

---

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée devant

**L'Université de Rennes 1  
Institut de Formation Supérieure  
en Informatique et en Communication**

par

Éric Badouel

Automates réversibles et réseaux de Petri, dualité et représentation : le  
problème de la synthèse

**soutenue le 29 avril 1999 devant le jury composé de**

M.	Jean-Claude Raoult	Président
M.	Manfred Droste	Rapporteur
M.	Grzegorz Rozenberg	Rapporteur
M.	Manuel Silva	Rapporteur
M.	Philippe Darondeau	Examineur
Mme	Brigitte Rozoy	Examineur

---

*Ce travail est dédié à la mémoire de mon frère Didier  
et à ma fille Maud.*

### **Remerciements**

*Je tiens à remercier chaleureusement les membres du jury et plus  
particulièrement Manfred Droste, Grzegorz Rozenberg et Manuel Silva  
pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail.*

# Chapitre 1

## Introduction

Depuis leur introduction dans le début des années soixantes [78], les réseaux de Petri ont été amenés à jouer un rôle prépondérant dans l'étude formelle du comportement des systèmes distribués ou concurrents. Il s'agit d'une extension simple de la notion d'automate dans laquelle les états ont une nature distribuée et l'occurrence d'un événement est liée à des conditions locales du système. Beaucoup d'efforts ont été consacrés à l'étude de la décision et de la complexité de certaines de leurs propriétés. Par exemple il est possible par la technique de l'arbre de couverture [62] de décider si un réseau de Petri est borné, c'est à dire s'il s'agit d'un système à états fini. Des techniques de réductions de réseaux [22] et des techniques d'algèbre linéaires [68, 99] ont également reçu beaucoup d'attention. Enfin, les réseaux de Petri sont un outil de modélisation graphique d'un intérêt pratique pour la description et la mise au point de systèmes concurrents. Pour une présentation détaillée des aspects théoriques et pratiques des réseaux de Petri, le lecteur pourra consulter l'un des livres [77, 88, 90, 59, 36, 35, 89] ou l'article de synthèse [71] consacrés à ce sujet, il pourra également consulter la *Petri net mailing list* [80] maintenue à l'Université d'Aarhus. La définition d'un réseau de Petri et celle de son graphe d'exécution sont les seules notions utiles à la lecture de ce document.

Le problème de la synthèse de réseaux relève de la théorie des graphes : il s'agit de décider si un graphe étiqueté par des événements est le comportement séquentiel d'un système concurrent modélisable par un réseau de Petri. Le problème de synthèse a été étudié à l'origine par Ehrenfeucht et Rozenberg [42, 43] (voir aussi [37]) pour les réseaux élémentaires. Leur approche se fonde sur la notion de *région dans un graphe* vue comme ensemble de sommets susceptibles de représenter l'extension d'une place, c'est à dire l'ensemble des états dans lesquels cette place est marquée. Il s'agit des ensembles tels que les transitions associées à même événement modifient de la même façon la relation d'appartenance à cet ensemble. Ehrenfeucht et Rozenberg caractérisent les graphes de marquage de réseaux élémentaires en termes de deux *propriétés de séparation*. La première stipule qu'il y a suffisamment de régions pour discerner tous les états du système, la seconde dit que si un événement n'est pas autorisé en un état il doit exister une région qui "inhibe" cet événement en cet état. Cette solution a été étendue à de nombreuses classes de réseaux [70, 76, 9, 21, 38, 39, 13, 27, 82]. Tous ces théorèmes de représentation sont basés sur

les mêmes propriétés de séparation mais avec diverses notions de régions. Une interprétation de ces axiomes de séparation est la suivante. Une région peut être vue comme une place abstraite et est associée à un quotient de l'automate qui projette l'automate sur le "contenu" de cette place. L'automate est alors isomorphe au graphe de marquage d'un réseau si, et seulement si, il est isomorphe au produit synchronisé de ces automates associés aux régions. La première propriété de séparation exprime le fait que les états peuvent être injectivement codés comme des vecteurs d'états locaux (chaque état local donne sa valeur relativement à une région). La seconde propriété de séparation dit que si un événement n'est pas autorisé dans un état c'est qu'il n'est pas autorisé dans un des états locaux. Le problème de synthèse se réduit alors à la caractérisation des automates pouvant être présentés comme produits synchronisés d'un certain type d'automates.

Cette observation a conduit à une présentation unifiée du problème de synthèse de réseaux [10] paramétrée par le type des réseaux. Une région, ou observation, est un morphisme du système de transition sous-jacent à l'automate vers un système de transitions classifiant, dit le *type de réseaux*, qui caractérise le comportement de la classe de réseaux considérée. Nous obtenons, pour chaque type de réseaux, une adjonction duale dont le noyau met en correspondance les automates séparés, c'est à dire satisfaisant aux propriétés de séparation, aux réseaux dits saturés. Dans [3] la présentation se simplifie en une connexion galoisienne (entre ensembles ordonnés) à la condition de travailler avec un ensemble d'événements fixé à l'avance. Cette approche s'étend aux automates de dimension supérieure permettant ainsi de prendre en compte le comportement concurrent des réseaux. On obtient ainsi un cadre unifié pour présenter la synthèse des réseaux élémentaires [42, 43] et des systèmes d'addition de vecteurs [21] à partir de leurs graphes de marquage séquentiels et la synthèse des réseaux condition/événements [76] et des réseaux de Petri [70] à partir de leur comportements concurrents.

On peut songer à appliquer la synthèse de réseaux pour la conception de logiciels distribués où elle peut être conçue comme une technique de parallélisation de programmes séquentiels. De fait le réseau synthétisé exhibe le parallélisme maximal compatible avec le comportement séquentiel donné. La complexité théorique des algorithmes mis en œuvre semblerait devoir en limiter la portée dans les applications de taille réaliste. Le problème de synthèse de réseaux élémentaires est NP-complet [7]; et bien que la synthèse des systèmes d'addition de vecteurs admette une solution polynomiale [6], celle-ci fondée sur la méthode des ellipsoïdes de Khachiyan [94] est dans la pratique remplacée par la méthode du simplexe qui bien que non polynomiale a une meilleure complexité en moyenne. Des outils ont été néanmoins développés. Une solution assistée par ordinateur au problème du codage d'état dans les circuits asynchrones et mis en œuvre dans l'outil *Petrify* est présentée dans [30]. Cet algorithme ne calcule que des régions minimales d'un automate représenté symboliquement par un diagramme de décisions binaires [25, 26]. Une méthode semi-automatisée pour la distribution de protocoles, basée sur la synthèse de systèmes d'addition de vecteurs et mis en œuvre dans l'outil *SYNET*, est décrite dans [28].

L'algorithme polynomial proposé dans [6] pour la synthèse des systèmes d'addition de vecteurs est fondé sur des algorithmes pour la programmation linéaire dans les rationnels découverts vers la fin des années soixante-dix. Cet algorithme a été adapté à la synthèse de réseaux de Petri à partir de leurs graphes de marquage séquentiels ou parallèles [12], à la synthèse de réseaux de Petri à partir de langages [6, 33] et à la synthèse de réseaux de Petri

stratifiés [13] qui sont une sous classe des réseaux auto-modifiants de Valk [103, 104].

Dans le chapitre qui suit nous décrivons la solution proposée par Ehrenfeucht et Rozenberg pour le problème de synthèse des réseaux élémentaires. Cela nous permet d'introduire les principales notions utilisées dans ce document dans leur cadre le plus simple, en particulier la notion de région et les propriétés de séparation. Nous indiquons aussi pourquoi ce problème est NP-complet.

Comme déjà mentionné, le problème de synthèse est un problème de représentation d'automates par produits synchronisés d'automates très simples (les "atomes" de la représentation). Pour les systèmes de réseaux élémentaires et pour les systèmes d'addition de vecteurs ces automates atomiques sont des restrictions pleines des graphes de Cayley de  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}$  respectivement. Dans le chapitre trois de ce document nous donnons une classification des représentations des automates comme sous graphes pleins de graphes de Schreier. Bien sûr un tel automate doit être réversible c'est à dire que chaque événement induit une bijection partielle de l'ensemble des états. Les conditions que doit satisfaire l'automate vis à vis du groupe le représentant sont similaires aux propriétés de séparation. On décrit le calcul de la représentation canonique d'un automate commutatif, c'est à dire d'un automate qui se plonge dans le graphe de Cayley d'un groupe commutatif.

Dans le chapitre quatre nous nous intéressons aux graphes de marquage des systèmes d'addition de vecteurs. Il s'agit d'automates commutatifs et on conjecture qu'ils sont sans torsion, c'est à dire que leur représentation canonique ne contient pas d'élément d'ordre fini. Nous indiquons une généralisation du théorème de représentation d'Ehrenfeucht et Rozenberg au contexte des systèmes d'addition de vecteurs et en dérivons un algorithme en temps polynomial pour la synthèse des systèmes d'addition de vecteurs. Un autre algorithme utilisant la représentation canonique des automates commutatifs est également présenté.

Dans le chapitre cinq nous décrivons la dualité entre réseaux et automates. Cette dualité est induite par un objet schizoïde et est paramétré par les types des réseaux. Cette présentation peut être étendue aux automates de dimension supérieure ce qui permet de prendre en compte le comportement concurrent des réseaux. Toutes les variantes connues de synthèses de réseaux peuvent être obtenues comme des instances de cette construction associées à des types particuliers de réseaux.

Dans le chapitre de conclusion, nous mentionnons divers résultats qui n'ont pas été présentés dans ce document, et nous indiquons quelques directions pour des recherches futures.

Comme on peut en juger par la liste des publications, le travail présenté ici est en grande partie un travail commun avec Philippe Darondeau et est le résultat de notre longue et fructueuse collaboration. Diverses personnes à Rennes, incluant Vicente Sanchez-Leighton [91], Luca Bernardinello [20], Carlo Ferigato [44], Vincent Schmitt [93], Danièle Quichaud et Benoît Caillaud nous ont fait profiter de leurs idées et de leurs vues sur les thèmes de la dualité, de la théorie de la représentation et de la synthèse de réseaux ; même si cela n'a généralement pas conduit à des publications communes.

## Chapitre 2

# Réseaux élémentaires

Nous présentons la solution proposée par Ehrenfeucht et Rozenberg pour le problème de synthèse des réseaux élémentaires. Elle est fondée sur la notion de région dans les graphes étiquetés. On indique les résultats de Desel et Reisig sur les ensembles admissibles de régions, et ceux de Bernardinello sur les régions minimales. Pour terminer nous présentons notre contribution à savoir que le problème de la synthèse des réseaux élémentaires est NP-complet. Ce chapitre est pour l'essentiel extrait de [7].

### 2.1 Réseaux élémentaires

Un *réseau condition/événement* est une structure  $N = (P, E, F)$  dans laquelle  $P$  est un ensemble de places, ou propriétés,  $E$  est un ensemble d'événements ou d'actions disjoint de  $P$  et  $F \subset E \times P \cup P \times E$  est une relation bipartite entre places et événements appelée relation de flux. Le graphe de flux est supposé sans éléments isolés, ce qui se traduit par

$$\forall x \in E \cup P \quad \exists y \in E \cup P \quad [(x, y) \in F \vee (y, x) \in F]$$

On adopte les notations suivantes  $\bullet x = \{y \mid F(y, x)\}$  et  $x^\bullet = \{y \mid F(x, y)\}$  pour  $x \in P \cup E$ . Un réseau est dit *simple* si

$$\forall x, y \in P \cup E \quad (\bullet x = \bullet y \text{ et } x^\bullet = y^\bullet) \Rightarrow x = y$$

Un *marquage* est un ensemble de places, il représente un état de l'évolution du réseau par l'ensemble des propriétés qu'il vérifie. Un *système de transition* est une structure  $(S, E, T)$  consistant en un ensemble d'états  $S$ , un ensemble d'événements  $E$  et une relation de transition  $T \subseteq S \times E \times S$ . On écrit  $s \xrightarrow{e} s'$  comme abréviation de  $(s, e, s') \in T$ . Un *automate*  $A = (S, E, T, s_0)$  est un système de transition avec état initial  $s_0 \in S$ . Les évolutions possibles d'un réseau élémentaire se décrivent par le système de transition  $(M, E, T)$  dont les états sont les marquages, et dont les transitions sont données par

$$M \xrightarrow{e} M' \quad \text{ssi} \quad \bullet e \subseteq M \text{ et } (M \setminus \bullet e) \cap e^\bullet = \emptyset \text{ et } M' = (M \setminus \bullet e) \cup e^\bullet$$

Les places dans  $\bullet e \cap e^\bullet$ , appelées *conditions de bord* de  $e$ , sont simplement testées : elles sont nécessaires à l'activation de l'événement mais ne sont pas modifiées par cet événement. Les conditions dans  $\bullet e$  (*pré-conditions* de  $e$ ) qui ne sont pas des conditions de bord

de  $e$  doivent être valides dans un état autorisant l'activation de l'événement et sont invalidées par cet événement. De façon symétrique, les conditions dans  $e^\bullet$  (*post-conditions* de  $e$ ) qui ne sont pas des conditions de bord de  $e$  ne doivent pas être valides dans un état autorisant l'activation de l'événement et sont rendues valides par cet événement. Un réseau sans condition de bord est dit *pur*. La relation de transition d'un réseau pur se simplifie en

$$M \xrightarrow{e} M' \quad \text{ssi} \quad \bullet e \subseteq M \quad \text{et} \quad M \cap e^\bullet = \emptyset \quad \text{et} \quad M' = (M \setminus \bullet e) \cup e^\bullet$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$M \xrightarrow{e} M' \quad \text{ssi} \quad M \setminus M' = \bullet e \quad \text{et} \quad M' \setminus M = e^\bullet$$

**Définition 2.1.1** *Un réseau élémentaire est un réseau condition/événement pur, simple et sans élément isolé. Il est dit marqué si un marquage dit initial  $M_0$  est spécifié pour lequel tout événement  $e \in E$  est tirable dans au moins un marquage accessible à partir de  $M_0$ .*

