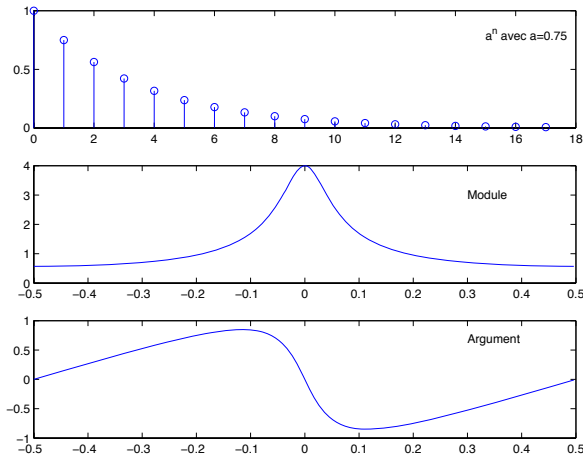
Sur la variable *fréquence* f , la *TF* périodique de période $f_e = 1/T$ s'écrit :

$$X(f) = X(e^{j2\pi f T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi f n T} \quad (20)$$

$$x(n) = \frac{1}{f_e} \int_0^{f_e} X(f) e^{j2\pi f n T} df \quad (21)$$

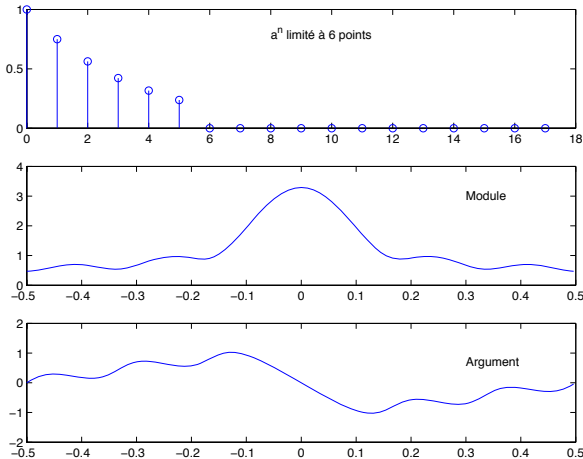
TF d'un signal discret non périodique

Exemple : $x(n) = a^n u(n)$



TF d'un signal discret non périodique

Exemple : $x(n) = a^n$, pour $n = 0 \dots N - 1$



3.3 TF d'un signal discret périodique (1/2)

Pour un signal $x_p(n)$ discret périodique de période N , une décomposition en série de Fourier doit être utilisée sous la forme :

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) \cdot e^{-2j\pi \frac{n \cdot k}{N}}, \quad k = 0, 1 \dots N - 1 \quad (22)$$

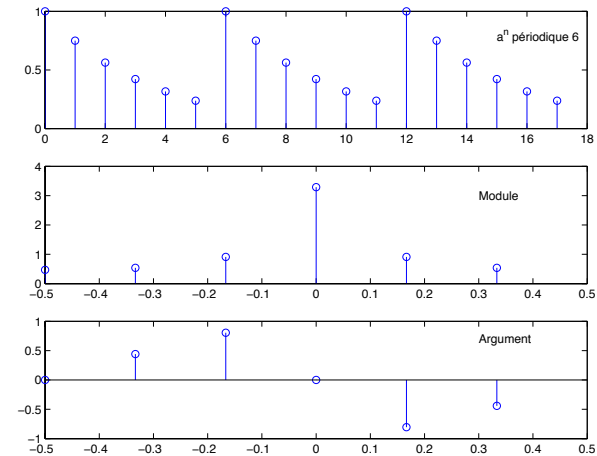
$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \cdot e^{2j\pi \frac{n \cdot k}{N}}, \quad n = 0, 1 \dots N - 1 \quad (23)$$

Sa Transformée de Fourier s'écrit alors :

$$X_p(e^{j\Omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k) \delta\left(\Omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \quad (24)$$

3.3 TF d'un signal discret périodique (2/2)

Exemple : $x(n) = a^n$, pour $n = 0 \dots N - 1$, périodique N



3.4 Condition d'existence de la TF (1/3)

Une condition suffisante à la convergence de la TF peut être déterminée comme suit ($x(n)$ est dite *absolument sommable*) :

$$|X(e^{j\Omega})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

De plus, la série converge uniformément vers une fonction continue de Ω .

