Devoir sur table du 20 avril 2018

Documents autorisés.

Difficulté 1

1. L'association des Informaticiens de Softwareland est dirigée par trois directions : scientifique, financière, et générale. Le règlement intérieur spécifie que (1) Les membres de la direction générale sont choisis parmi ceux de la direction financière, (2) Nul ne peut être membre de la direction générale et de la direction scientifique s'il n'est pas membre de la direction financière, et (3) Aucun membre de la direction scientifique ne peut être membre de la direction financière.

1.1 Donner une spécification de ce règlement en calcul propositionnel.

1.2 Proposer un règlement plus simple équivalent. Justifier.

2. On considère un langage du premier ordre avec les deux prédicats $P(1)$ et $A(2)$ (donc d'arité respective 1 et 2), et le prédicat d'égalité $=$. Écrire une formule de la logique du premier ordre pour traduire chacun des énoncés suivants.

1. Il existe au moins un objet qui vérifie P.
2. Il existe au plus un objet qui vérifie P.
3. Il n'en existe pas ou il en existe un seul (comparer avec la phrase précédente) qui vérifie P.
4. Il existe au moins deux objets (sous-entendu distincts) qui vérifient P.
5. Il existe au plus deux objets qui vérifient P.
6. Il existe au plus un x tel qu'il existe au plus un y pour lequel $A(x, y)$.
7. Il existe au plus un y tel qu'il existe au plus un x pour lequel $A(x, y)$.

Difficulté 2

3. On considère l'arbre de preuve suivant en déduction naturelle (logique classique) pour une formule sur un langage du premier ordre, avec $\Gamma = \{\exists x A \wedge \exists x B\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \exists x A \wedge \exists x B}}{\Gamma \vdash \exists x A} \quad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \exists x A \wedge \exists x B}}{\Gamma \vdash \exists x B} \quad \dfrac{}{\Gamma, B \vdash B}}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash \exists x (A \wedge B)}}{\vdash \exists x A \wedge \exists x B \Rightarrow \exists x (A \wedge B)}$$

3.1 Préciser les règles utilisées dans cette preuve.

3.2 Commenter le résultat obtenu.

4. À une formule quelconque φ du calcul propositionnel *en forme normale négative* dont les connecteurs sont parmi $\vee$, $\wedge$, et $\neg$, on associe la formule φ^* comme le résultat de l'échange de $\wedge$ et $\vee$ et du remplacement de tout littéral par son « opposé » : si p est une proposition atomique, $p^* := \neg p$ et $(\neg p)^* := p$.
Montrer que $\varphi \equiv \psi$ entraîne $\varphi^* \equiv \psi^*$.
(*Indication : on pourra préalablement établir que φ^* est équivalente à $\neg\varphi$.*)

5. Appliquer l'algorithme d'unification vu en cours aux entrées suivantes, et indiquer ce que l'on peut en conclure. (a) $f(g(k(x)), y) \stackrel{?}{=} f(y, g(x))$, (b) $f(g(x), x) \stackrel{?}{=} f(y, g(z)) \wedge g(x) \stackrel{?}{=} y$, et (c) $f(y, k(y), g(x)) \stackrel{?}{=} f(k(x), k(y), y)$.

6. Exhiber un problème d'unification et un unificateur qui ne soit pas le plus général (on dit aussi que l'unificateur n'est pas *principal*).

7. Soient les formules $\varphi_1 := (\exists x P(x)) \to (\forall x P(x))$, $\varphi_2 := \forall x(P(x) \vee Q(x))$, et $\psi := (\exists x \neg Q(x)) \to (\forall x P(x))$. On veut montrer que $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$ par instanciation et par résolution.

7.1 Mettre en forme clausale universelle l'ensemble $\{\varphi_1, \varphi_2, \neg\psi\}$.

7.2 Trouver des instances contradictoires des clauses obtenues et montrer par résolution propositionnelle que ces instances sont contradictoires.

7.3 Donner une preuve directe de cette contradiction par résolution.

Difficulté 3

8. Les connecteurs logiques peuvent être vus comme des fonctions booléennes ; par exemple, le connecteur $\vee$ correspond à la fonction booléenne $f_\vee$, que l'on ne définit pas ici.
Si F est un ensemble de fonctions booléennes, on note $A(F)$ l'ensemble de toutes les fonctions booléennes obtenues à l'aide des fonctions de F, des fonctions de projections (fonctions $\pi_{n,i}(x_1, \ldots, x_n) = x_i$), et de la composition. Pour tout entier $n \geq 1$, on note d_n (resp. c_n) la fonction booléenne à n arguments qui renvoie 0 (resp. 1) si, et seulement si, tous ses arguments valent 0 (resp. 1).

8.1 Montrer que, pour tous $n, m \geq 2$, $A(\{c_n, f_\neg\}) = A(\{d_m, f_\neg\})$.

8.2 Montrer que $A(\{c_2, f_\neg\})$ contient toutes les fonctions booléennes à k arguments, pour tout $k \geq 2$.

8.3 Montrer que $f_\neg$ n'est pas dans $A(\{f_\vee, f_\wedge, f_\to, f_\leftrightarrow\})$

9. On se place dans le contexte de la logique propositionnelle. On dira qu'une clause C *subsume* une clause C', si $C \models C'$. On considère la stratégie de résolution+factorisation suivante : on n'applique une règle d'inférence que lorsqu'aucune des prémisses n'est subsumée par une clause différente ancêtre dans l'arbre de preuve. Montrer que cette stratégie est réfutationnellement complète.