**Définition 2.1.2** *Le graphe de marquage d'un réseau élémentaire marqué  $\mathcal{N} = (P, E, F, M_0)$  est l'automate  $\mathcal{N}^* = (S, E, T, s_0)$  dont l'état initial  $s_0$  est le marquage initial  $M_0$  et dont le système de transition sous-jacent est la restriction induite par le graphe de marquage du réseau  $N = (P, E, F)$  sur l'ensemble des marquages accessibles à partir de  $M_0$ .*

**Observation 2.1.3** *Le graphe de marquage d'un réseau élémentaire marqué est un automate  $A = (S, E, T, s_0)$  qui satisfait aux conditions suivantes : (i) il n'a pas de boucle :  $s \xrightarrow{e} s' \Rightarrow s \neq s'$ , (ii) ni transitions multiples entre états :  $(s \xrightarrow{e_1} s' \wedge s \xrightarrow{e_2} s') \Rightarrow e_1 = e_2$ , (iii) il est réduit :  $\forall e \in E \quad \exists s \xrightarrow{e} s'$ , (iv) et accessible :  $\forall s \in S \quad s_0 \xrightarrow{*} s$  où  $\xrightarrow{*} = (\bigcup_{e \in E} \xrightarrow{e})^*$ .*

## 2.2 Régions

Etant donné un automate  $A = (S, E, T, s_0)$  peut-on décider s'il existe un réseau élémentaire marqué  $\mathcal{N} = (P, E, F, M_0)$  dont le graphe de marquage  $\mathcal{N}^*$  soit isomorphe à  $A$ , c'est à dire identique à un renommage bijectif des états et des transitions? Si un tel isomorphisme existe entre  $A$  et  $\mathcal{N}^*$ , alors chaque état de  $A$  peut être identifié à un marquage de  $\mathcal{N}$  et une relation binaire  $\models \subseteq S \times P$  peut être définie en posant  $s \models x$ , ce qu'on lit " $s$  vérifie  $x$ ", si, et seulement si, la condition  $x$  appartient au marquage associé à l'état  $s$ . Le réseau élémentaire  $N = (P, E, F)$  procure une représentation ensembliste fidèle du système de transition  $T = (S, E, T)$  : la paire d'applications  $[\cdot]_S : S \rightarrow 2^P$  et  $[\cdot]_E : E \rightarrow 2^P \times 2^P$  définies par  $[s]_S = \{x \in P \mid s \models x\}$  (marquage associé à  $s$ ) et  $[e]_E = \langle \bullet e, e^\bullet \rangle$  sont injectives et la relation de transition  $T$  est telle que

$$s \xrightarrow{e} s' \in T \quad \text{ssi} \quad [s]_S \setminus [s']_S = \bullet e \quad \wedge \quad [s']_S \setminus [s]_S = e^\bullet$$

Afin de construire une représentation d'un système de transition donné  $T = (S, E, T)$  il nous faut deviner l'ensemble des places (symboles atomiques de la représentation). Pour cela supposons qu'une telle représentation ait été trouvée. Chaque condition  $x \in P$  peut



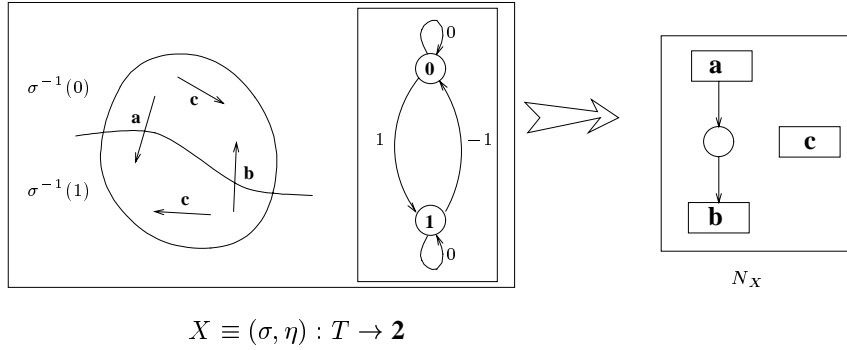


FIG. 2.1 – région comme morphisme

alors être représentée par l'ensemble  $[x]_P = \{s \in S \mid s \models x\}$  des états de  $T$  qui la satisfont. Cet ensemble  $[x]_P$ , appelé *extension* de  $x$ , vérifie le prédicat :

$$\begin{aligned} \mathbf{Région}(X) &\equiv \text{pour tout événement } e \in E : \\ & s \xrightarrow{e} s' \Rightarrow (s \in X \text{ et } s' \notin X) \\ \text{ou } & s \xrightarrow{e} s' \Rightarrow (s \notin X \text{ et } s' \in X) \\ \text{ou } & s \xrightarrow{e} s' \Rightarrow (s \in X \text{ ssi } s' \in X) \end{aligned}$$

Ces trois cas correspondant respectivement à  $x \in \bullet e$ ,  $x \in e^\bullet$ , et  $x \notin \bullet e \cup e^\bullet$  dans  $N$ . On définit alors une *région* de  $T$  comme étant un ensemble  $X \subseteq S$  vérifiant  $\mathbf{Région}(X)$ .

**Observation 2.2.1** L'extension  $[x] = \{M \in S \mid x \in M\}$  d'une place  $x \in P$  d'un réseau élémentaire est une région de son graphe de marquage.

Un ensemble  $X \subseteq S$  est une région si, et seulement si, sa fonction caractéristique  $\sigma = \chi_X : S \rightarrow \{0, 1\}$  peut être associée (de manière unique) à une application  $\eta : E \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  telle que  $\sigma(s') = \sigma(s) + \eta(e)$  pour toute transition  $s \xrightarrow{e} s'$  in  $T$ . On pourra identifier les régions avec de telles paires d'applications  $(\sigma, \eta)$  qui à leur tour ne sont rien d'autre que les morphismes de systèmes de transitions<sup>1</sup> de  $T = (S, E, T)$  vers le système de transition *classifiant*  $\mathbf{2} = (\{0, 1\}, E_2, T_2)$  indiqué dans la figure 2.1, où  $E_2 = \{-1, 0, 1\}$  et  $T_2 = \{0 \xrightarrow{0} 0, 0 \xrightarrow{1} 1, 1 \xrightarrow{-1} 0, 1 \xrightarrow{0} 1\}$ . Une région  $X \equiv (\sigma, \eta)$  détermine un réseau élémentaire *atomique*  $N_X = (\{X\}, E, F_X)$  dont la relation de flux  $F_X$  est déterminée par l'application  $\eta$  :

$$X \in \bullet e \text{ ssi } \eta(e) = \Leftrightarrow 1 \quad \text{et} \quad X \in e^\bullet \text{ ssi } \eta(e) = 1$$

Si  $X = [x]_P$  est l'extension d'une place  $x$  d'un réseau  $N = (P, E, F)$  alors  $N_X$  est le sous réseau atomique de  $N$  induit sur  $x$ .

Etant donné un système de transition  $T = (S, E, T)$ , un réseau élémentaire  $T^*$  peut être synthétisé à partir de l'ensemble  $\mathcal{R}_T$  des régions de  $T$  en amalgamant sur  $E$  les réseaux atomiques  $N_X$  associés aux régions  $X$ . C'est à dire  $T^* = \sum_{X \in \mathcal{R}_T} N_X$ . Chaque région

1. Un morphisme de systèmes de transitions  $(\sigma, \eta) : (S_1, E_1, T_1) \rightarrow (S_2, E_2, T_2)$  est une paire d'applications  $\sigma : S_1 \rightarrow S_2$  et  $\eta : E_1 \rightarrow E_2$  telle que  $s \xrightarrow{e} s' \in T_1 \Rightarrow \sigma s \xrightarrow{\eta e} \sigma s' \in T_2$ .

exprime une *contrainte synchronique élémentaire* vérifiée par toutes les exécutions de  $T$ . Par exemple, la région représentée dans la figure 2.1 exprime le fait que deux occurrences successives de l'événement  $b$  doivent être séparées d'une occurrence de l'événement  $a$  et vice versa. Si  $T$  possède un état initial  $s_0 \in S$ , alors le réseau élémentaire  $N$  (ainsi que chacune de ses composants atomiques  $N_X$ ) est canoniquement muni d'un marquage initial  $M_0 \subseteq 2^{\mathcal{R}_T}$ , qui contient les régions auxquelles appartient l'état initial :  $X \in M_0$  si, et seulement si,  $s_0 \in X$ .  $A^* = (T^*, M_0)$  est le réseau marqué *synthétisé* à partir de l'automate  $A = (T, s_0)$ . Supposons, par exemple que l'état initial n'appartienne pas à la région représentée dans la figure 2.1; alors la place du réseau atomique  $N_X$  n'est pas marquée initialement, et le langage de  $N_X$  est le produit de mixage de  $(a \cdot b)^*$  et  $c^*$ . Comme les régions de  $T$  sont les morphismes  $(\sigma, \eta) : T \rightarrow \mathbf{2}$ , le langage de  $A$  est inclu dans le langage de chacun des réseaux atomiques  $N_X$  associés aux régions de  $T$  et ainsi est contenu dans leur intersection, c'est à dire dans le langage de  $A^*$ . Additionner les contraintes synchroniques données par les régions revient à faire l'intersection des comportements.

### 2.3 Systèmes de transitions élémentaires

Nous appelons région d'un automate une région de son système de transitions sous-jacent. Supposons que  $A$  soit isomorphe au graphe de marquage d'un réseau élémentaire marqué  $\mathcal{N} = (P, E, F, M_0)$ . Soient  $s_1$  et  $s_2$  deux états distincts de  $S$ , vus comme marquages de  $\mathcal{N}$ , alors il existe une place  $x \in P$  se trouvant dans exactement l'un de ces deux marquages; donc il existe une région, l'extension de cette place, qui distingue les états  $s_1$  et  $s_2$ . Si l'événement  $e$  n'est pas autorisé dans un état  $s$ , vu comme un marquage  $M = \lfloor s \rfloor_S$ , alors on a soit  $\bullet e \not\subseteq M$  ou bien  $e \bullet \cap M \neq \emptyset$ . Ainsi, il existe une région  $X \equiv (\sigma, \eta)$  pour laquelle  $\sigma(s) = 0$  et  $\eta(e) = -1$ : il s'agit de l'extension de la place  $x \in \bullet e \setminus M$  dans le premier cas et du complément de l'extension de la place  $x' \in e \bullet \cap M$  dans le second cas. Notons  $R_s = \{X \in \mathcal{R}_A \mid s \in X\}$  l'ensemble des régions non triviales de  $A$  contenant l'état  $s$  et posons  $\bullet e$  l'ensemble des régions  $X \equiv (\sigma, \eta)$  de  $A$  telles que  $\eta(e) = -1$ , et  $e \bullet$  l'ensemble des régions  $X \equiv (\sigma, \eta)$  de  $A$  telles que  $\eta(e) = 1$ .

**Observation 2.3.1** *Les deux propriétés de séparation suivantes sont vérifiées dans tout graphe de marquage  $A$  d'un réseau élémentaire:*

–SSP– *Propriété de séparation des états :*

$$\forall s, s' \in S \quad s \neq s' \Rightarrow [\exists R \in \mathcal{R}_A \quad (s \in R \Leftrightarrow s' \notin R)]$$

–ESSP– *Propriété de séparation états/événements :*

$$\forall e \in E \quad \forall s \in S \quad \neg(s \xrightarrow{e}) \Rightarrow [\exists R \in \mathcal{R}_A \quad (R \in \bullet e \wedge s \notin R) \vee (R \in e \bullet \wedge s \in R)]$$

**Définition 2.3.2** *Un système de transitions élémentaire est un automate vérifiant les conditions de Obs. 2.1.3 et les deux propriétés de séparation.*

**Théorème 2.3.3** [43] *L'application qui associe à un état  $s$  d'un automate  $A$  l'ensemble  $R_s$  des régions qui le contiennent est un morphisme de  $A$  dans  $A^{**}$ . Un automate est le graphe de marquage d'un réseau élémentaire marqué si, et seulement si, il s'agit d'un système de transitions élémentaire, et dans ce cas le morphisme précédent est un isomorphisme  $A \cong A^{**}$ .*

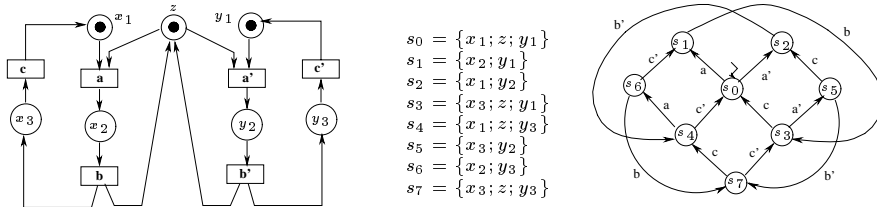


FIG. 2.2 – un réseau élémentaire marqué et son graphe de marquage

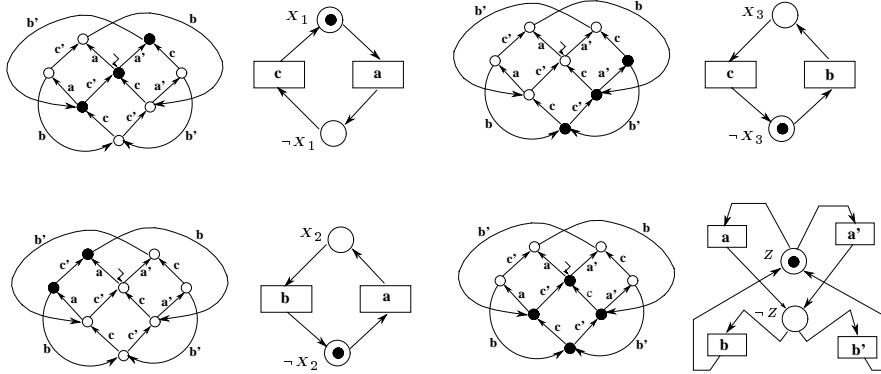


FIG. 2.3 – quelques régions du système de transitions de la figure 2.2

Notons que le complément  $\bar{X} = S \setminus X$  d'une région  $X$  est une région avec des relations de flux opposées :  $X \in \bullet e \Leftrightarrow \bar{X} \in e \bullet$  et  $X \in e \bullet \Leftrightarrow \bar{X} \in \bullet e$ . Bien que le graphe de marquage d'un réseau élémentaire (marqué)  $\mathcal{N}$  soit toujours isomorphe au graphe de marquage de  $\mathcal{N}^{**}$ ,  $\mathcal{N}$  se plonge généralement comme un sous réseau de  $\mathcal{N}^{**}$  avec moins de conditions (le plongement associe à une condition  $x$  la région  $X$  du graphe de marquage qui est constituée de tous les états où cette place est marquée).