Certaines séquences ne sont pas *absolument sommables* mais sont de *carré sommable* (ou à énergie finie), i.e.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \quad (25)$$

3.4 Condition d'existence de la TF (2/3)

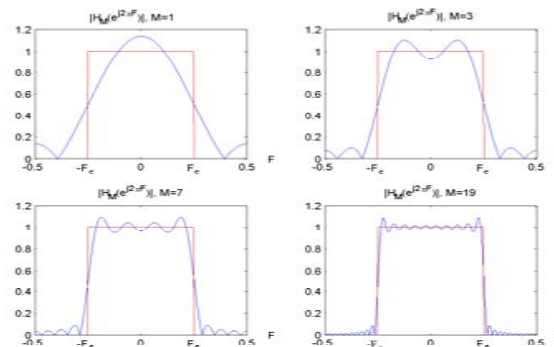
Ces séquences peuvent être représentées par une transformée de Fourier mais sans convergence uniforme de la somme infinie définissant $X(e^{j\Omega})$. Cela signifie que l'erreur $|X(e^{j\Omega}) - X_M(e^{j\Omega})|$ ne tend pas vers 0 quand $M \rightarrow \infty$ mais que par contre l'énergie de l'erreur tend vers 0.

Exemple :

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \Rightarrow h(n) = \frac{\sin n\Omega_c}{n\pi}, \quad -\infty < n < \infty$$

3.4 Condition d'existence de la TF (3/3)

$$H_M(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\sin n\Omega_c}{n\pi} e^{-jn\Omega}$$



3.5 Propriétés de la transformée de Fourier (1/2)

- Linéarité ou superposition

$$a.x(n) + b.y(n) \Rightarrow a.X(e^{j\Omega}) + b.Y(e^{j\Omega})$$

- Décalage en temps-fréquence

$$x(n - n_0) \Rightarrow e^{-jn_0\Omega} X(e^{j\Omega}) \quad x(n)e^{jn_0\Omega} \Rightarrow X(e^{j(\Omega - \Omega_0)})$$

- Dérivation en fréquence

$$n.x(n) \Rightarrow j \frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}$$

- Produit de convolution

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_1(i).x_2(n - i) \Rightarrow X_1(e^{j\Omega}).X_2(e^{j\Omega})$$

3.5 Propriétés de la transformée de Fourier (2/2)

- Théorème du fenêtrage (ou de la modulation)

$$x_1(n) \cdot x_2(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\Theta}) \cdot X_2(e^{j(\Omega-\Theta)}) d\Theta$$

- Théorème de Parseval (conservation de la puissance d'un signal)

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |x(i)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

- Si $x(n)$ est une suite réelle, alors sa TF est symétrique conjuguée (partie réelle et module pairs ; partie imaginaire et phase impaires)

$$x(n) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X(e^{j\Omega}) = X^*(e^{-j\Omega})$$

- Densité spectrale d'énergie (pour des signaux à énergie finie)

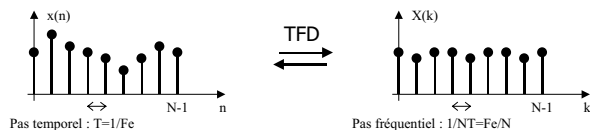
$$S_E(f) = |X(e^{j2\pi fT})|^2$$

37 / 68

3.6 Transformée de Fourier discrète

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (26)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j \frac{2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (27)$$



38 / 68

Propriétés de la TFD

- Décalage en temps-fréquence $x(n - n_0) \Leftrightarrow e^{-2j\pi \frac{kn_0}{N}} X(k)$

- Produit de convolution circulaire

$$x_1(n) \circledast x_2(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x_1(i) \cdot x_2(n - i) \Leftrightarrow X_1(k) \cdot X_2(k)$$

avec $x_1(n)$ et $x_2(n)$ des signaux périodiques de période N .

- Théorème de Parseval (conservation de la puissance d'un signal)

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(i)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

- Propriétés de symétrie $x(n) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X(k) = X^*(N - k)$

- Calcul rapide (*Fast Fourier Transform, FFT*)

39 / 68

4. Systèmes discrets

- 1 Systèmes linéaires invariants
- 2 Représentation temporelle
- 3 Analyse par transformée en Z
- 4 Représentation fréquentielle

40 / 68

4.1 Systèmes discrets linéaires invariants

- 1 Un signal d'entrée $e(n)$ est *transformé* en un signal de sortie $s(n)$:

$$s(.) = \mathcal{T}[e(.)]$$

- 2 Un système est dit *invariant* en temps (ou au décalage) ssi :

$$e(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} s(n) \Rightarrow e(n-k) \xrightarrow{\mathcal{T}} s(n-k) \quad \forall e(.), \forall k \in (\mathbb{N})$$

- 3 Un système est *linéaire* ssi :

$$\mathcal{T}[a \times e_1(n) + b \times e_2(n)] = a \times \mathcal{T}[e_1(n)] + b \times \mathcal{T}[e_2(n)]$$

$$\forall e_1(.), \forall e_2(.), \forall (a, b)$$

41 / 68

Systèmes linéaires invariants (SLI)

- 1 Causalité : un système est *causal* si un changement en sortie ne *précède* pas un changement en entrée. Un système linéaire invariant est causal si et seulement si $h(n) = 0$ pour $n < 0$.
- 2 Stabilité : un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée. La condition de stabilité d'un système s'écrit :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < +\infty$$

Exemples : retard idéal, moyennneur, sans mémoire, ...

