

Logique DEFI TD 1

Exercice 1

Déterminez si les phrases suivantes sont des formules, en utilisant la définition par induction des formules du calcul propositionnel.

1. $(p \vee q) \wedge (r \rightarrow s)$
2. $\neg(\neg p)$
3. $p \neg \vee \wedge q$
4. $\rightarrow pq$
5. $p \neg q$
6. $\neg p \leftrightarrow p$

Exercice 2

On note p la proposition “je suis riche” et q la proposition “je me sens bien”.

1. Traduisez les formules suivantes en langue naturelle :
 - $p \wedge q$
 - $q \rightarrow p$
 - $\neg p \rightarrow \neg q$
 - $q \leftrightarrow \neg p$

2. Traduisez en formules les phrases suivantes :

- Je me sens bien et je ne suis pas riche.
- Si je me sens bien alors je ne suis pas riche.

Exercice 3

On considère l'ensemble de propositions $\text{Prop} = \{p_i \mid i = 1, 2, 3\}$. Donnez la table de vérité des formules suivantes :

1. $p_1 \wedge \neg p_2$
2. $(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_1 \rightarrow p_2)$

3. $\neg(p_1 \rightarrow p_2)$
4. $\neg p_1 \rightarrow \neg p_2$.
5. $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$
6. $\neg p_2 \rightarrow \neg p_1$.

Exercice 4

- Prouvez ou refutez les équivalences suivantes :

1. $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
2. $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
3. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
4. $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$

- Démontrez trois autres équivalences de votre choix.

Exercice 5

1. Discutez de la représentation d'une formule par un arbre, et définissez par induction l'ensemble des formules sur un ensemble fixé Prop de propositions.
2. Lorsque les formules sont représentées par des arbres :
 - Donnez une définition par induction de la hauteur d'une formule.
 - Pour chaque $\bowtie \in \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$, définissez la fonction qui, étant donnée une formule, renvoie son nombre d'occurrences de \bowtie .

Exercice 6

Montrez par induction sur les formules que toute formule est équivalente à une formule ne contenant que des propositions, et des symboles \neg et/ou \wedge .