TD 2 : logique propositionnelle, syntaxe et sémantique

1. Modèles d'une formule

Donner l'ensemble de tous les modèles de la formule $((p \to q) \vee (\neg p \to \neg q)) \wedge (q \wedge r \to \neg p)$ lorsque $AP = \{p, q, r\}$.

2. Complétude fonctionnelle

On veut montrer le théorème suivant :
Théorème. Supposons $AP = \{p_1, \ldots, p_n\}$ fini. Soit Val l'ensemble des valuations sur AP. Toute fonction f de Val dans $\{0, 1\}$ est la valeur de vérité d'une formule F sur AP.

2.1 Montrer le théorème en utilisant une récurrence sur le nombre de variables propositionnelles AP.

3. Système complet

On rappelle qu'un système de connecteurs est dit *(fonctionnellement) complet* ssi toute formule est équivalente à une formule ne s'écrivant qu'avec des connecteurs dudit système.

3.1 Montrer que le système $\{\to, \perp\}$ est complet.

3.2 Montrer que le système $\{\neg, \wedge\}$ est complet.

3.3 Donner un connecteur logique binaire qui est fonctionnellement complet. Justifier.

3.4 ♣ Montrer que le système $\{\leftrightarrow, \neg\}$ n'est pas complet.

4. Forme Normale Conjonctive

4.1 Rappeler la définition d'une formule en forme normale conjonctive (FNC).

4.2 Rappeler les étapes de la mise en forme normale conjonctive d'une formule du calcul propositionnel.

4.3 Appliquer la méthode de mise en forme normale conjonctive à la formule $((p \wedge q) \vee r) \to r$.

5. Parité

On souhaite étudier la taille d'une formule φ_n qui représente la fonction parité sur les n variables propositionnelles $p_1, \ldots, p_n$. Plus précisément, $\nu \models \varphi_n$ ssi le cardinal de $\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \nu(p_i) = 1\}$ est pair.

5.1 Donner une formule φ_n de taille $O(n^2)$.

5.2 Donner un circuit qui représente la fonction parité de taille $O(n)$ et de profondeur $O(\log n)$.

5.3 Montrer que toute forme normale conjonctive qui représente la fonction parité est de taille plus grande ou égale à $n2^{n-1}$.

5.4♣ ♣ ♣ Montrer que tout circuit qui représente la fonction parité de profondeur constante est de taille exponentielle.

6. Théorème de compacité

Le théorème de compacité du calcul propositionnel énonce qu'un ensemble Γ de formules est satisfaisable si et seulement si tout sous-ensemble fini de Γ est satisfaisable.

Il existe plusieurs preuves de ce résultat. Dans cet exercice, nous étudions un argument topologique.

L'ensemble $\{0,1\}$ est muni de la *topologie discrète*, c'est-à-dire celle pour laquelle tout sous-ensemble est un ouvert ; $\{0,1\}$ est alors compact. On munit ensuite l'ensemble $\{0,1\}^{AP}$, i.e. l'ensemble des valuations sur AP de la *topologie produit* : les ouverts sont les unions (arbitraires) de produits $\Pi_{p \in AP} \mathcal{O}_p$ dans lesquels $\mathcal{O}_p \subsetneq \{0,1\}$ pour un nombre fini de propositions p. On admettra le *théorème de Tychonoff* qui énonce que tout produit de compacts est compact. Ainsi, $\{0,1\}^{AP}$ est compact.

6.1 Montrer que, pour toute formule φ, l'ensemble des valuations qui satisfont φ est un fermé de $\{0,1\}^{AP}$.

6.2 Montrer que tout ensemble de formules insatisfaisable contient un sous-ensemble fini insatisfaisable. En déduire le théorème de compacité.