TD 1 : Induction et calcul propositionnel

1. Formules du calcul propositionnel

Parmi les expressions suivantes, quelles expressions sont des formules du calcul propositionnel ? Pour chaque formule, la représenter sous la forme d'un arbre.

1.1 $r \vee (p \wedge \neg((\wedge q) \rightarrow \neg r))$

1.2 $p \wedge (r \wedge ((\neg q) \rightarrow \neg p))$

1.3 $((q \vee \neg p) \rightarrow (\neg\neg q \vee \neg p)) \wedge r$

1.4 $((q \vee p)\neg q \wedge p) \rightarrow r$

1.5 $\forall x\, p(x) \wedge q(x)$

1.6 $(\neg p \vee p \vee q) \rightarrow (\neg r \wedge \neg q)$

2. Définitions par induction

Le but de cet exercice est de se familiariser avec les définitions par induction structurelle sur les formules de la logique propositionnelle.

2.1 Définir la longueur d'une formule de la logique propositionnelle.

2.2 Définir l'ensemble des sous-formules d'une formule de la logique propositionnelle.

2.3 Définir le nombre d'occurrences d'une variable propositionnelle p dans une formule de la logique propositionnelle.

2.4 Définir l'ensemble des modèles d'une formule de la logique propositionnelle.

3. Définitions par induction

Le but de cet exercice est de se familiariser avec les définitions par induction structurelle sur les formules de la logique propositionnelle.

1. Définir le nombre de connecteurs logiques d'une formule.
2. Définir la hauteur d'une formule.

4. Substitution

On définit la *substitution* de la variable propositionnelle p par la formule θ dans un formule φ, notée $\varphi[p := \theta]$, comme la formule obtenue en remplaçant dans φ toute occurrence de p par θ.

4.1 Donner la définition par induction de $\varphi[p := \theta]$.

4.2 Démontrer que pour toute variable propositionnelle p, toutes formules φ, ψ, et θ, on a $\psi \equiv \theta$ implique $\varphi[p := \psi] \equiv \varphi[p := \theta]$. On rappelle que le symbole $\equiv$ est *l'équivalence de formules* qui signifie que les deux formules ont les même modèles.

5. Qui a commis le meurtre ?

Il y a trois suspects pour un meurtre : Adams, Brown, et Clark. Adams dit : « Ce n'est pas moi. La victime était une vieille connaissance de Brown. Mais Clark la détestait. » Brown déclare : « Ce n'est pas moi. Je ne connaissais même pas cette personne. D'ailleurs je n'étais pas en ville cette semaine. » Clark dit : « Ce n'est pas moi. J'ai vu Adams et Brown en ville avec la victime ce jour-là ; l'un deux doit être le coupable. » Supposez que les deux innocents disent la vérité, mais pas nécessairement le coupable. Qui est a commis le meurtre ?

6. Le principe d'induction bien fondée

On considère un ordre (non-strict) $\leq$ sur un ensemble E. On note $y < x$ pour dire que y est strictement plus petit que x, c'est-à-dire que $y \neq x$ et $y \leq x$.
On dit qu'un ordre $\leq$ sur un ensemble E est *bien fondé* si et seulement si tout sous-ensemble non vide de E possède un élément minimal. Un élément d'un ensemble S est dit *minimal* s'il n'existe pas d'élément strictement plus petit dans S.
Soit un ordre bien fondé $\leq$ sur un ensemble E et une propriété P sur les éléments de E. Le *principe d'induction bien fondée* s'énonce comme suit :

si pour tout $x \in E$, on peut établir que
lorsque chaque élément $y < x$ satisfait P alors x lui-même satisfait P,
alors on peut en déduire que tous les élément de E satisfont P.

6.1 Démontrez la correction de ce principe.

6.2 Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_1 = 18 \\ u_{n+1} = 6u_n - 9u_{n-1} \quad \text{pour tout } n \leq 0. \end{cases}$$

Montrez par induction bien fondée [1] que pour tout n, $u_n = (n+5)3^n$.

6.3 Montrez la même chose par récurrence (simple).

1. sur les entiers on parle de *récurrence forte.*