

## Objectifs

**Contexte:** Si les modèles numériques globaux actuels sont capables de reproduire la mésoéchelle avec des résolutions spatiales de 10 km (cfr. Fig. 1), ceux-ci ne sont pas capables à l'heure actuelle de reproduire la sous-mésoscale (structures de l'ordre de 5km).

**Intérêt:** En faveur d'une analyse des courants marins à une résolution sous-mésoscale, on peut mentionner que la sous-mésoscale a un impact très fort sur:

- les flux verticaux de chaleur (Klein et al. 2008, Capet et al. 2008),
- la biogéochimie marine (Klein et Lapeyre 2009, Lévy et al. 2012),
- les écosystèmes marins (De Monte et al. 2012).

**But:** Le but du projet est de développer de nouvelles méthodologies pour l'estimation des courants océaniques à méso (de l'ordre des tourbillons, 200km) et sous-mésoscale (de l'ordre des filaments, 5km) en combinant 3 ingrédients principaux: 1) le modèle SQG modélisant certains équilibres dynamiques propres à l'océan de surface; 2) des cartes de température de surface de la mer (SST) et/ou de hauteur de la mer (SSH) acquises par satellites; 3) la parcimonie de la condition initiale dans un dictionnaire adapté.

## Le modèle géophysique

Le modèle SQG en quelques équations. Soit

- $b_s(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ : la flottabilité de surface au point  $(\mathbf{x}, t)$ ,
- $v_s(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2$ : la vitesse de surface au point  $(\mathbf{x}, t)$ ,
- $\hat{f}(\mathbf{k}, t)$  La transformée de Fourier de  $f(\mathbf{x}, t)$  par rapport à  $\mathbf{x}$ .

La vitesse de surface est alors reliée à la flottabilité par la relation suivante

$$v_s(\mathbf{x}, t) \triangleq \nabla_s^\perp \psi_s(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

où  $\psi_s(\mathbf{x}, t)$  est une fonction courant de surface satisfaisant (pour une constante  $\beta > 0$ ):

$$\hat{\psi}_s(\mathbf{k}, t) = \beta \frac{\hat{b}_s(\mathbf{k}, t)}{\|\mathbf{k}\|}. \quad (2)$$

Combiné à une équation de transport sur la flottabilité, l'équilibre SQG fournit alors un modèle dynamique sur cette dernière:

$$\partial_t b_s + v_s^T \nabla_s b_s = 0. \quad (3)$$

Précisons qu'à l'heure actuelle la validation de l'équilibre SQG (relations (1)-(2) entre vitesse de surface et flottabilité) représente une question encore ouverte. Toutefois, cet équilibre a notamment été observé dans:

- simulations numériques aux équations primitives dans une configuration idéalisée (jet vers l'est, Lapeyre et Klein 2006, Klein et al. 2008, 2009)
- un modèle réaliste de l'Atlantique Nord (le modèle américain POP, Isern-Fontanet et al. 2008)
- des observations de satellites de basse résolution dans la région du Gulf Stream (Isern-Fontanet et al. 2006).

## Les données disponibles

La flottabilité est reliée à des données expérimentales de type hauteur d'eau (SSH) et température de surface (SST):

$$\hat{h}_s(\mathbf{k}, t) = \beta_h \frac{\hat{b}_s(\mathbf{k}, t)}{\|\mathbf{k}\|}, \quad (4)$$

$$T_s(\mathbf{x}, t) = \beta_T b_s(\mathbf{x}, t), \quad (5)$$

pour certaines valeurs de  $\beta_h > 0$ ,  $\beta_T > 0$ .

En pratique, les données disponibles présentent les caractéristiques suivantes:

- différentes résolutions spatiales et temporelles,
- une fiabilité et nature hétérogène,
- la présence de "trous" dans certains types de données.

Voir par exemple la figure ci-dessous.