**Définition 2.3.4** Un réseau élémentaire marqué  $\mathcal{N}$  est dit saturé si  $\mathcal{N} \cong \mathcal{N}^{**}$ , ou de façon équivalente, si  $\mathcal{N} \cong \mathcal{A}^*$  pour un système de transitions élémentaire  $\mathcal{A}$ .

**Exemple 2.3.5** Considérons le réseau marqué de la figure 2.2. Certaines des régions de son graphe de marquage sont indiquées dans la figure 2.3. Les régions non triviales manquantes peuvent être déduites de celles-ci par symétrie. Dans chaque dessin les états grisés forment une région, disons  $X$ ; les arcs de flux pour cette région et pour la région complémentaire  $\bar{X}$  sont indiqués. Enfin un jeton est porté dans les places contenant l'état initial. On se retrouve avec le réseau élémentaire marqué de la figure 2.4. Ce réseau  $\mathcal{N}^{**}$  est la version saturée de  $\mathcal{N}$  indiqué dans la figure 2.2 et leurs graphes de marquages respectifs sont isomorphes au graphe  $\mathcal{N}^*$  de la figure 2.2. Le plongement de  $\mathcal{N}$  dans  $\mathcal{N}^{**}$  est l'application  $x \rightarrow [x]$  associant à chaque place son extension. L'ensemble des places de  $\mathcal{N}^{**}$  (i.e. des régions de  $\mathcal{N}^*$ ) peuvent être énumérées comme suit :

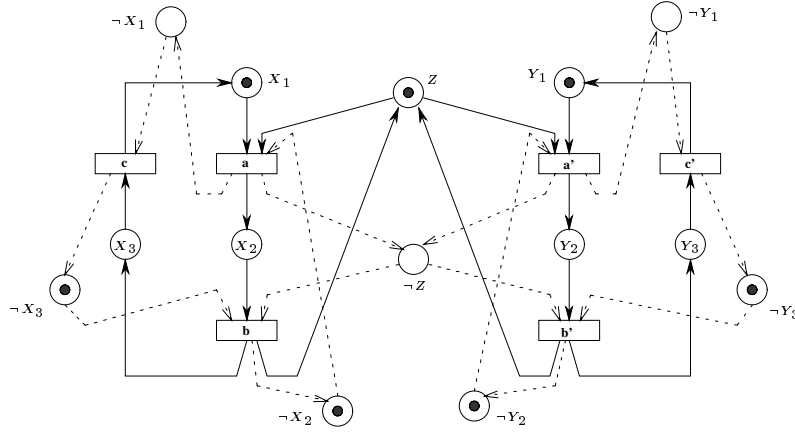


FIG. 2.4 – le réseau élémentaire marqué synthétisé à partir du système de transitions élémentaire de la figure 2.2

$$\begin{array}{ll}
 X & = [x] = \{s_0; s_3; s_4; s_7\} & \overline{X} & = \{s_1; s_2; s_5; s_6\} \\
 X_1 & = [x_1] = \{s_0; s_2; s_4\} & \overline{X_1} & = \{s_1; s_3; s_5; s_6; s_7\} \\
 X_2 & = [x_2] = \{s_1; s_6\} & \overline{X_2} & = \{s_0; s_2; s_3; s_4; s_5; s_7\} \\
 X_3 & = [x_3] = \{s_3; s_5; s_7\} & \overline{X_3} & = \{s_0; s_1; s_2; s_4; s_6\} \\
 Y_1 & = [y_1] = \{s_0; s_1; s_3\} & \overline{Y_1} & = \{s_2; s_4; s_5; s_6; s_7\} \\
 Y_2 & = [y_2] = \{s_2; s_5\} & \overline{Y_2} & = \{s_0; s_1; s_3; s_4; s_6; s_7\} \\
 Y_3 & = [y_3] = \{s_4; s_6; s_7\} & \overline{Y_3} & = \{s_0; s_1; s_2; s_3; s_5\}
 \end{array}$$

### 2.3.1 Ensembles admissibles de régions

Un ensemble de régions  $R \subseteq \mathcal{R}_A$  d'un automate  $A$  est dit *admissible* si  $A \cong \mathcal{N}^*$  où  $\mathcal{N}$  est le réseau associé aux régions dans  $R$  :  $\mathcal{N} = \sum_{X \in R} \mathcal{N}_X$ .

**Proposition 2.3.6** *Tout ensemble de régions contenant un ensemble admissible de régions est admissible.*

Par conséquent, dès qu'un ensemble admissible de régions d'un système de transitions élémentaire a été calculé, le fait d'ajouter de nouvelles régions comme places supplémentaires au réseau synthétisé ne changera pas le comportement de ce réseau. Un aspect du problème de synthèse est de trouver un ensemble admissible de régions aussi petit que possible.

**Proposition 2.3.7** [37] *Etant donné  $A = (S, E, T, s_0)$ ,  $s \in S$ , et  $R' \subseteq \mathcal{R}_A$ , posons  $R'_s = \{X \in R' \mid s \in X\}$  i.e.  $R'_s = R_s \cap R'$ , alors  $R'$  est un ensemble admissible de régions de  $A$  si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites :*

1.  $\forall s, s' \in S \quad R'_s = R'_{s'} \Rightarrow s = s'$ ,
2.  $\forall s \in S \quad \forall e \in E \quad (e \bullet \in R'_s \wedge e^\bullet \cap R'_s = \emptyset) \Rightarrow s \xrightarrow{e}$

Si un automate fini  $A = (S, E, T, s_0)$  vérifiant les conditions de Obs. 2.1.3 est élémentaire, alors il est isomorphe au graphe de marquage d'un réseau ayant au plus  $|S| \times (|S| \times |E|)$

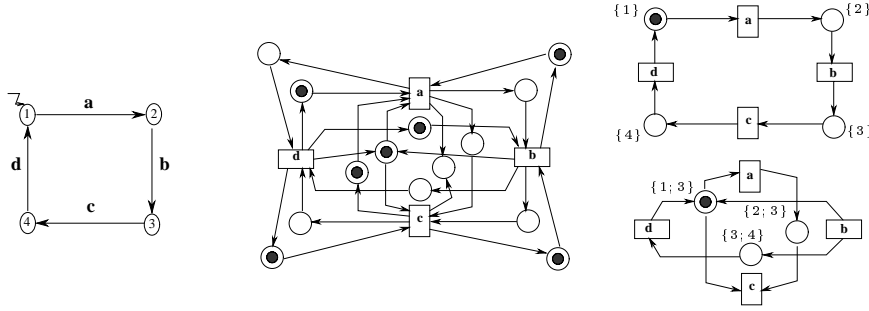


FIG. 2.5 – l'exemple des quatre saisons : l'automate (à gauche), le réseau saturé (au milieu) et deux réseaux associés à des ensembles admissibles de régions (à droite)

places.

**Corollaire 2.3.8** Si  $A = (S, E, T, s_0)$  est un système de transitions élémentaire, il existe un réseau élémentaire (marqué)  $\mathcal{N}$  ayant au plus  $|S| \times (|S| \times |E|)$  places et tel que  $\mathcal{N}^* \cong A$ .

Néanmoins cela ne donne aucune indication sur la façon de choisir ces régions. Par ailleurs on peut noter qu'il n'existe en général pas de plus petit ensemble admissible de régions. Ce fait est illustré par l'exemple "des quatre saisons" emprunté à [37] et indiqué dans la figure 2.5. L'automate des "quatre saisons" peut effectivement être réalisé par deux sous réseaux minimaux du réseau saturé : l'un a quatre conditions et est sans contact et l'autre a trois conditions mais n'est pas sans contact.

**Définition 2.3.9** Un réseau élémentaire  $\mathcal{N} = (P, E, F, M_0)$  est sans contact si  $\bullet e \subset M \Rightarrow M \cap e^\bullet = \emptyset$  pour tout événement  $e$  et tout marquage accessible  $M$ .

C'est une condition ouverte de savoir s'il existe un réseau élémentaire sans contact ayant un nombre minimal de places associé à tout système de transitions élémentaire.

L'adaptation suivante du théorème 2.3.3, basé sur l'utilisation de régions complémentaires est établi dans [37].

**Proposition 2.3.10** Un automate  $A = (S, E, T, s_0)$  est isomorphe à  $\mathcal{N}^*$  où  $\mathcal{N} = (P, E, F, M_0) = \sum_{p \in P} \mathcal{N}_p$  est un réseau élémentaire sans contact si, et seulement si, les sous réseaux atomiques  $\mathcal{N}_p$  de  $\mathcal{N}$  sont définis à partir de régions  $R_p \in \mathcal{R}_A$  et les propriétés de séparation suivantes sont satisfaites:

$$\text{SSP}(s, s') : \forall s, s' \in S \quad s \neq s' \Rightarrow [\exists p \in P \quad s \in R_p \Leftrightarrow s' \notin R_p]$$

$$\text{ESSP}^\#(s, e) : \forall e \in E \quad \forall s \in S \quad \neg(s \xleftrightarrow{e}) \Rightarrow [\exists p \in P \quad R_p \in \bullet e \wedge s \notin R_p].$$

Bernardinello a établi dans [19] que l'ensemble des régions minimales (pour l'inclusion) d'un système de transitions élémentaire est un ensemble admissible de régions. Par ailleurs les composants séquentiels d'un réseau élémentaire sont en correspondance bijective avec les partitions de son graphe de marquage par des régions minimales. Dans [20] il est montré que l'ensemble des régions d'un système de transitions élémentaire ordonné par inclusion est un ensemble orthomodulaire dont les sous algèbres de Boole correspondent aux ensembles de régions de ses composants séquentiels.

## 2.4 La synthèse des réseaux élémentaires est NP-complet

Hiraishi a prouvé dans [54] que chacun des deux problèmes de séparation  $SSP(s, s')$  et  $ESSP^\#(s, e)$  sont NP-complets en les données  $(A, s, s')$  et  $(A, s, e)$ . Puisque l'ensemble des régions de  $A$  est clos par passage au complémentaire le problème  $ESSP(s, e)$  est également NP-complet. Il ne s'en suit pas que le problème de synthèse pour les réseaux élémentaires est NP-complet; ce qui est néanmoins vrai. Le problème de synthèse est clairement dans la classe NP puisque le nombre total d'instances de problèmes de séparation est quadratique en la taille de l'automate et qu'il peut être vérifié en temps polynomial si un sous-ensemble donné d'états est une région résolvant une instance donnée d'un problème de séparation. Une réduction polynomiale du problème 3-SAT au problème de synthèse des réseaux élémentaires est donnée dans [7], ce qui montre puisque 3-SAT est NP-complet (voir [46]) que le problème de synthèse est NP-dur et donc NP-complet. La preuve repose sur un codage des problèmes de séparation par des systèmes de clauses sur l'anneau de Boole. On conclut alors en deux étapes. D'une part on montre que le problème 3-SAT se réduit en un problème de satisfaction d'un tel système de clauses. Puis on montre qu'étant donné un tel système on peut construire un automate dont la taille est polynomiale en la taille du système de clauses et tel que le système soit satisfiable si, et seulement si, l'automate est élémentaire.

Nous n'allons pas décrire plus en détail ces deux étapes, le lecteur est renvoyé à [7]. Nous allons cependant expliquer comment les problèmes de séparation peuvent s'écrire comme des systèmes de clauses sur l'anneau de Boole. On retrouvera un codage analogue au chapitre 4 consacré à la synthèse des systèmes d'addition de vecteurs avec la notable différence que dans ce cas nous serons conduit à des équations linéaires ce qui nous permettra de trouver un algorithme polynomial.

D'après ce que nous avons vu, le problème de synthèse des réseaux élémentaires se ramène à la résolution d'un nombre quadratique (en la taille de l'automate) d'instances d'un des deux problèmes de séparation suivants:

*Problème de séparation des états (SSP):*

Etant donné  $T = (S, E, T)$  et une paire d'états distincts  $(s_1, s_2) \in S \times S$ , trouver une région  $X$  pour laquelle  $s_1 \in X$  si, et seulement si,  $s_2 \notin X$ .

*Problème de séparation états/événements (ESSP):*

Etant donné  $T = (S, E, T)$  et une paire  $(s, e) \in S \times E$  telle que l'événement  $e$  ne soit pas autorisé en  $s$  ( $s \not\stackrel{e}{\rightarrow} s'$  pour aucun  $s' \in S$ ), trouver une région  $X$  qui *inhibe*  $e$  en  $s$  en ce sens que  $X \in \bullet e$  et  $s \notin X$ .

Procédons maintenant au codage de ces problèmes de séparation en équations sur l'anneau de Boole  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .

**Définition 2.4.1** Les secondes projections  $\eta : E \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  de régions  $(\sigma, \eta)$  sont appelées régions signées, et les applications  $\rho : E \rightarrow \{0, 1\}$  découlant de régions signées par  $\rho(e) = |\eta(e)|$  sont appelés régions abstraites.

Etant donnée une région  $(\sigma, \eta)$ , la région abstraite  $\rho = |\eta|$  indique quels événements induisent un changement de la valeur courante de  $\sigma$ :

$$s \stackrel{e}{\rightarrow} s' \in T \quad \Rightarrow \quad [\sigma(s) \neq \sigma(s') \Leftrightarrow \rho(e) = 1] \quad (2.1)$$

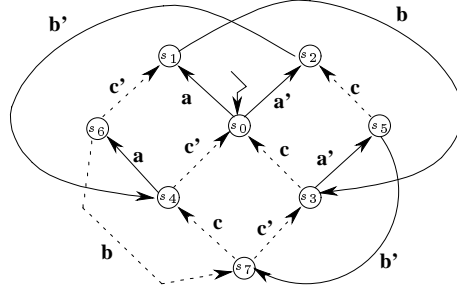


FIG. 2.6 – un graphe et un de ses arbres couvrants

Les régions abstraites d'un système de transitions  $(S, E, T)$  sont des éléments du  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -module libre sur l'ensemble  $E$  de générateurs (i.e. de l'ensemble  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[E]$  des applications de  $E$  dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ).