42 / 68

Représentation temporelle des systèmes discrets

Stratégie générale d'analyse d'un système linéaire invariant :

- 1 Décomposition du signal d'entrée en une somme de signaux ou fonctions de base.

$$e(n) = \sum_k \alpha_k e_k(n)$$

- 2 Etude de la réponse du système pour l'ensemble des fonctions de base.

$$s_k(n) = \mathcal{T}[e_k(n)]$$

- 3 Reconstitution de la sortie en appliquant le principe de superposition.

$$s(n) = \sum_k \alpha_k s_k(n)$$

43 / 68

Produit de convolution (1/2)

$$e(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\delta(n-k)$$

$$s(n) = \mathcal{T}[e(n)] = \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\mathcal{T}[\delta(n-k)]$$

On pose $h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]$, alors

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)h(n-k) = e(n) * h(n) = h(n) * e(n)$$

44 / 68

Produit de convolution (2/2)

Un système discret est donc entièrement caractérisé par sa *réponse impulsionnelle* $h(n)$. L'opération $*$ liant la sortie $s(n)$ à l'entrée $e(n)$ et à la réponse impulsionnelle du système $h(n)$ est appelée produit de convolution.

Exemple

| | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------------|
| $h(n)$: réponse im- pulsionnelle | $e(n)$: entrée du système | $s(n)$: réponse du système à l'entrée |
|--------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------------|

45 / 68

Equation aux différences finies

Une équation aux différences finies peut s'écrire sous la forme :

$$s(n) = - \sum_{k=1}^N a_k s(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k e(n-k) \quad (28)$$

- Système *récurif* ou *non-récurif*
- Réponse impulsionnelle infinie (RII ou IIR) ou finie (RIF ou FIR)

46 / 68

Fonction de transfert en z (1/2)

La fonction de transfert en z $H(z)$ d'un système est définie par :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} \quad (29)$$

$H(z)$ est également la transformée en Z de la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système.

À partir de l'équation aux différences (28), on obtient :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (30)$$

ou

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{N-k}}{z^N + \sum_{k=1}^N a_k z^{N-k}} \quad (31)$$

47 / 68

Fonction de transfert en z (2/2)

ou en faisant apparaître les pôles et les zéros :

$$H(z) = b_0 z^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)} = b_0 \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i) z^{-1}} \quad (32)$$

L'équation précédente permet de tracer dans le plan complexe le **diagramme des pôles et des zéros**.

Exemple :

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}}$$

48 / 68

4.3 Analyse des SLD par la transformée en Z (1/3)

Soit le système décrit par $S(z) = H(z)E(z)$, il s'agit de **caractériser** $s(n)$.

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \quad E(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

On a donc :

$$S(z) = \frac{N(z)P(z)}{D(z)Q(z)}$$

$$s(n) = TZ^{-1}[S(z)]$$

5.1 Historique : reconstruction (3/3)

Classe de fonctions de Paley-Wiener (largeur de bande limitée) regroupe les fonctions telles que :

$$PW_B = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp } \hat{f} \subseteq [-\sigma, \sigma] \right\},$$

où \hat{f} est la transformée de Fourier définie dans $L^1(\mathbb{R})$, i.e. la définition usuelle de la transformée et $\text{supp } \hat{f}$ est le plus petit support de \hat{f} . Le théorème nous conduit à la série cardinale utilisée pour reconstruire la fonction originale :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{w}\right) \text{sinc}\left(t - \frac{n}{w}\right) \quad (33)$$

57 / 68

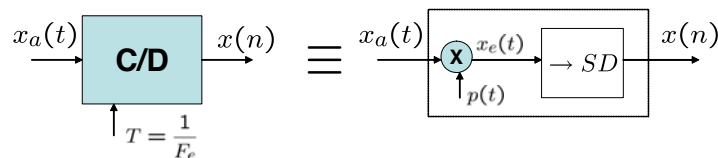
5.2 Échantillonnage idéal (1/2)

Soit un signal analogique $x_a(t)$ défini par sa TF :

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (34)$$

L'échantillonnage de $x_a(t)$ est défini par $x(n) = x_a(t)|_{t=nT}$
 Le signal discret $x(n)$ est défini par :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (35)$$