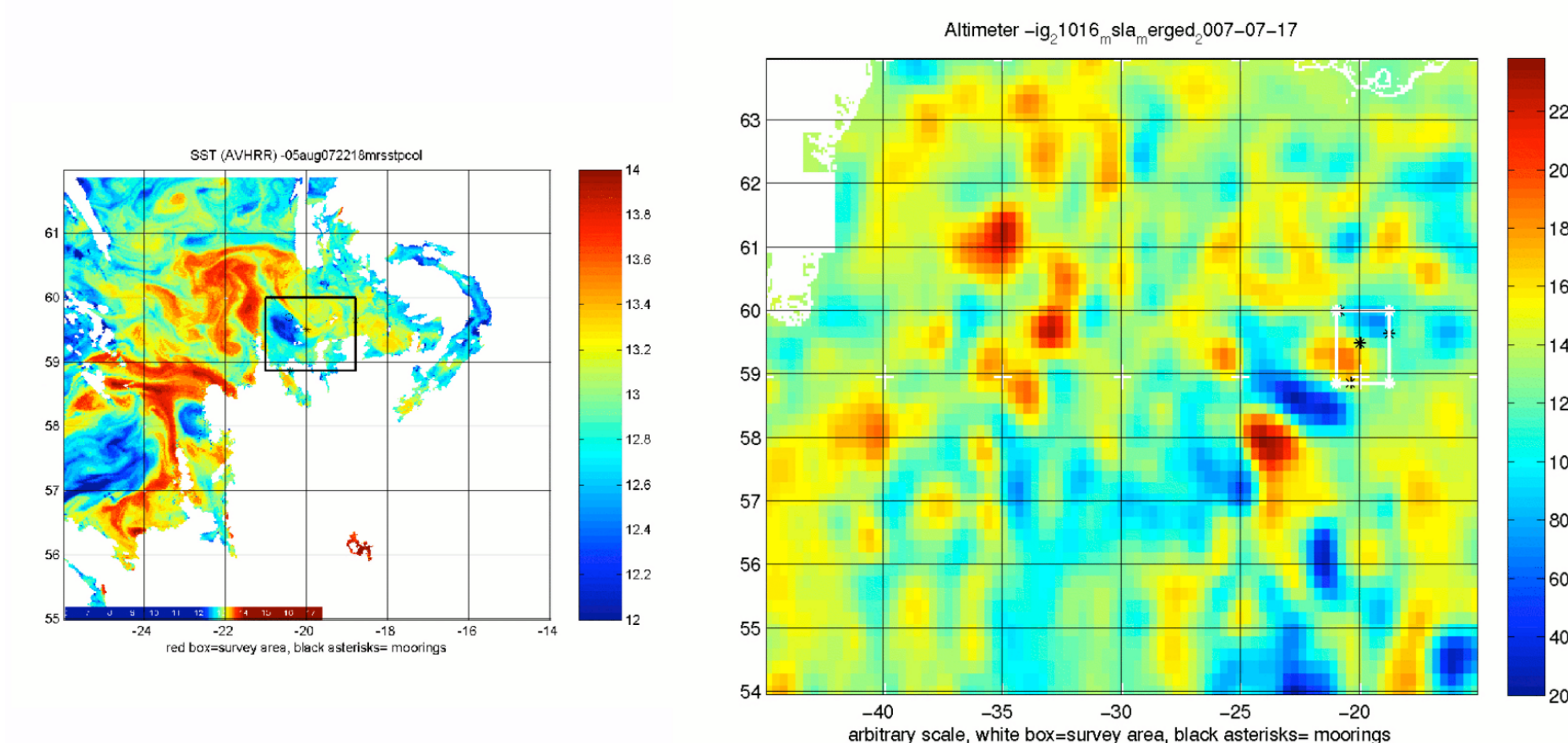
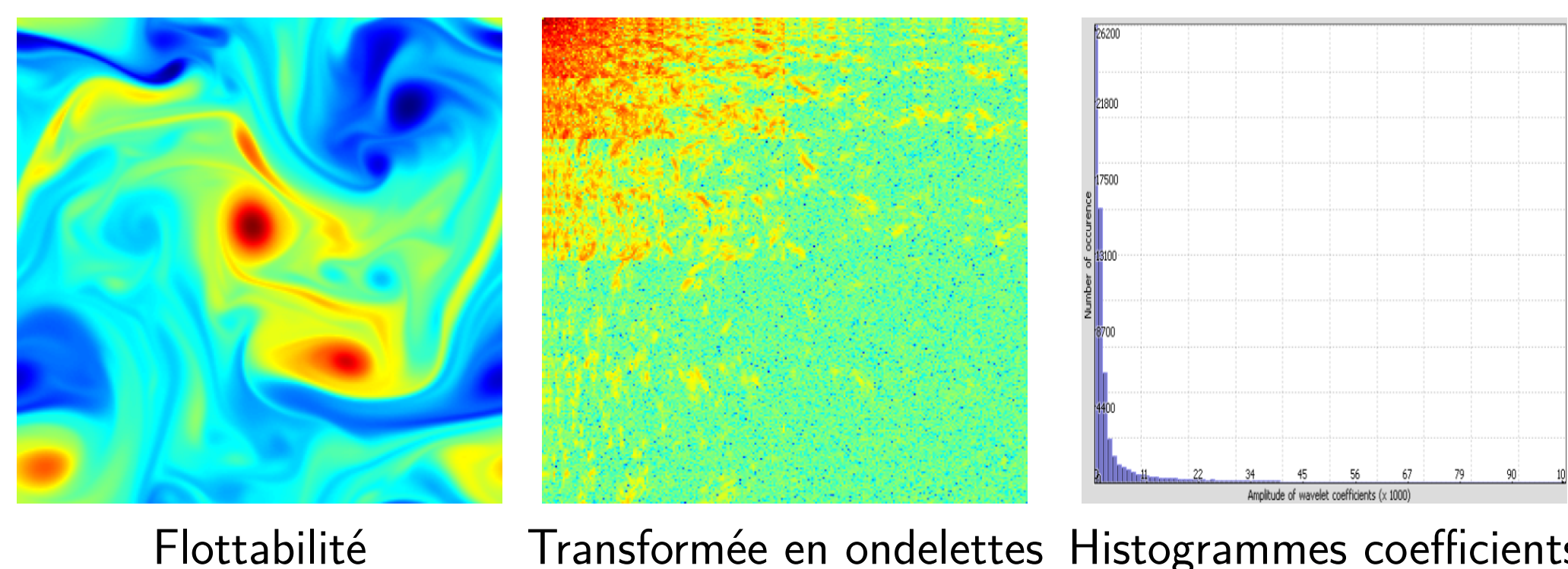