**Observation 2.4.2** *Si le système de transition est connexe, une région abstraite détermine exactement deux régions complémentaires.*

La principale étape vers une traduction des propriétés de séparation en équations sur l'anneau de Boole est la production d'une caractérisation algébrique des régions abstraites d'un système de transitions. Appelons *chaîne*  $c = \sum c_j \cdot t_j$  un élément de  $\mathbf{Z}[E]$  (ensemble des applications de  $E$  dans  $\mathbf{Z}$ ). L'*image de Parikh modulo 2* d'une chaîne  $c = \sum c_j \cdot t_j$  est le vecteur  $\psi_2(c) = \sum c_j \cdot \ell(t_j) \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[E]$ .

**Exemple 2.4.3** *La figure 2.6 donne un graphe avec un de ses arbres couvrants. Il y a 7 cordes (transitions n'appartenant pas à l'arbre couvrant):  $t_1 = s_5 \xrightarrow{c} s_2$ ,  $t_2 = s_3 \xrightarrow{c'} s_0$ ,  $t_3 = s_7 \xrightarrow{c} s_4$ ,  $t_4 = s_6 \xrightarrow{c'} s_1$ ,  $t_5 = s_4 \xrightarrow{c'} s_0$ ,  $t_6 = s_7 \xrightarrow{c} s_3$ , et  $t_7 = s_6 \xrightarrow{b} s_7$ , qui déterminent une base des cycles du graphe. Par exemple, la transition  $t_1 = s_5 \xrightarrow{c} s_2$  détermine le cycle*

$$c^{t_1} = (s_0 \xrightarrow{a} s_1) + (s_1 \xrightarrow{b} s_3) + (s_3 \xrightarrow{a'} s_5) + (s_5 \xrightarrow{c} s_2) \leftrightarrow (s_0 \xrightarrow{a'} s_2)$$

d'*image de Parikh*  $\psi_2(c^{t_1}) = a + b + c$ . On peut vérifier  $\psi_2(c^{t_1}) = \psi_2(c^{t_2}) = \psi_2(c^{t_3}) = a + b + c$ ,  $\psi_2(c^{t_4}) = \psi_2(c^{t_5}) = \psi_2(c^{t_6}) = a' + b' + c'$ , et  $\psi_2(c^{t_7}) = 0$ .

La propriété essentielle des régions abstraites est alors

**Proposition 2.4.4** *Si  $\rho : E \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  est une région abstraite du système de transitions  $(S, E, T)$  alors  $\rho \cdot \psi_2(c) = 0$  dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  pour tout cycle  $c$  du graphe sous-jacent à  $T$ .*

Cette propriété fondamentale ne suffit pas à caractériser les régions abstraites. Pour la suite considérons fixés un automate  $A=(S, E, T, s_0)$  et un arbre couvrant  $U \subseteq T$  raciné en l'état initial. Pour chaque état  $s \in S$ , posons  $c_s$  la branche de  $s_0$  à  $s$  dans l'arbre couvrant, et  $\psi_s = \psi_2(c_s)$  son image de Parikh modulo 2. Supposons maintenant que  $|\eta(e)| = 1$  pour une région  $(\sigma, \eta)$  pour laquelle l'événement  $e$  soit autorisé en les états  $s$  et  $s'$ , alors nécessairement  $\sigma(s) = \sigma(s')$  par définition des régions. Dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , cela peut s'exprimer par l'équation non linéaire

$$\rho(e) \times [\rho \cdot (\psi_s + \psi_{s'})] = 0$$

où  $\rho(e') = |\eta(e')|$  pour tous  $e' \in E$ . On obtient ainsi une caractérisation des régions abstraites :

**Proposition 2.4.5** *Une application  $\rho : E \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est une région abstraite si, et seulement si, elle vérifie*

$$\rho \cdot \psi_2(c^t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\rho(e) \times [\rho \cdot (\psi_s + \psi_{s'})] = 0 \quad (2.3)$$

pour tout cycle  $c^t$  dans la base des cycles, pour tout événement  $e \in E$ , et pour toute paire d'états  $s$  et  $s'$  auxquels  $e$  est autorisé.

**Exemple 2.4.6 (suite)** *Les images de Parikh des cycles sont  $a + b + c$ ,  $a' + b' + c'$  et 0, les équations de type (2.2) sont*

$$\rho(a) + \rho(b) + \rho(c) = 0 \quad \text{et} \quad \rho(a') + \rho(b') + \rho(c') = 0, \quad (2.4)$$

elles déterminent un  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -module engendré par

$$\rho_1 = a + c \quad ; \quad \rho_2 = b + c \quad ; \quad \rho_3 = a' + c' \quad ; \quad \rho_4 = b' + c'$$

Une combinaison linéaire  $\rho$  de ces vecteurs est une région abstraite du graphe indiqué à la figure 2.6 si, et seulement si, elle vérifie les équations non linéaires de type (2.3), qui modulo les équations (2.4) s'écrivent :

$$\rho(a) \times \rho(c') = \rho(b) \times \rho(c') = \rho(c) \times \rho(c') = \rho(c) \times \rho(a') = \rho(c) \times \rho(b') = 0$$

Parmi les  $2^4$  éléments du  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -module engendré par  $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$  on dénombre 7 régions abstraites, elles correspondent aux lignes du tableau 2.1. Toute région abstraite  $\rho$  détermine deux régions complémentaires  $X_\rho$  et  $\overline{X_\rho}$ , avec  $X_\rho = \{s \in S \mid \rho \cdot \psi_s = 1\}$  et par conséquent  $s_0 \notin X_\rho$ . Les états  $s_0$  à  $s_7$  sont représentés par les vecteurs  $\pi_s$  :

$$\begin{array}{cccc} \psi_{s_0} = 0 & \psi_{s_1} = a & \psi_{s_2} = a' & \psi_{s_3} = a + b \\ \psi_{s_4} = a' + b' & \psi_{s_5} = a + b + a' & \psi_{s_6} = a' + b' + a & \psi_{s_7} = a + b + a' + b' \end{array}$$

Les régions  $X_\rho$ , qui apparaissent dans le tableau 2.1, sont la moitié des 14 régions de la figure 2.4; la correspondance est rendue explicite dans la figure 2.7.

Indiquons maintenant le codage des instances des propriétés de séparation SSP et ESSP.

**Définition 2.4.7** *Une région abstraite  $\rho$  sépare les états  $s$  et  $s'$  si elle satisfait à l'équation*

$$\rho \cdot (\psi_s + \psi_{s'}) = 1 \quad (2.5)$$

Une région abstraite  $\rho$  inhibe l'événement  $e$  en l'état  $s$  s'il satisfait aux équations

$$\rho(e) = 1 \quad (2.6)$$

$$\rho \cdot (\psi_s + \psi_{s'}) = 1 \quad (2.7)$$

où  $s'$  est un état arbitraire autorisant  $e$ . Un ensemble  $R$  de régions abstraites est admissible s'il procure une région séparatrice pour chaque paire d'états distincts et une région inhibitrice pour chaque paire  $(s, e)$  constituée d'un événement  $e$  et d'un état  $s$  n'autorisant pas  $e$ .



TAB. 2.1 – les régions  $X_\rho$  associées aux régions abstraites  $\rho$ 

$\rho \cdot \psi_s$	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$
$\rho_1$	0	1	0	1	0	1	1	1
$\rho_2$	0	0	0	1	0	1	0	1
$\rho_3$	0	0	1	0	1	1	1	1
$\rho_4$	0	0	0	0	1	0	1	1
$\rho_1 + \rho_2$	0	1	0	0	0	0	1	0
$\rho_3 + \rho_4$	0	0	1	0	0	1	0	0
$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4$	0	1	1	0	0	1	1	0

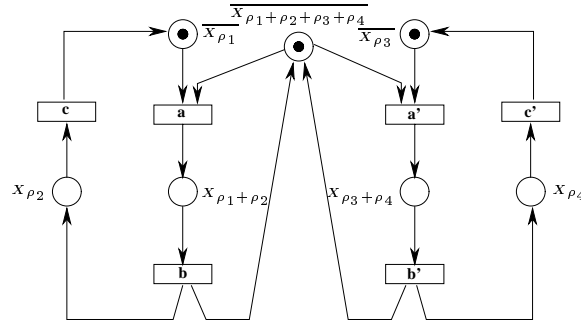


FIG. 2.7 – le réseau synthétisé à partir de l'ensemble (admissible) de régions abstraites

Un ensemble admissible de régions peut toujours être construit à partir d'un ensemble admissible de régions abstraites : si  $\rho$  sépare  $s$  et  $s'$  alors  $X_\rho$  et  $\overline{X_\rho}$  séparent  $s$  et  $s'$ ; si  $\rho$  inhibe  $e$  en  $s$  alors soit  $X_\rho$  ou bien  $\overline{X_\rho}$  inhibe  $e$  en  $s$ . Dans notre exemple l'ensemble de toutes les régions abstraites est admissible et aucun de ses sous ensembles stricts ne l'est.

**Proposition 2.4.8** *Un automate est le graphe de marquage d'un réseau élémentaire si, et seulement si, il peut être muni d'un ensemble admissible de régions abstraites.*

#### Définition 2.4.9 (Système de clauses sur l'anneau de Boole)

Soit  $X = \{x_0, \dots, x_n\}$  un ensemble fini de variables booléennes, avec un élément distingué  $x_0$ . Un système de clauses sur l'anneau de Boole est une paire  $(\Sigma, \Pi)$  dans laquelle  $\Sigma$  est un ensemble fini de clauses additives  $\sigma_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) et  $\Pi$  est un ensemble fini de clauses multiplicatives  $\pi_\beta$  ( $\beta \in B$ ) de formes respectives  $x_{\alpha_0} + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2}$  et  $x_{\beta_1} \cdot x_{\beta_2}$ , et sujets aux restrictions suivantes : toute clause additive a exactement trois variables, deux clauses additives partagent au plus une variable, toute clause multiplicative a exactement deux variables, et la variable distingué  $x_0$  n'apparaît dans aucune clause multiplicative. Le système  $(\Sigma, \Pi)$  est dit satisfiable s'il existe une valuation pour  $X$  pour laquelle  $x_0 = 1$ ,  $\sigma_\alpha = 0$  pour tout  $\alpha \in A$ , et  $\pi_\beta = 0$  pour tout  $\beta \in B$ . Une telle valuation est appelée solution du système  $(\Sigma, \Pi)$ .

Notons que dans l'anneau de Boole  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , du fait de la loi  $z + z = 0$ , les équations  $z_0 = z_1 + \dots + z_n$  et  $z_0 + z_1 + \dots + z_n = 0$  sont équivalentes. Il s'en suit que chaque

instance des problèmes SSP et ESSP peut se réduire à la satisfiabilité d'un tel système de clauses, dont la taille est polynomiale en la taille du système de transitions.

Nous avons montré dans [7] que le problème de satisfiabilité des systèmes de clauses sur l'anneau de Boole, le problème 3-SAT et le problème de synthèse des réseaux élémentaires sont inter-réductibles de façon polynomiale. Il s'ensuit que le problème de synthèse des réseaux élémentaires est NP-complet.

## Chapitre 3

# Représentation des automates réversibles

La plupart des familles de réseaux considérée dans la littérature ont des graphes de marquage réversibles, c'est à dire dans lesquels chaque événement induit une bijection partielle de l'ensemble des états. Cette propriété très particulière nous autorise à emprunter à la littérature sur la théorie combinatoire des groupes [50, 66, 65, 101] des notions telles que celles de revêtements, de groupes agissant sur des ensembles, et d'homologie qui ont l'avantage d'avoir été bien étudiées. L'étude des propriétés algébriques de cette classe d'automates s'en trouve ainsi considérablement simplifiée. Dans la première section de ce chapitre, nous donnons un aperçu de cette théorie dont une variante est connue comme l'étude des *monoïdes inversibles* [81, 100]. Dans la seconde partie de ce chapitre nous donnons une classification des représentations des automates réversibles comme sous graphes induits de graphes de Schreier. Les conditions devant être satisfaites par les groupes de représentation sont similaires aux propriétés de séparation découvertes par Ehrenfeucht et Rozenberg pour les systèmes de transitions élémentaires. Nous décrivons également le calcul de la représentation canonique d'un automate commutatif, c'est à dire un automate induit d'un graphe de Cayley d'un groupe commutatif.

### 3.1 Les automates réversibles

Un système de transitions est *déterministe* si  $s \xrightarrow{e} s_1 \wedge s \xrightarrow{e} s_2 \Rightarrow s_1 = s_2$  et *co-déterministe* si  $s_1 \xrightarrow{e} s \wedge s_2 \xrightarrow{e} s \Rightarrow s_1 = s_2$ .