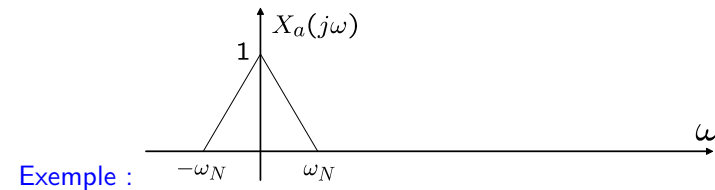
58 / 68

5.2 Échantillonnage idéal (2/2)

On trouve la relation suivante entre les TF de $x(n)$ et de $x_a(t)$:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{j\Omega}{T} + \frac{j2\pi k}{T}\right) \quad (36)$$

Le spectre du signal numérique est donc composé d'une somme infinie de versions décalées du signal analogique.



59 / 68

5.3 Théorème d'échantillonnage de Shannon

Il est possible de reconstruire le signal continu à partir du signal discret si le signal analogique est à bande limitée, i.e. $X(\omega)$ est nulle pour $|\omega| > \omega_{\max}$

On obtient alors :

$$\omega_{\max} < \frac{2\pi}{T} - \omega_{\max} \quad (37)$$

$$2f_{\max} < f_N \quad \text{avec} \quad f_N = \frac{1}{T} \quad (38)$$

f_N est la fréquence limite d'échantillonnage ou encore appelée fréquence de Nyquist.

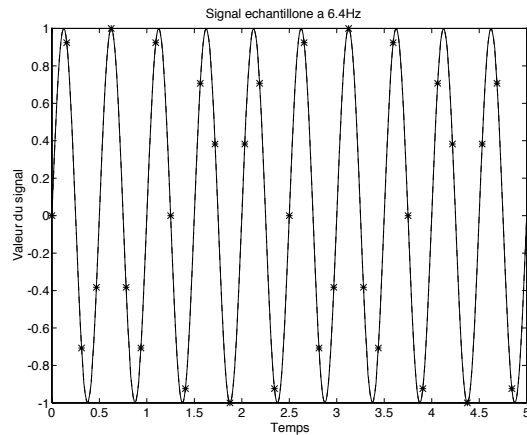
60 / 68

es signaux
à partir de ses échantillons

n du signal à partir de ses échantillons

$$H_r(j\omega)$$

Sinusoïde de fréquence $2Hz$, $f_e = 6.4Hz$

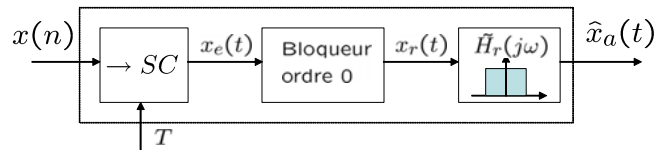


65 / 68

5.6 Reconstruction réelle du signal continu

Reconstruction réelle dans le cas d'une conversion numérique analogique avec blocage d'ordre 0 : le signal $x(n)$ est converti en un train d'impulsions $x_e(t)$, puis transformé en $x_r(t)$ par un bloqueur d'ordre 0 :

$$h_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Il existe un filtre de reconstruction idéal $\tilde{H}_r(j\omega)$ permettant de reconstruire le signal analogique de sortie $\hat{x}_a(t)$ de façon parfaite, en compensant l'influence du bloqueur $h_0(t)$.

66 / 68

Pour plus d'informations...

- 📖 M. Bellanger.
Traitement Numérique du Signal.
Masson, 1987.
- 📖 M. Van Den Enden and M. Werdeckh.
Traitement Numérique du Signal : une introduction.
Masson, 1992.
- 📖 D. Hanselman and B. Littlefield.
Matlab : the language of technical computing.
Prentice Hall, 1997.
- 📖 M. Kunt and al.
Techniques modernes de Traitement Numérique du Signal.
Presses Romandes, Masson, 1991.
- 📖 C. Marven and G. Ewers.
A simple approach to Digital Signal Processing.
Texas Instruments Mentors, 1993.

67 / 68

Pour plus d'informations...

- 📖 J. McClellan, R. Schafer, and M. Yoder.
DSP First : a Multimedia Approach.
Prentice Hall, 1998.
- 📖 A. V. Oppenheim and R. W. Schafer.
Discrete-Time Signal Processing, second edition.
Prentice-Hall, 1999.
- 📖 J. Proakis and D. Manolakis.
Digital Signal Processing : Principles, Algorithms and Applications.
Prentice Hall, 1996.
- 📖 B. Poart.
A Course in Digital Signal Processing.
John Wiley & Sons, 1997.
- 📖 R. David S. Stearns.
Signal Processing Algorithms.
Prentice Hall, 1988.

68 / 68