FIGURE 1: (a) Carte de température de surface de la mer (observée par satellite à 1km de résolution). (b) Carte de hauteur de la surface de la mer (mesurée par altimétrie). Le carré noir sur la figure de gauche correspond au carré blanc de la figure de droite (communication personnelle de A. M. Martin).

## Parcimonie de la condition initiale

La flottabilité est une grandeur qui jouit d'une certaine forme de régularité spatiale. Conformément aux résultats modernes de la théorie de l'approximation, il est fort à parier que  $b_s$  puisse se décomposer de façon parcimonieuse (c'est-à-dire avec un petit nombre de coefficients non-nuls) dans une base ou un dictionnaire de fonctions adapté. Les figures ci-dessous illustrent par exemple la parcimonie d'un échantillon de flottabilité dans une base d'ondelettes.



Flottabilité Transformée en ondelettes Histogrammes coefficients

## Le problème traité

Soient les variables suivantes :

- $\mathbf{b}_t$  une représentation discrète de la flottabilité au temps  $t$
- $\mathbf{y}_t^{(1)}$  et  $\mathbf{y}_t^{(2)}$  des observations de SSH basse-résolution et de SST haute-résolution à "trous" au temps  $t$
- $\mathbf{A}_t^{(1)}$  et  $\mathbf{A}_t^{(2)}$  des matrices codant respectivement (4) et (5), dépendant de la résolution et des "trous" dans les observations au temps  $t$
- $\Gamma_t^{(1)}$  et  $\Gamma_t^{(2)}$  des matrices de covariance au temps  $t$