**Définition 3.1.1** *Un système de transitions réversible est un système de transitions déterministe et co-déterministe.*

#### 3.1.1 Les graphes de Schreier

Un système de transitions réversible est *complet* si chaque événement induit une permutation de l'ensemble des états. Si  $G$  est un groupe,  $H$  un sous groupe de  $G$ , et  $E$  un sous

ensemble de  $G$  (habituellement un ensemble de générateurs de  $G$ ), le graphe de Schreier  $S(G, H, E)$  est le système de transitions réversible complet dont les états sont les classes à droites  $H \backslash G = \{Hg | g \in G\}$  et dont les transitions sont les triplets  $(Hg, e, Hge)$ . Le graphe de Cayley  $C(G, E)$  est  $S(G, 1, E)$  où 1 est le sous-groupe trivial; plus généralement si  $H$  est un sous-groupe distingué de  $G$  et si aucune paire d'éléments de  $E$  ne sont équivalents modulo  $H$ , alors le graphe de Schreier  $S(G, H, E)$  est isomorphe au graphe de Cayley  $C(G/H, E/H)$ . Tout système de transitions réversible complet  $(S, E, T, s_0)$  dont le graphe sous-jacent est connexe est isomorphe au graphe de Schreier  $S(G, H, E)$  où  $G$  est le groupe engendré par les permutations de  $E$  et  $H = G_{s_0} = \{g \in G | s_0 \cdot g = s_0\}$  est le stabilisateur de l'état initial. De fait chaque état  $s \in S$  se représente de façon non ambiguë par l'ensemble  $G_{s_0, s} = \{g \in G | s_0 * g = s\}$  qui est une classe à droite modulo  $H$ , et cette correspondance est un isomorphisme de systèmes de transitions. Par ailleurs les stabilisateurs des états d'un système de transitions réversible complet et connexe sont conjugués ( $G_{s'} = u^{-1}G_s u$  lorsque  $s' = s * u$ ) et l'application  $S(G, G_s, E) \xrightarrow{\sim} S(G, G_{s'}, E) : G_s v \mapsto G_{s'} u^{-1} v$  est un isomorphisme. Inversement  $S(G, H, E) \cong S(G, K, E)$  entraîne que les groupes  $H$  et  $K$  sont conjugués dans  $G$ .<sup>1</sup>

### 3.1.2 Automates Réversibles

Soit  $\bar{E}$  une copie de  $E$  constitué d'inverses formels  $\bar{e}$  des événements  $e \in E$ . Nous rappelons que le groupe libre engendré par  $E$  est le groupe dont les générateurs sont les éléments de  $E \cup \bar{E}$  et d'équations  $e \cdot \bar{e} = \bar{e} \cdot e = 1$  pour  $e \in E$ . On appellera mot de  $F(E)$  un mot  $u \in (E \cup \bar{E})^*$ . Un tel mot est dit *réduit* s'il ne contient aucun sous-mot de la forme  $e \cdot \bar{e}$  ou  $\bar{e} \cdot e$  pour  $e \in E$ . Un mot réduit est donc la forme canonique d'un élément de  $F(E)$ . Néanmoins afin de simplifier les notations nous ne ferons généralement pas de distinction entre un mot de  $F(E)$  et l'élément de  $F(E)$  que ce mot représente. le groupe libre  $F(E)$  a une action partielle sur l'ensemble des états d'un système de transitions réversible  $(S, E, T)$  donnée par  $s * e = s'$  et  $s' * \bar{e} = s$  lorsque  $s \xrightarrow{e} s'$ .  $A$  est dit *connexe* lorsque  $F(E)$  agit transitivement sur  $S$ , i.e. le graphe sous-jacent à  $T$  est connexe.

**Définition 3.1.2** *Un automate réversible est un système de transitions réversible connexe muni d'un état dit initial.*

### 3.1.3 Groupe fondamental et revêtements

Le *groupe fondamental* du système de transitions réversible  $T$  en l'état  $s \in S$  est  $\pi_1(T, s) = \{u \in F(E) | s * u = s\}$ . Un élément de  $\pi_1(T, s)$  est appelé *chemin fermé* basé en  $s$ . Si le système de transitions est connexe tous ses groupes fondamentaux sont conjugués dans  $F(E)$  et donc isomorphes :  $\pi_1(T, s') = u^{-1} \cdot \pi_1(T, s) \cdot u$  lorsque  $s * u = s'$ . Le groupe fondamental d'un automate réversible  $A = (S, E, T, s_0)$  est celui de son système

1. Le graphe de Schreier  $S(G, H, E)$  n'est rien d'autre qu'une représentation graphique du  $G$ -ensemble  $\text{cos}(G:H)$  constitué des classes à droite  $H \backslash G$  sur lesquelles  $G$  opère par multiplication (à droite) et les résultats mentionnés ci-dessus ne sont qu'une reformulation du fait que tout  $G$ -ensemble *transitif* est isomorphe à un espace quotient  $\text{cos}(G:H)$  pour  $H$  un sous-groupe de  $G$  et qu'on en déduit une correspondance bijective entre les classes d'isomorphie de  $G$ -ensembles transitifs et les classes de conjugaison de sous-groupes de  $G$ .

de transitions calculé en l'état initial :  $\pi_1(A) = \pi_1(T, s_0)$ . Fixons quelques notations que nous utiliserons fréquemment par la suite.

**Notation 3.1.3** Si  $U$  un arbre couvrant de  $T$ , on pose  $u_s$  le mot (réduit) étiquetant l'unique chemin dans  $U$  allant de l'état initial  $s_0$  à l'état  $s$ . Chaque corde  $t \in T \setminus U$  où  $t = s \xrightarrow{\epsilon} s'$  détermine un chemin fermé  $c_t = u_s \cdot e \cdot u_{s'}^{-1}$  basé en  $s_0$ .

Le groupe fondamental  $\pi_1(A)$  est le groupe libre engendré par les chemins associés aux cordes d'un arbre couvrant.

Il y a une correspondance bijective entre les sous-groupes  $H$  de  $F(E)$  et les équivalences régulières à droite de  $F(E)$  donnée par  $u \equiv v \Leftrightarrow u \cdot v^{-1} \in H$ , et  $\equiv$  est une congruence si, et seulement si,  $H$  est un sous-groupe distingué de  $F(E)$ . On dit qu'un sous-groupe  $H$  de  $F(E)$  sature un langage  $L \subseteq F(E)$  lorsque son équivalence le sature, c'est à dire lorsque  $L$  est une union de classes à droite de  $H$ . Le langage d'un automate réversible  $A = (S, E, T, s_0)$  donné par  $L(A) = \{u \in F(E) \mid \exists s \in S \ s_0 * u = s\}$  est saturé par son groupe fondamental car  $L(A) = \bigcup_{s \in S} \pi_1(A)u_s$  où  $u_s$  est le mot réduit étiquetant le chemin de  $s_0$  à  $s$  dans un arbre couvrant préalablement fixé. Inversement, si  $H$  est un sous-groupe de  $F(E)$  et  $L \subseteq F(E)$  est un langage clos par préfixes saturé par  $H$ , on pose  $S(L, H, E)$  le graphe induit du graphe de Schreier  $S(F(E), H, E)$  sur l'ensemble des classes à droite de  $H$  incluses dans  $L$ ; c'est à dire  $S(L, H, E) = (E, S, T, s_0)$  où  $S = \{Hu \mid u \in F(E) \ Hu \subseteq L\}$  et  $T = \{(Hu, e, Hue) \mid u \in F(E) \ e \in E \ Hu \subseteq L \ Hue \subseteq L\}$ , et  $s_0 = H$ . Alors  $\pi_1(S(L, H, E)) = H$ ,  $L(S(L, H, E)) = L$  et  $A \cong S(L(A), \pi_1(A), E)$ . On en déduit une correspondance bijective entre l'ensemble des équivalences régulières à droite saturant un langage clos par préfixes  $L \subseteq F(E)$ , l'ensemble des sous-groupes de  $F(E)$  saturant  $L$  et l'ensemble des classes d'isomorphismes des automates réversibles reconnaissant  $L$ .

La notion de revêtement d'automates réversibles est duale de l'inclusion entre leurs groupes fondamentaux : un revêtement d'un automate réversible  $A$  est la donnée d'un autre automate réversible  $\tilde{A}$  et d'un morphisme d'automates  $f : \tilde{A} \rightarrow A : f(s * u) = f(s) * u$  et  $f(s_0) = \tilde{s}_0$ . De ce fait il existe un revêtement de  $\tilde{A}$  vers  $A$  si, et seulement si, ils ont le même langage et  $\pi_1(\tilde{A}) \subseteq \pi_1(A)$ . Le revêtement est déterminé de façon unique par  $f(\tilde{s}_0 * u) = s_0 * u$ . Nous écrirons  $A \leq \tilde{A}$  dans ce cas et dirons que  $\tilde{A}$  couvre  $A$ . On déduit que l'ensemble des classes d'isomorphismes d'automates réversibles reconnaissant  $L \subseteq F(E)$  ordonné par la relation de couverture est duale de l'ensemble des sous-groupes de  $F(E)$  saturant  $L$  ordonné par inclusion.

Notons que si  $\pi_1(\tilde{A}) \subseteq \pi_1(A)$  alors  $\pi_1(\tilde{A})$  sature tout langage saturé par  $\pi_1(A)$  et que par conséquent les revêtements  $\tilde{A}$  de  $A$  peuvent être classés à isomorphisme près par les sous-groupes de  $\pi_1(A)$ ; en particulier il y a un revêtement maximal associé au sous-groupe trivial. De façon symétrique les quotients de  $A$  correspondent à isomorphismes près aux groupes  $H$  saturant le langage de  $A$  et contenant son groupe fondamental.

Un revêtement  $f : \tilde{A} \rightarrow A$  est dit galoisien si  $\pi_1(\tilde{A})$  est un sous-groupe distingué de  $\pi_1(A)$ . Le groupe de Galois de ce revêtement est le quotient  $\pi_1(A)/\pi_1(\tilde{A})$ . Un chemin dans un automate réversible  $A = (S, E, T, s_0)$  est une paire  $(s, u) \in S \times F(E)$  où  $s * u$  est définie, c'est un chemin fermé basé en  $s$ , ce qu'on note  $(s, u) \in C(s)$ , si de plus  $s * u = s$  (ainsi  $\pi_1(T, s) = \{(s, u) \in C(s)\}$ ). Deux chemins fermés  $(\tilde{s}, u)$  et  $(\tilde{s}', u')$  de  $\tilde{A}$  sont conjugués dans le revêtement  $f : \tilde{A} \rightarrow A$  s'ils ont la même image, c'est à dire  $f(\tilde{s}) = f(\tilde{s}')$  et  $u = u'$ . Un revêtement  $f : \tilde{A} \rightarrow A$  est galoisien si, et seulement si, tout

chemin conjugué à un chemin fermé est lui même fermé.

L'équivalence de Nerode d'un langage  $L \subseteq F(E)$  est définie par  $u \equiv v \Leftrightarrow [\forall w \in F(E) \quad u \cdot w \in L \Leftrightarrow v \cdot w \in L]$ , c'est à dire  $u \equiv v$  si, et seulement si,  $u^{-1}L = v^{-1}L$ . Il s'agit de la plus grande demi congruence à droite saturant  $L$ , et donc le groupe de Nerode  $N_L = \{u \in F(E) \mid u^{-1}L = L\}$  est le plus grand sous-groupe de  $F(E)$  saturant  $L$ .

## 3.2 Représentations des automates réversibles

### 3.2.1 Extensions des automates réversibles

**Définition 3.2.1** Une extension d'un automate réversible  $A = (S, E, T, s_0)$  est un automate réversible complet isomorphe à un  $A' = (E, S', T', s_0)$  tel que  $S \subseteq S'$  et  $T = T' \cap (S \times E \times S)$ . L'inclusion de  $S$  dans  $S'$  est qualifiée de plongement plein de  $A$  dans  $A'$ .

Si  $U \subseteq T$  est un arbre couvrant de l'automate  $A$ , nous posons  $\Delta(A, U)$  le sous-ensemble suivant de  $F(E)$ :

$$\Delta(A, U) = \{u_s \cdot u_{s'}^{-1} \mid \forall s, s' \in S \quad s \neq s'\} \cup \{u_s \cdot e \cdot u_{s'}^{-1} \mid \forall s, s' \in S \quad s \xrightarrow{e} s'\}$$

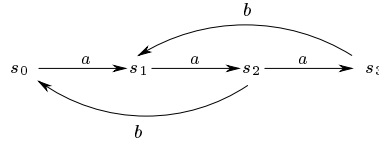
On dit que le mot  $u_s \cdot u_{s'}^{-1}$  sépare les états  $s$  et  $s'$ , et que le mot  $u_s \cdot e \cdot u_{s'}^{-1}$  inhibe la transition  $s \xrightarrow{e} s'$ . Le résultat suivant donne une classification des extensions d'un automate réversible, les conditions devant être satisfaites pour une telle extension sont analogues aux propriétés de séparation introduites par Ehrenfeucht et Rozenberg pour les systèmes de transitions élémentaires. D'après le théorème de Hrushovski [57] (voir aussi [52]) tout automate réversible fini admet une extension finie et l'utilisation du théorème de Hall [51] dans [5] afin de prouver l'existence de cette extension est empruntée à la preuve du théorème de Hrushovski donnée par Lascar et Herwig [53].

**Proposition 3.2.2** Tout automate réversible  $A = (S, E, T, s_0)$  admet une extension  $A' = (E, S', T', s_0')$  ayant le même groupe fondamental:  $\pi_1(A') = \pi_1(A)$ . Si  $A$  est fini alors il admet une extension finie. A isomorphisme près les extensions d'un automate réversible  $A$  sont en correspondance bijective avec les sous-groupes  $H$  de  $F(E)$  tels que  $\pi_1(A) \subseteq H$  et  $H \cap \Delta(A, U) = \emptyset$  où  $U$  est un arbre couvrant de  $A$ . L'extension associée à  $H$  est  $A_H = (S(F(E), H), E)$  avec le plongement plein  $S \hookrightarrow H \setminus F(E) \quad : \quad s \mapsto Hu$  où  $s_0 * u = s$ .  $A$  admet un plongement plein dans un graphe de Cayley si, et seulement si,  $N(\pi_1(A)) \cap \Delta(A, U) = \emptyset$  où  $N(\pi_1(A))$  est la fermeture normale du groupe fondamental dans  $F(E)$ .<sup>2</sup> Un tel graphe de Cayley est alors  $C(G, E)$  où  $G$  est le groupe de présentation  $G = (E, B)$  où  $B = \{c_t \mid t \in T \setminus U\}$  est la base de  $\pi_1(A)$  associée à un arbre couvrant  $U$  de  $A$ .

**Corollaire 3.2.3**  $\pi_1(A) \cap \Delta(A, U) = \emptyset$ .

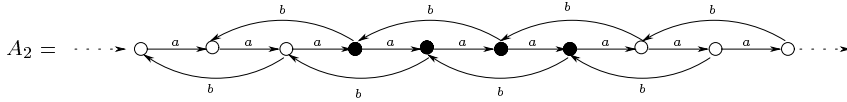
2. Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , la fermeture normale de  $H$  dans  $G$  est le plus petit sous-groupe distingué de  $G$  contenant  $H$ ; c'est le groupe engendré par les conjugués d'éléments de  $H$ .

