TD 4 : Termes

1. Manipulation des termes

Soient $\mathcal{F}_1 = \{a(0), f(3), g(1)\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{0(0), 1(0), +(2), succ(1)\}$ deux signatures. Soit $X = \{x, y\}$ un ensemble de variables.

1.1 Donner des exemples de termes clos et non clos de $\mathcal{T}(\mathcal{F}_1, X)$ (resp. $\mathcal{T}(\mathcal{F}_2, X)$) sur les signatures $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$) munies de l'ensemble de variables X.

1.2 Représenter ses termes sous la forme d'arbre.

2. Termes et leurs sémantiques

2.1 Expliquer comment on voit le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ comme une $\mathcal{F}$-algèbre.

2.2 Supposons que pour toute $\mathcal{A}$-affectation λ, on ait :

(i) $[\![f(x, f(y, z))]\!]_{\mathcal{A},\lambda} = [\![f(f(x, y), z))]\!]_{\mathcal{A},\lambda}$ (associativité)

(ii) $[\![f(e, x)]\!]_{\mathcal{A},\lambda} = [\![x]\!]_{\mathcal{A},\lambda}$ (neutre à gauche)

(iii) $[\![f(i(x), x)]\!]_{\mathcal{A},\lambda} = [\![e]\!]_{\mathcal{A},\lambda}$ (inverse à gauche)

Montrer que pour toute $\mathcal{A}$-affectation λ, on a $[\![f(x, e)]\!]_{\mathcal{A},\lambda} = [\![x]\!]_{\mathcal{A},\lambda}$.

3. Théorie équationnelle

Soit s et t deux termes sur une signature $\mathcal{F}$. Une identité (ou équation) $s = t$ est vraie dans une $\mathcal{F}$-algèbre $\mathcal{A}$ si $[\![s]\!]_{\mathcal{A},\lambda} = [\![t]\!]_{\mathcal{A},\lambda}$, pour toute $\mathcal{A}$-affectation λ. On dit alors que $\mathcal{A}$ *satisfait* $s = t$, et on le notera $\mathcal{A} \models s = t$. Si E est un ensemble d'équations, on écrit $\mathcal{A} \models E$ pour dire que $\mathcal{A} \models s = t$ pour toute équation $s = t$ dans E.
Soit E un ensemble d'équations E. On note $E \models s = t$ si, pour toute $\mathcal{F}$ algèbre $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models E$ implique $\mathcal{A} \models s = t$. Pour montrer $E \models s = t$, on utilise les règles d'inférence suivantes :

$$\frac{}{s = s}\ \text{Réflexivité} \qquad \frac{s = t \quad t = u}{s = u}\ \text{Transitivité}$$

$$\frac{s = t}{t = s}\ \text{Symétrie} \qquad \frac{s = t}{u[s\sigma]_p = u[t\sigma]_p}\ \text{Remplacement}$$

Si une égalité $s = t$ se déduit d'un ensemble d'équations E par les règles ci-dessus, on note $E \vdash s = t$. Birkhoff a démontré le résultat suivant que l'on admettra :

Théorème 1 (Birkhoff, 1933) *$E \vdash s = t$ si et seulement si $E \models s = t$.*

On considère la signature $\mathcal{F} = \{e(0), i(1) \star (2)\}$ et l'ensemble d'équations E suivant :

$$\begin{array}{lll}
(E_1) & x \star (y \star z) = (x \star y) \star z & \text{(associativité)} \\
(E_2) & x \star e = x & \text{(élément neutre)} \\
(E_3) & e \star x = x & \\
(E_4) & x \star i(x) = e & \text{(symétrique)} \\
(E_5) & i(x) \star x = e & \\
(E_6) & x \star x = e & \text{(ordre 2)}
\end{array}$$

3.1 Montrer que tout groupe où tous les éléments sont d'ordre 2 est abélien grâce à la correction des règles.

4. Unification syntaxique

On s'intéresse à *unifier* des termes, c'est-à-dire à trouver une substitution qui les rende égaux. Un problème d'unification E un ensemble fini $E = \{(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n)\}$ où les $t_1, \ldots, t_n$ et les $u_1, \ldots, u_n$ sont des termes. On le note :

$$\{t_1 \stackrel{?}{=} u_1, \ldots, t_n \stackrel{?}{=} u_n\}.$$

On dira que E est *unifiable* s'il existe une substitution σ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $t_i\sigma = u_i\sigma$. Une telle substitution s'appelle un *unificateur*.

4.1 Montrer que $\{f(x, h(g(b))) \stackrel{?}{=} f(g(a), h(y))\}$ est unifiable.

4.2 Montrer que $\{x \stackrel{?}{=} f(x)\}$ n'est pas unifiable.

Les transformations ci-dessous donnent un algorithme calculant un unificateur, s'il en existe un.

Supprimer	$E \sqcup \{t \stackrel{?}{=} t\}$	$\Rightarrow$	E
Décomposer	$E \sqcup \{f(\vec{t}) \stackrel{?}{=} f(\vec{u})\}$	$\Rightarrow$	$E \cup \{t_1 \stackrel{?}{=} u_1, \ldots, t_n \stackrel{?}{=} u_n\}$
Échanger	$E \sqcup \{f(\vec{t}) \stackrel{?}{=} x\}$	$\Rightarrow$	$E \cup \{x \stackrel{?}{=} f(\vec{t})\}$
Éliminer	$E \sqcup \{x \stackrel{?}{=} t\}$ si x n'apparaît pas dans t	$\Rightarrow$	$E[x \mapsto t] \cup \{x \stackrel{?}{=} t\}$
Conflit	$E \sqcup \{f(\vec{t}) \stackrel{?}{=} g(\vec{u})\}$ avec $f \neq g$	$\Rightarrow$	non unifiable
Vérifier	$E \sqcup \{x \stackrel{?}{=} t\}$ si x apparaît dans t	$\Rightarrow$	non unifiable

4.3 Appliquer l'algorithme sur $\{f(x, h(g(b))) \stackrel{?}{=} f(g(a), h(y))\}$.

4.4 Trouver des exemples intéressants qui mènent à non unifiable.

4.5 Montrer la terminaison de l'algorithme.

L'algorithme, s'il ne mène pas à non unifiable, retourne un *problème d'unification en forme résolue*, c'est-à-dire un problème d'unification de la forme

$$\{x_1 \stackrel{?}{=} t_1, \ldots, x_n \stackrel{?}{=} t_n\}$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont des variables qui n'apparaissent dans aucun des t_j.

4.6 Donner un unificateur d'un problème d'unification en forme résolue.

4.7 Montrer la correction de l'algorithme.

En fait, s'il est non vide, l'ensemble des unificateurs d'un problème E, se "résume" par un *unificateur principal*. Un unificateur σ de E est principal si σ est un unificateur de E et si pour tout unificateur α de E, il existe une substitution β telle que $\alpha = \sigma\beta$.

4.8 En utilisant l'algorithme, en déduire que si problème d'unification E est unifiable, alors il admet un unificateur principal.