Le problème considéré est une estimation au sens des moindres carrés avec une contrainte de parcimonie sur la condition initiale  $\mathbf{b}_0$  et une relation déterministe entre les  $\mathbf{b}_t$  donnée par une version discrète de (3) :

$$\mathbf{b}_{t+1} = f(\mathbf{b}_t, \dots, \mathbf{b}_0). \quad (6)$$

Ce problème d'assimilation s'écrit :

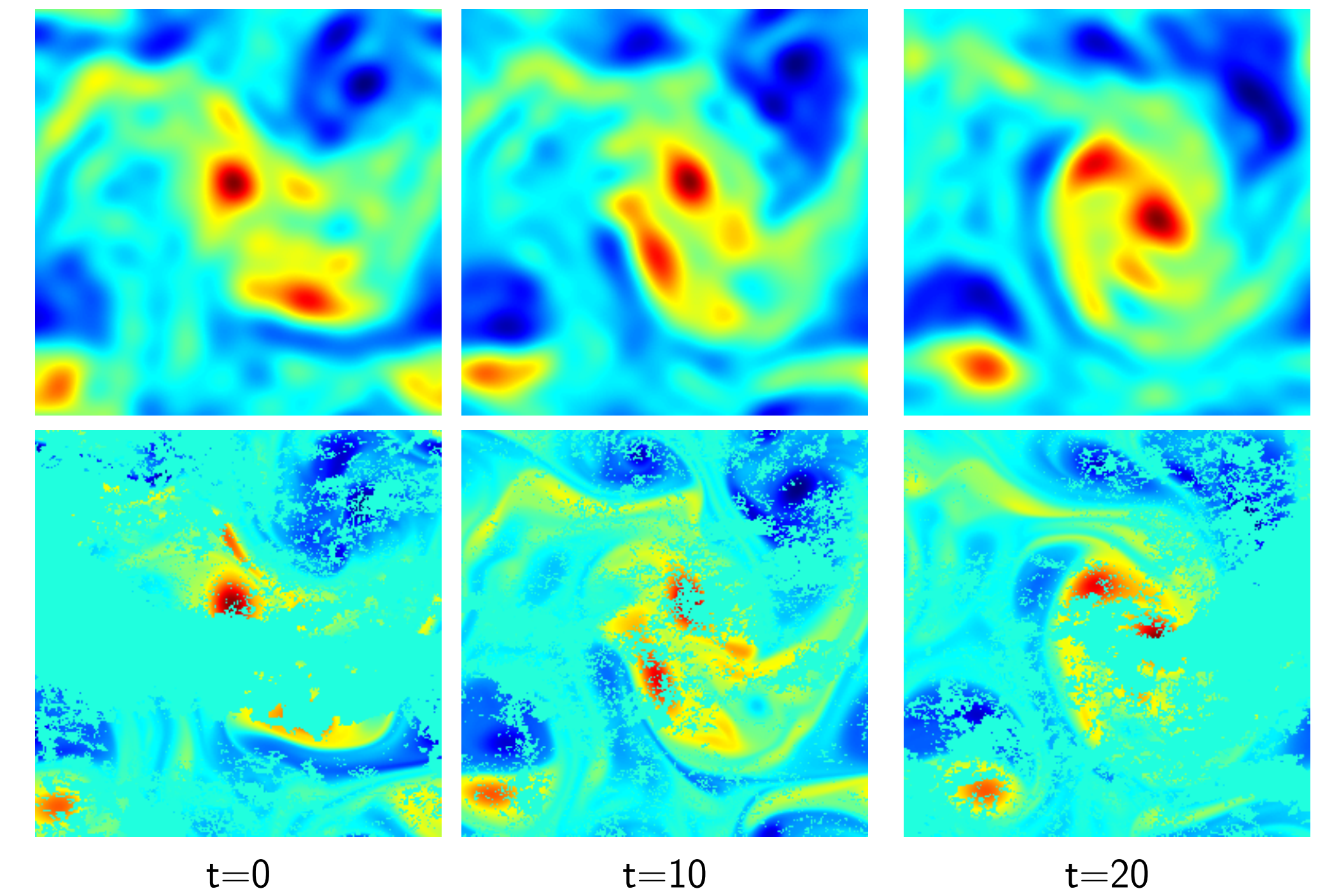
$$\min_{\mathbf{b}_0} \left\{ \sum_t \sum_{i=1,2} \|\mathbf{y}_t^{(i)} - \mathbf{A}_t^{(i)} \mathbf{b}_t\|_{\Gamma_t^{(i)}}^2 \right\} + \lambda \|\mathbf{b}_0\|_1 \quad \text{sous la contrainte (6)}. \quad (7)$$