Soit  $A_1$  l'automate réversible suivant



son groupe fondamental  $\pi_1(A_1)$  est le sous-groupe de  $F(E)$  engendré par les mots  $aab$  et  $aaaba^{-1}$ , sa fermeture normale est le groupe engendré par les mots  $uaabu^{-1}$  pour  $u$  un mot quelconque de  $F(E)$ . Ainsi

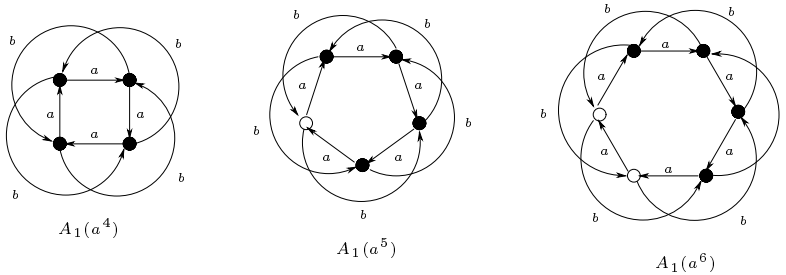
$$F(E)/N(\pi_1(A_1)) = (\{a; b\}; aab) \cong \mathbb{Z}$$



Si  $U$  est l'arbre couvrant de  $A$  formé des transitions étiquetées  $a$ ,

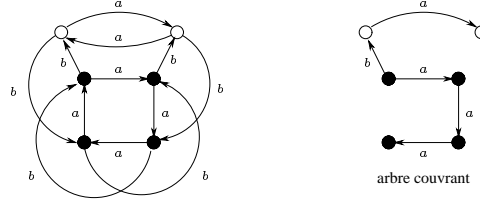
$$\Delta(A_1, U) = \{a, a^2, a^3, a^4, ab, aba^{-1}, aba^{-2}, aba^{-3}, b, ba^{-1}, ba^{-2}, ba^{-3}\}$$

$\Delta(A_1, U) \cap N(\pi_1(A_1)) = \emptyset$  car aucun des éléments de  $\Delta(A_1, U)$  ne s'envoie sur  $0 \in \mathbb{Z}$ . Ainsi le graphe de Cayley  $A_2$  est une extension de  $A_1$ . Si  $X \subseteq F(E)$ , notons  $A_1(X)$  l'automate  $S(F(E), H(X), E)$  où  $H(X)$  est la fermeture normale du sous-groupe de  $F(E)$  engendré par  $a^2b$  et les mots de  $X$ . Alors  $A_1(a^6)$  est une extension finie de  $A_1$ .



Par contre  $A_1(a^4)$  n'est pas une extension de  $A_1$  car  $a^4 \in \Delta(A_1, U)$  ce qui correspond à l'ajout de la transition  $s_3 \xrightarrow{a} s_0$ . De la même façon  $A_1(a^5)$  n'est pas une extension de  $A_1$  car  $ba^{-3} = [a^{-2} \cdot (a^2b) \cdot a^2] \cdot a^{-5} \in \Delta(A_1, U) \cap H(a^5)$  ce qui correspond à l'ajout de la transition  $s_0 \xrightarrow{b} s_3$ . Considérons maintenant l'automate  $A_3$  obtenu à partir de  $A_1$  en ajoutant la transition  $s_3 \xrightarrow{a} s_0$ ,  $\pi_1(A_3)$  est le sous-groupe de  $F(E)$  engendré par les mots  $aab, aaaba^{-1}$  et  $a^4$ , et  $\Delta(A_3, U) = \Delta(A_1, U) \setminus \{a^4\}$ .  $A_3$  ne se plonge pas pleinement dans  $S(F(E), N(\pi_1(A_3)), E) = A_1(a^4)$  à cause des deux transitions supplémentaires  $s_1 \xrightarrow{b} s_3$  et  $s_0 \xrightarrow{b} s_2$  qui correspondent respectivement aux éléments  $aba^{-3} = a^{-1} \cdot (a^2b \cdot a^{-4}) \cdot a$  et  $ba^{-2} = a^2 \cdot (a^{-4} \cdot a^2b) \cdot a^{-2}$  de  $N(\pi_1(A_3)) \cap \Delta(A_3, U)$ . On en déduit que  $A_3$  n'a pas

d'extensions dans un graphe de Cayley. Une extension finie de  $A_3$  est la suivante :



elle correspond au groupe  $H$  engendré par  $a^4$ ,  $a^2b$ ,  $a^3ba^{-1}$ ,  $ba^2b^{-1}$ ,  $aba^{-1}b^{-1}$ ,  $b^2a^{-3}$ , et  $ab^2a^{-2}$  (associés aux cordes de l'arbre couvrant indiqué sur la figure).

### 3.2.2 Automates commutatifs

L'*image de Parikh* est le morphisme de groupes  $\psi : F(E) \rightarrow \mathbb{Z}[E]$  donné par  $\pi(e) = e$ . On écrit les éléments du groupe commutatif libre comme des sommes formelles :  $V = \sum V(e) \cdot e$ , ce qui nous permet d'écrire  $\psi(aba^{-2}) = \Leftrightarrow a + b$  et  $\psi(ab^{-1}a^2b^2a) = 4a + b$ . On appelle *image commutative* d'un mot  $u \in F(E)$  ou d'un langage  $L \subseteq F(E)$  leurs images respectives par cette application, c'est à dire le vecteur  $\psi(u) \in \mathbb{Z}[E]$  et l'ensemble de vecteurs  $\psi(L) \subseteq \mathbb{Z}[E]$  respectivement. On pose  $V_A = \psi(L_A)$  l'image commutative du langage d'un automate réversible  $A$ .

Rappelons que l'abélianisation d'un groupe  $G$  est son quotient par le groupe des commutateurs  $[G, G] = \{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\}$ . C'est un groupe commutatif, et la projection canonique  $G \rightarrow G/[G, G]$  est universelle parmi les morphismes de groupes  $G \rightarrow A$  où  $A$  est commutatif. Si  $G \subseteq F(E)$  est un sous-groupe du groupe libre, son abélianisation est isomorphe à son image commutative  $\psi(G)$  qui est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}[E]$ . De plus si  $G$  est librement engendré par les mots  $u_1, \dots, u_n$ , alors  $\psi(G)$  est le sous-groupe de  $\mathbb{Z}[E]$  engendré par les vecteurs  $\psi(u_1), \dots, \psi(u_n)$ ; c'est à dire  $\psi(G) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(u_i) \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}\}$ . Le *premier groupe d'homologie*  $H_1(A)$  d'un automate réversible  $A$  est l'abélianisation de son groupe fondamental. Il est par conséquent formé des images commutatives des chemins fermés basés en l'état initial. Mais comme le graphe sous-jacent est connexe, l'état initial n'importe pas et le premier groupe d'homologie contient exactement les images commutatives des chemins fermés de  $A$ . On peut observer que  $V_A = \bigcup_{s \in S} [\psi(u_s) + H_1(A)]$ .

**Définition 3.2.4** Un automate réversible  $A$  est dit commutatif s'il satisfait aux conditions suivantes :

1.  $\forall s, s' \in S \quad \forall u \in F(E) \quad [s \xrightarrow{u} s' \wedge \psi(u) \in H_1(A)] \Rightarrow s = s'$
2.  $\forall s, s' \in S \quad \forall u \in F(E) \quad \forall e \in E \quad [s \xrightarrow{u} s' \wedge \psi(u) = e] \Rightarrow s \xrightarrow{e} s'$

On dit qu'un automate réversible  $A$  *divise* un automate réversible  $B$  s'il existe un automate réversible  $C$  qui couvre  $A$  et se plonge pleinement dans  $B$ ; c'est à dire si  $A$  est le quotient d'un automate induit de  $B$  :  $A|B \Leftrightarrow \exists C \quad A \leq C \hookrightarrow B$ .

**Proposition 3.2.5** Soit  $A = (E, S, T, s_0)$  un automate réversible, les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est un automate commutatif,
2.  $A$  divise le graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}[E]$ ,



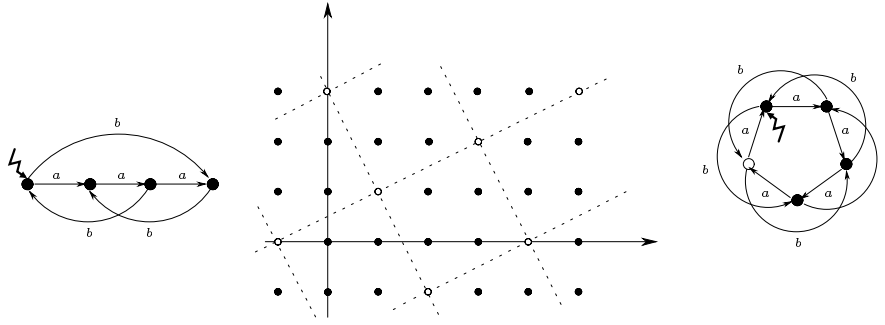


FIG. 3.1 – un automate commutatif

3.  $A$  se plonge pleinement dans le graphe de Cayley d'un groupe commutatif de type fini.

Dans ce cas l'application  $s \mapsto \psi(u_s) + H_1(A)$  est un plongement plein de l'automate  $A$  dans le graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}[E]/H_1(A)$ . Les automates commutatifs dont l'ensemble d'événements est  $E$  sont en correspondance bijective avec les paires  $(V, H)$  constituées d'un ensemble  $V \subseteq \mathbb{Z}[E]$  connexe de vecteurs de la grille et d'un sous-groupe  $H$  du stabilisateur de  $V$  :  $H \subseteq \mathbf{St}(V) = \{u \in \mathbb{Z}^E \mid u + V = V\}$ .  $H$  et  $V$  sont alors respectivement le premier groupe d'homologie et l'image commutative du langage de l'automate commutatif associé. Par abus de langage nous appellerons  $\mathbf{St}(V_A)$  le stabilisateur de l'automate  $A$ . Un automate commutatif est réduit si, et seulement si, son premier groupe d'homologie coïncide avec son stabilisateur.

Considérons l'automate réversible de la figure 3.1,  $H_1(A)$  est le groupe engendré par  $3a \Leftrightarrow b$  et  $2a + b$ , et  $V_A = U_A + H_1(A)$  où  $U_A = \{0; a; 2a; 3a\}$  (en utilisant les transitions étiquetées  $a$  comme arbre couvrant). Le plongement de  $A$  dans le graphe de Cayley du groupe  $\mathbb{Z}[E]/H_1(A)$  envoie un état  $s$  sur la classe  $\psi(u_s) + H_1(A)$  ; c'est à dire sur l'orbite de  $\psi(u_s)$  dans  $V_A \subseteq \mathbb{Z}[E]$  pour l'action de  $H_1(A)$ . Or  $H_1(A)$  est également engendré par  $5a$  et  $3a \Leftrightarrow b$  (car  $5a = (3a \Leftrightarrow b) + (2a + b)$ ) et donc  $\mathbb{Z}[E]/H_1(A)$  est isomorphe au groupe cyclique  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  où  $a$  est identifié à 1 et  $b$  à  $3 = \Leftrightarrow 2$ . Le plongement de  $A$  dans  $\mathbb{Z}[E]/H_1(A)$  est indiqué dans la figure 3.1. Le groupe quotient  $\mathcal{C}(A) = \mathbb{Z}[E]/H_1(A)$  est appelé *groupe canonique* de l'automate réversible  $A = (E, S, T, s_0)$ . Le plongement de  $A$  dans le graphe de Cayley de  $\mathcal{C}(A)$  qui envoie un état  $s$  vers la classe  $\psi(u_s) + H_1(A)$  et un événement  $e$  vers sa classe  $e + H_1(A)$  est qualifié de *représentation canonique* de  $A$ . Rappelons qu'un groupe commutatif de type fini  $G$  admet une représentation explicite sous la forme  $G \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^m$  avec  $1 \leq n_i | n_{i+1}$  et  $m \geq 0$ . Les coefficients  $n_i$  et  $m$  sont des caractéristiques du groupe bien que l'isomorphisme ne soit déterminé de manière unique. Par abus de langage, nous qualifierons de *représentation canonique* de  $A$  toute composition de sa représentation canonique avec un tel isomorphisme. Dans la section qui suit on décrit le calcul explicite d'une telle représentation en utilisant la normalisation de Smith d'une matrice associée à  $\mathcal{C}(A)$ .

### 3.2.3 Plongements canoniques d'un automate commutatif

Si  $H$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}^n$  et  $G = \mathbb{Z}^n/H$  le quotient associé alors  $G$ , comme tout groupe commutatif de type fini, admet une décomposition canonique  $G \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^m$  où  $1 \leq n_i | n_{i+1}$  et  $m \geq 0$ . Ces nombres appelés respectivement les *coefficients de torsion* et le *nombre de Betti* sont caractéristiques du groupe  $G$ . Ils peuvent être calculés en utilisant la forme normale de Smith d'une matrice associée à une présentation de  $G$  (voir [66] page 140–150). Rappelons quelques faits sur les formes normales de Smith de matrices à coefficients entiers [67]. Soit  $M \in \mathbb{Z}^{n,m}$  une matrice de rang  $r$ , les nombres entiers  $f_0, f_1, \dots, f_r$ , où  $f_0 = 1$  et  $f_k$  pour  $1 \leq k \leq r$  est le plus grand diviseur commun aux déterminants non nuls des sous-matrices d'ordre  $k$  de  $M$  sont appelés les *diviseurs déterminantaux* de  $M$ . Alors  $f_{k-1}$  divise  $f_k$ , et les quotients  $q_k$  donnés par  $f_k = q_k f_{k-1}$  sont les *facteurs invariants* de  $M$ . La matrice  $M$  est équivalente à une matrice  $S$ , appelée *forme normale de Smith* de  $M$ , telle que  $S(i, i) = q_i$  pour  $i = 1, \dots, r$  et  $S(i, j) = 0$  sinon ; c'est à dire que  $M$  est de la forme  $M = RSC$  où  $S$  est sous forme normale de Smith et  $R$  et  $C$  sont des matrices élémentaires correspondant respectivement à des séquences d'opérations élémentaires sur les lignes (échanger deux lignes ou ajouter à une ligne le multiple entier d'une autre ligne) et à une séquence d'opérations élémentaires sur les colonnes. La forme normale de Smith d'une matrice est unique mais pas les matrices  $R$  et  $C$  qui peuvent dépendre de l'ordre suivant lequel les opérations élémentaires sont effectuées afin d'atteindre cette forme normale.

Notons  $G = Ab(E, W)$  le groupe  $\mathbb{Z}[E]/H$  où  $H$  est le sous-groupe de  $\mathbb{Z}[E]$  engendré par les vecteurs de  $W \subseteq \mathbb{Z}^E$ . La paire  $(E, W)$  peut se représenter comme une matrice, appelée *matrice de relations* de  $G$ , dont les colonnes correspondent aux relations de la présentation. Par exemple la matrice des relations du groupe  $G = Ab(a, b; 3a \Leftrightarrow b, 2a + b)$  associé à l'automate commutatif de la figure 3.1 est  $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \Leftrightarrow 1 & 1 \end{pmatrix}$  et sa forme normale de Smith est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \Leftrightarrow 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \Leftrightarrow 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \Leftrightarrow 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \Leftrightarrow 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons  $R_{i,j}$  et  $R_{(i)-(i)+c(j)}$  les matrices élémentaires correspondant respectivement à l'échange des lignes  $i$  et  $j$  et à l'addition de  $c$  fois la ligne  $j$  à la ligne  $i$ . Les matrices  $C_{i,j}$  et  $C_{(i)-(i)+c(j)}$  codent les opérations élémentaires analogues sur les colonnes. Ces matrices sont inversibles et  $R_{i,j}^{-1} = R_{i,j}$  et  $R_{(i)-(i)+c(j)}^{-1} = R_{(i)-(i)-c(j)}$  (de même pour

les  $C$  matrices). Dans l'exemple précédent

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Leftrightarrow 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \Leftrightarrow 2 \end{pmatrix}$$

et de façon analogue  $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \Leftrightarrow 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \Leftrightarrow 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi lorsqu'on calcule la forme normale de Smith d'une matrice on mémorise la suite des opérations élémentaires effectuées sur les lignes et sur les colonnes ce qui permet de déduire les matrices  $R$  et  $C$  ainsi que leurs inverses. La propriété fondamentale est la suivante.

**Proposition 3.2.6** Soit  $M \in \mathbb{Z}^{n,m}$  la matrice des relations d'un groupe  $G = Ab(E, W)$  (où  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  et  $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ ), soient  $R \in \mathbb{Z}^{n,n}$  et  $C \in \mathbb{Z}^{n,m}$  des matrices d'opérations élémentaires de lignes et de colonnes respectivement. Alors  $N = RMC$  est la matrice des relations d'un groupe  $G' = Ab(E', W')$  (où  $E' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$  et  $W' = \{w'_1, \dots, w'_m\}$ ) isomorphe à  $G$ . L'isomorphisme envoie l'élément  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$  de  $G$  sur l'élément  $\sum_{i=1}^n \mu_i e'_i$  de  $G'$  tel que  $\mu = R\lambda$ .

Soit  $M = RSC$  la normalisation de Smith d'une matrice des relations  $M$  d'un groupe  $G$ , posons  $d_i = S(i, i)$  si  $i \leq m$  et 0 si  $i > m$  (ce dernier cas n'intervenant que si  $m < n$  ce qui peut toujours être évité quitte à rajouter des relations redondantes à la présentation). Alors on dispose d'un isomorphisme  $\varphi : \mathbb{Z}^n/G \rightarrow \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$  où  $\psi(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + G) = \sum_{i=1}^n (\mu_i \bmod d_i) e'_i$  avec  $\mu = R^{-1}\lambda$  et  $e_i(j) = e'_i(j) = \delta_{i,j}$  (où  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  et 0 autrement). Observons que si  $d = 1$  alors le groupe quotient  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  est le groupe trivial et peut être omis du produit et si  $d = 0$  alors le groupe quotient  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  est  $\mathbb{Z}$ . Les  $k$  premiers coefficients  $d_1, \dots, d_k$  (il se peut que  $k = 0$ ) sont égaux à 1 et correspondent à la partie linéaire qui disparaît dans le quotient, les  $m$  derniers coefficients sont nuls (où  $m$  est le nombre de Betti), les valeurs intermédiaires (distinctes de 0 et de 1) sont les coefficients de torsion. Dans l'exemple précédent on obtient l'isomorphisme  $G \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  qui envoie  $\lambda a + \mu b + H_1(A)$  sur  $\lambda \Leftrightarrow 2\mu \bmod 5$ .

**Corollaire 3.2.7** Soit  $\Psi : \mathcal{C}(A) \rightarrow \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$  l'isomorphisme induit par la normalisation de Smith d'une matrice des relations du groupe canonique  $\mathcal{C}(A) = \mathbb{Z}[E]/H_1(A)$  d'un automate réversible  $A$ . Posons  $\lambda(s) = \Psi(\psi(u_s) + H_1(A))$ . L'automate  $A$  est commutatif si, et seulement si,

1.  $\forall s, s' \in S \quad s \neq s' \Rightarrow \lambda(s) \neq \lambda(s')$ ,
2.  $\forall s, s' \in S \quad \forall e \in E \quad s \xrightarrow{e} s' \Rightarrow \lambda(s) + \lambda(e) \neq \lambda(s')$ .

Le plongement  $\lambda$  est alors qualifié de représentation canonique de l'automate commutatif.

### 3.2.4 Automates commutatifs sans torsion

Un automate commutatif est dit *sans torsion* si son groupe canonique  $\mathcal{C}(A) = \mathbb{Z}[E]/H_1(A)$  est sans torsion.

**Observation 3.2.8** Si  $s \xrightarrow{u} s$  est un chemin fermé d'un automate commutatif sans torsion dont l'image commutatif est le multiple d'un vecteur  $V \in \mathbb{Z}[E]$ , c'est à dire  $\psi(u) = \ell V$  où  $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , alors il existe un chemin fermé  $s \xrightarrow{v} s$  tel que  $\psi(v) = V$ .

**Proposition 3.2.9** *Le premier groupe d'homologie d'un automate commutatif fini sans torsion coïncide avec son stabilisateur :  $H_1(A) = \{u \in \mathbb{Z}^E \mid u + V_A = V_A\}$ .*

D'après la proposition 3.2.5, il s'ensuit

**Corollaire 3.2.10** *Un automate commutatif fini sans torsion est réduit.*

Notons que l'automate  $A = \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{a} \bullet \\ \bullet \xleftarrow{a} \bullet \end{array}$  qui n'est pas sans torsion et qui n'est pas réduit est tel que  $V_A$  coïncide avec son stabilisateur (isomorphe à  $\mathbb{Z}$ ) tandis que  $H_1(A)$  correspond à son sous-groupe  $2\mathbb{Z}$ .

L'énoncé qui suit résume quelques conditions équivalentes, chacune donnant un critère pour vérifier qu'un automate commutatif est sans torsion. Il s'agit pour l'essentiel de propriétés classiques des groupes commutatifs [45].

**Proposition 3.2.11** *Soient  $I$  un sous-groupe de  $\mathbb{Z}^n$ , et  $G = \mathbb{Z}^n / I$  le groupe quotient associé. Soit  $M \in \mathbb{Z}^{n \times k}$  une matrice dont les colonnes forment une base  $u_1, \dots, u_k$  de  $I$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $G$  est sans torsion,
2.  $I$  est convexe (c'est à dire est l'ensemble des points à coordonnées entières d'un convexe de  $\mathbb{R}^n$ ),
3. le plus grand commun diviseur des sous-déterminants d'ordre  $k$  de  $M$  est 1,
4. tout vecteur  $y \in \mathbb{R}^k$  tel que  $My$  est à coordonnées entières est lui même à coordonnées entières,
5.  $I$  est un sous-groupe **pur** de  $\mathbb{Z}^n$ , c'est à dire que tout vecteur de  $\mathbb{Z}^n$  ayant un multiple dans  $I$  est dans  $I$ ,
6. tout système fini d'équations avec  $m$  inconnues  $\sum_{j=1}^m n_{i,j} \cdot x_j = a_i$  et membres droits dans  $I$  ( $a_i \in I$ ) qui admet une solution dans  $(\mathbb{Z}^n)^m$  admet une solution dans  $I^m$ ,
7.  $I$  est un composant de  $\mathbb{Z}^n$ , c'est à dire qu'il existe un sous-groupe  $K$  de  $\mathbb{Z}^n$  tel que  $\mathbb{Z}^n = I \oplus K$ , ce qui revient aussi à dire qu'on peut trouver des représentants des cosets pour  $I$  qui forment un sous-groupe de  $\mathbb{Z}^n$ , i.e.  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}^n$ .

**Proposition 3.2.12** *Soient  $A$  un automate commutatif fini et  $P = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid \mu \cdot x + b \geq 0\}$  l'ensemble des points à coordonnées entières de la fermeture convexe de  $V_A = \bigcup_{s \in S} H_1(A) + \psi(u_s)$  ( $\mu \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{N}^m$ ). Le stabilisateur de  $P$ ,  $\ker(\mu)$ , est le plus petit sous groupe pur de  $\mathbb{Z}^n$  contenant  $H_1(A)$ . Le morphisme canonique de  $\mathbb{Z}^n / H_1(A)$  dans  $\mathbb{Z}^n / \ker(\mu)$  est la projection sur la composante sans torsion de  $\mathbb{Z}^n / H_1(A)$  :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z}^n / H_1(A) \cong \mathbb{Z} / n_1 \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} / n_k \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^m \\ & \searrow \varphi & \downarrow \\ & & \mathbb{Z}^n / \ker(\mu) \cong \mathbb{Z}^m \end{array}$$

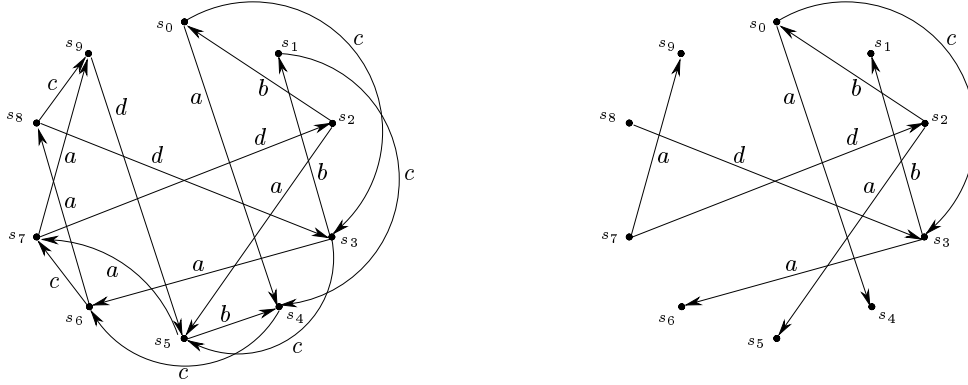


FIG. 3.2 – un automate réversible et un de ses arbres couvrant

Le morphisme  $\varphi$  est donc la restriction aux points à coordonnées entières de l'application linéaire dont la matrice est formée des  $m$  dernières lignes de la matrice  $R^{-1}$  où  $m$  est le nombre de Betti et  $M = RSC$  est une décomposition de Smith d'une matrice des relations de  $A$ .  $A$  est sans torsion si, et seulement si,  $H_1(A) = \ker(\mu)$ , i.e. son stabilisateur coïncide avec le stabilisateur de son enveloppe convexe.

### 3.2.5 Un exemple

Considérons l'automate réversible de la figure 3.2. Les vecteurs  $\psi_s = \psi(u_s)$  associés au choix de l'arbre couvrant indiqué dans la figure 3.2 sont donnés dans le tableau suivant.

	$\psi_{s_0}$	$\psi_{s_1}$	$\psi_{s_2}$	$\psi_{s_3}$	$\psi_{s_4}$	$\psi_{s_5}$	$\psi_{s_6}$	$\psi_{s_7}$	$\psi_{s_8}$	$\psi_{s_9}$
$a$	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
$b$	0	1	$\Leftrightarrow 1$	0	0	$\Leftrightarrow 1$	0	$\Leftrightarrow 1$	0	$\Leftrightarrow 1$
$c$	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
$d$	0	0	0	0	0	0	0	$\Leftrightarrow 1$	$\Leftrightarrow 1$	$\Leftrightarrow 1$

Les images commutatives des cycles fondamentaux sont données dans le tableau suivant.

$t = s \xrightarrow{e} s'$	$\psi_t = \psi(c_t) = \psi_s + e \Leftrightarrow \psi_{s'}$
$s_1 \xrightarrow{c} s_4$	$\Leftrightarrow a + b + 2c$
$s_3 \xrightarrow{c} s_5$	$\Leftrightarrow a + b + 2c$
$s_4 \xrightarrow{c} s_6$	0
$s_5 \xrightarrow{b} s_4$	0
$s_6 \xrightarrow{c} s_7$	$a + b + 2c + d$
$s_6 \xrightarrow{a} s_8$	$2a + d$
$s_8 \xrightarrow{c} s_9$	$\Leftrightarrow a + b + 2c$
$s_9 \xrightarrow{d} s_5$	0

La matrice des relations est  $M = \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , on calcule sa forme normale de Smith :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= R_{1,4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & \Leftrightarrow 1 \end{pmatrix} \cdot C_{1,3} \\ &= \underbrace{R_{1,4} \cdot R_{(4) \leftarrow (4) - 2(1)}^{-1}}_{R_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{C_{(2) \leftarrow (2) - (1)}^{-1} \cdot C_{1,3}}_{C_1} \\ &= R_1 \cdot R_{(3) \leftarrow (3) - 2(2)}^{-1} \cdot R_{(4) \leftarrow (4) + (2)}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot C_{(3) \leftarrow (3) - (2)}^{-1} \cdot C_1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} R^{-1} &= R_{(4) \leftarrow (4) + (2)} \cdot R_{(3) \leftarrow (3) - 2(2)} \cdot R_{(4) \leftarrow (4) - 2(1)} \cdot R_{1,4} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Leftrightarrow 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Leftrightarrow 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Leftrightarrow 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \Leftrightarrow 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le quotient du groupe commutatif libre  $\mathbb{Z}[E] \cong \mathbb{Z}^4$  par le premier groupe d'homologie de  $A$  n'a pas de coefficient de torsion, son nombre de Betti est 2. La projection canonique est donnée par la matrice  $\Lambda$  formée des deux dernières lignes de la matrice  $R^{-1}$ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \Leftrightarrow 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \Leftrightarrow 2 \end{pmatrix}$$

On introduit deux nouveaux symboles  $e$  et  $f$  associés aux dimensions de l'espace quotient, la matrice  $\Lambda$  donne un changement de variables de l'ancien alphabet  $\{a; b; c; d\}$  vers le nouveau  $\{e; f\}$ .