Le problème d'optimisation est donc non-différentiable (en zéro) avec une contrainte non-linéaire sur l'évolution de  $\mathbf{b}_t$ . Nous utilisons un algorithme de type

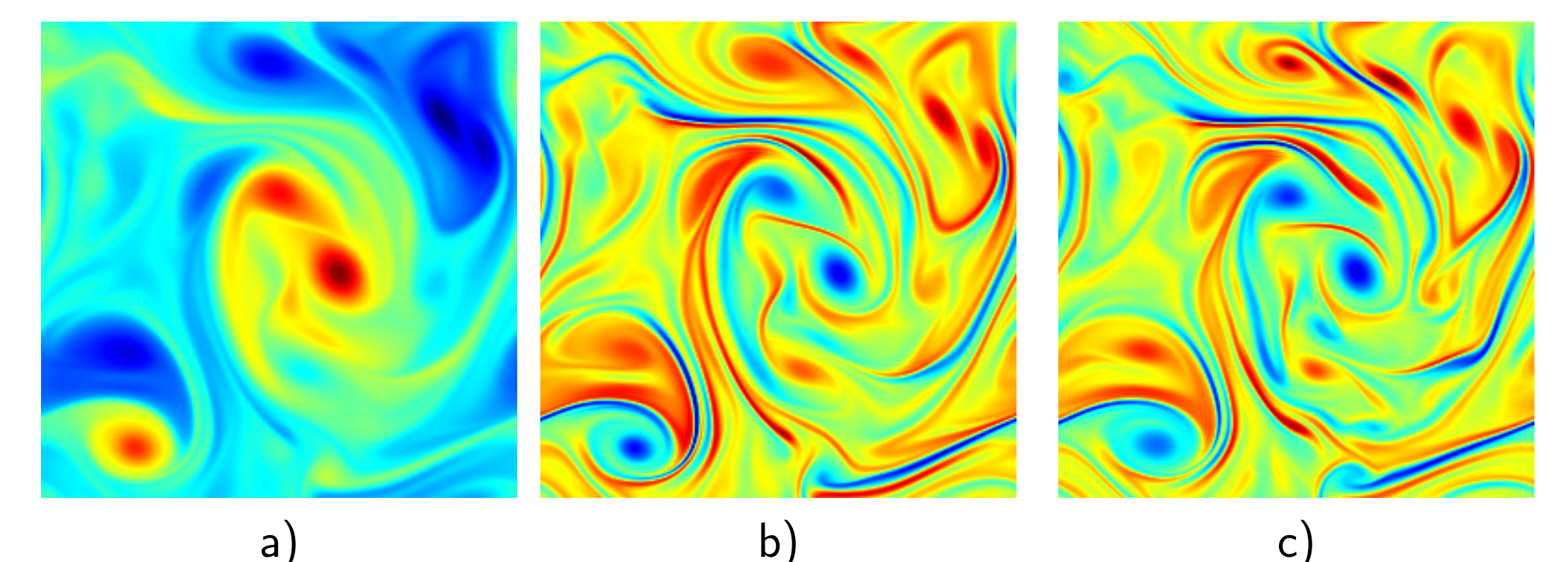
"Alternating Direction of Method of Multipliers" (ADMM) pour chercher une solution.

## Le problème traité

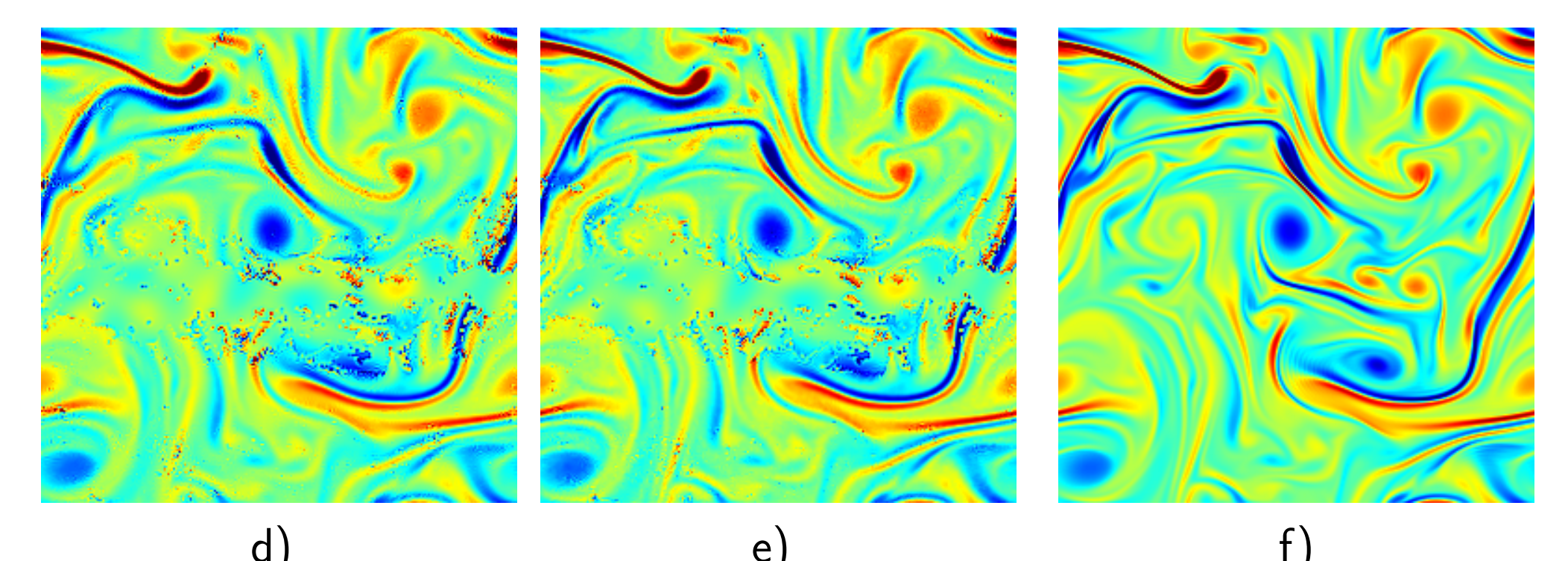
On considère la fenêtre temporelle  $t \in [0, 20]$  (temps adimensionné), une cadence d'échantillonnage des observations proche de l'unité et un pas de discrétisation proche de la condition CFL. Le problème (7) est résolu par un algorithme de type ADMM qui utilise une méthode de descente de type quasi-Newton (LBFGS) où le gradient est obtenu par méthode adjointe (4DVar).



Observations de flottabilité issues des SSH basse-résolution (haut) et des SST haute-résolution à "trous" (bas)



flottabilité estimée (a), vorticité estimée (b) sans régularisation  $\ell_1$  et donnée par une DNS (c), à  $t=20$



vorticité estimée sans (d) ou avec (e) régularisation  $\ell_1$  et une base de curvelet et vorticité donnée par une DNS (f), à  $t=3$  (peu d'observation)

	base canonique	base de Coiflets-8	base de curvelet
Erreur $\ell_2$	0.246	0.233	0.197
Erreur $\ell_1$	66.97	61.93	47.65

Réduction d'erreur apportée par la parcimonie