$\Lambda$	$\lambda_a$	$\lambda_b$	$\lambda_c$	$\lambda_d$
$e$	0	$\Leftrightarrow 2$	1	0
$f$	1	1	0	$\Leftrightarrow 2$

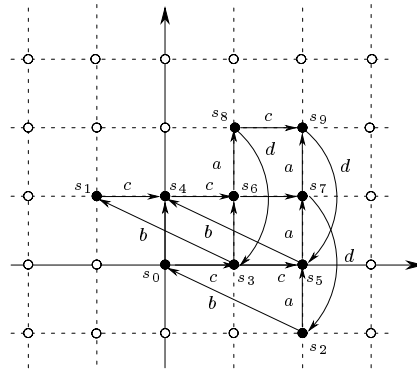


FIG. 3.3 – plongement de l'automate de la figure 3.2 dans  $\mathbb{Z}^2$

De même les états  $s$  sont représentés par les vecteurs  $\lambda_s = \Lambda\psi_s$ .

	$\lambda_{s_0}$	$\lambda_{s_1}$	$\lambda_{s_2}$	$\lambda_{s_3}$	$\lambda_{s_4}$	$\lambda_{s_5}$	$\lambda_{s_6}$	$\lambda_{s_7}$	$\lambda_{s_8}$	$\lambda_{s_9}$
$e$	2	1	2	1	2	0	1	2	$\Leftrightarrow 1$	0
$f$	2	2	1	1	0	1	0	$\Leftrightarrow 1$	1	0

qui sont tous distincts. Le morphisme  $\lambda$  est donc un plongement, illustré dans la figure 3.3, de l'automate dans le graphe de Cayley  $C(\mathbb{Z}^2, \{\lambda_e | e \in E\})$ . On vérifie que  $\Lambda$  est un plongement plein ce qui provient du fait que  $\lambda_{s'} = \lambda_s + \lambda_e$  seulement si  $s \xrightarrow{e} s'$ .

## Chapitre 4

# Systèmes d'addition de vecteurs

Une place d'un système d'addition de vecteurs est une contrainte synchronique sur les événements du système. De fait, elle contraint les fréquences relatives d'exécution des transitions qui affectent cette place. Si la place est bornée son domaine de variation, c'est à dire la différence entre ses valeurs extrêmes, donne une mesure de l'indépendance réciproque entre les événements : des valeurs importantes correspondent à des contraintes synchroniques faibles. Ceci est en accord avec l'interprétation d'une place comme une ressource partagée par les transitions connectées à cette place.

Cette observation nous permet de caractériser les graphes de marquage des systèmes d'addition de vecteurs comme les quotients maximaux des automates polyédriques. Il s'agit d'automates commutatifs et nous conjecturons qu'ils sont sans torsion, c'est à dire que leur groupes canoniques n'admettent pas d'éléments d'ordre fini. Nous donnons un algorithme pour la synthèse de systèmes d'addition de vecteurs utilisant la représentation des automates commutatifs décrite dans le chapitre précédent.

La notion de distance synchronique fut introduite par C.A. Petri comme une mesure du degré d'indépendance entre ensembles d'événements dans un système distribué. Elle a été utilisée dans [21] pour définir une notion de *région généralisée* permettant d'adapter le théorème de représentation de Ehrenfeucht et Rozenberg au contexte des systèmes d'addition de vecteurs. Une approche quelque peu différente des relations synchroniques est présentée dans [98] où des techniques d'algèbre linéaire permettent de calculer des bornes d'invariants synchroniques dans des réseaux. Dans [6] ces mêmes techniques procurent un algorithme en temps polynomial pour la synthèse des systèmes d'addition de vecteurs.

### 4.1 Graphes de marquage des systèmes d'addition de vecteurs

#### 4.1.1 Systèmes d'addition de vecteurs

Un *système d'addition de vecteurs* [62] est une structure  $N = (P, E, \mu)$  qui consiste en un ensemble fini de *places*  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ , un ensemble fini d'*événements*  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ , et une matrice  $\mu : P \times E \rightarrow \mathbb{Z}$ . Un *marquage* est un vecteur  $M \in \mathbb{N}^k$ , et



le *graphe de marquage* de  $N$  est le système de transition  $N^* \subseteq \mathbf{N}^k \times E \times \mathbf{N}^k$  donné par  $M \xleftrightarrow{e} M' \Leftrightarrow M' = M + \mu \cdot e$ . On écrit  $M \xleftrightarrow{e}$  lorsque  $M \xleftrightarrow{e} M'$  pour un certain marquage  $M'$  auquel cas  $e$  est dit *autorisé* dans le marquage  $M$ .

Le système de transitions induit par un système de transition réversible  $\mathbf{T} = (S, E, T)$  sur un ensemble d'états  $S' \subseteq S$  est le système de transition réversible défini par  $\mathbf{T} \upharpoonright S' = (S', E, T \cap (S' \times E \times S'))$ .

**Observation 4.1.1** *Le graphe de marquage d'un système d'addition de vecteurs est le système de transition réversible induit par le graphe de Cayley d'une puissance de  $\mathbb{Z}$  sur l'ensemble des vecteurs ayant toutes leurs composantes positives.*

Mais bien sûr tous les sous-systèmes de transitions induit d'un graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}^k$  ne sont pas isomorphes à des graphes de marquage de systèmes d'addition de vecteurs. Le propos de ce chapitre est essentiellement de trouver une procédure permettant de décider si un automate fini est un sous-système de transitions induit d'un graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}^k$  et s'il est isomorphe au graphe de marquage d'un système d'addition de vecteurs.

Si  $s \in S$  est un état d'un système de transitions réversible  $\mathbf{T} = (S, E, T)$ , on pose  $(\mathbf{T}, s)$  l'automate réversible dont la relation de transition est induite de celle de  $T$  sur la composante connexe de  $s$ . Par exemple, si  $M_0$  est un marquage d'un système d'addition de vecteurs  $N = (P, E, \mu)$ , l'automate réversible  $(N^*, M_0)$  sera qualifié de graphe de marquage du système d'addition de vecteurs marqué  $(P, E, \mu, M_0)$ .

## 4.1.2 Graphes polyédriques

Les graphes de marquages des systèmes d'addition de vecteurs marqués sont des automates commutatifs. Nous introduisons une classe d'automates, dits polyédriques, qui en sont les dépliages commutatifs.

Un  $\mathbb{Z}$ -polyèdre est un ensemble de vecteurs de  $\mathbb{Z}^n$  défini par un ensemble fini d'inéquations affines. Tous les polyèdres que nous allons considérer contiennent l'origine et sont par conséquent de la forme suivante  $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax + b \geq 0\}$  pour une certaine matrice  $A \in \mathbb{Z}^{k \times n}$  et un vecteur  $b \in \mathbb{N}^k$ . Un tel polyèdre peut être vu comme un système de transitions réversible, appelé *système de transitions polyédrique*, dont les états sont les vecteurs du polyèdre, dont les événements sont donnés par  $e_i(j) = 1$  si  $i = j$  sinon 0, et dont la relation de transition  $T \subseteq S \times E \times S$  est donnée par  $s \xleftrightarrow{e} s' \Leftrightarrow s' = s + e$ .

Un *automate polyédrique* est un automate réversible de la forme  $(\mathbf{T}, 0)$  où  $\mathbf{T}$  est un système de transitions polyédrique, c'est à dire qu'il s'agit de la composante connexe de l'origine d'un polyèdre de  $\mathbb{Z}^n$ . On doit faire attention au fait que la notion d'automate polyédrique n'est pas équivalente à celle de système de transitions polyédrique connexe, dans la mesure où il se peut, comme cela est illustré dans la figure 4.1, que la composante connexe d'un ensemble de points à coordonnées entières d'un convexe de  $\mathbb{R}^n$  soit strictement incluse dans l'ensemble des points à coordonnées entières de sa fermeture convexe. Ce qu'on peut résumer en disant que *un convexe de  $\mathbb{Z}^n$  peut ne pas être connexe*.

Nous appelons *graphe polyédrique* le graphe non orienté associé à un système de transition polyédrique, c'est à dire qu'il s'agit d'un graphe dont les sommets sont les vecteurs à coordonnées entières d'un polyèdre et tel que deux sommets sont reliés par une arête si, et seulement si, leur distance euclidienne est 1. Ainsi l'exemple précédent montre qu'une

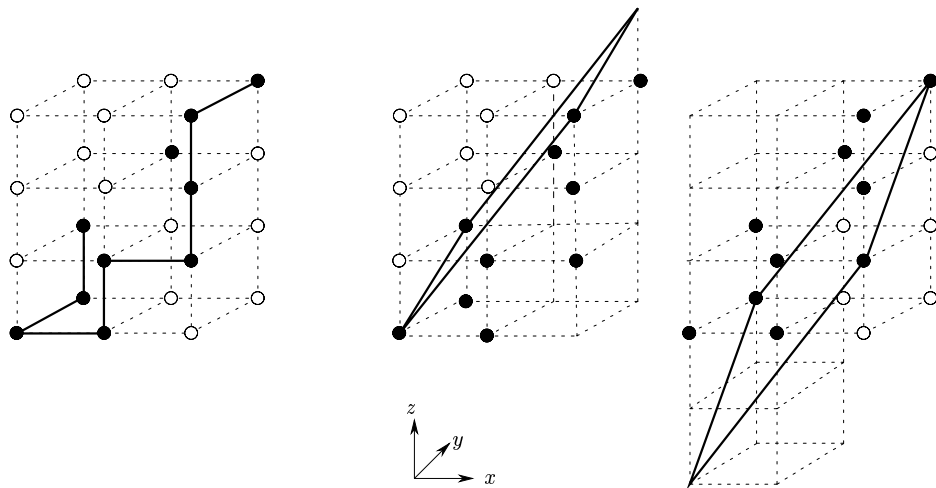


FIG. 4.1 – l'ensemble  $X$  des points de la grille de dimension trois indiqué par les points noirs est l'ensemble des points à coordonnées entières de sa fermeture convexe  $K$ . Comme indiqué par les deux schémas de droite, ce convexe  $K$  est le polyèdre obtenu en coupant le parallépipède ( $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , et  $0 \leq z \leq 3$ ) avec les deux demi espaces ( $3x + 2y \Leftrightarrow 2z \geq 0$  et  $\Leftrightarrow 3x \Leftrightarrow 4y + 2z + 4 \geq 0$ ). Cet ensemble  $X$  a deux composantes connexes dont l'une est constituée du isolé  $(1, 1, 2)$  se trouvant dans la fermeture convexe de l'autre

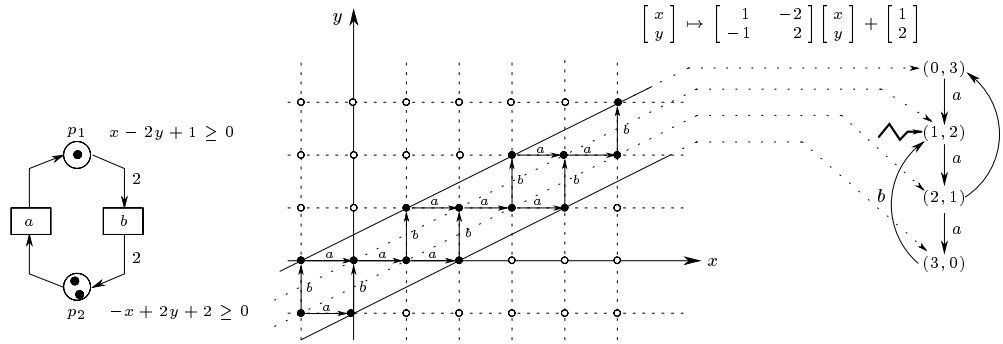


FIG. 4.2 – un système d'addition de vecteurs avec deux événements  $a$  et  $b$  et deux places  $p_1$  et  $p_2$  associées aux contraintes synchroniques  $x \Leftrightarrow 2y + 1 \geq 0$  et  $\Leftrightarrow x + 2y + 2 \geq 0$ , son graphe de marquage (indiqué à droite) est un quotient de l'automate polyédrique.

composante connexe d'un graphe polyédrique n'est pas nécessairement un graphe polyédrique.

### 4.1.3 Places comme contraintes synchroniques

Une place  $p \in P = \{p_1, \dots, p_k\}$  d'un système d'addition de vecteurs marqué  $N = (P, E, \mu, M_0)$  définit une contrainte synchronique satisfaite par son langage. En effet, rappelons que  $M \xrightarrow{e} M'$ , où  $M$  et  $M'$  sont des marquages et  $e \in E$  un événement, si, et seulement si,  $M' = M + \mu \cdot e$ . Considérons alors un mot du langage de  $N$ , c'est à dire un mot réduit  $u \in F(E)$  tel que  $M_0 \xrightarrow{u} M$  pour un certain marquage  $M$ . Comme toutes les composantes d'un marquage sont des entiers positifs et que  $M_0 \xrightarrow{u} M \Rightarrow M = M_0 + \mu \cdot \psi(u)$  on en déduit que l'image commutative d'un mot du langage de  $N$  satisfait nécessairement au système d'inéquations

$$\mu \cdot X + M_0 \geq 0$$

Chaque place  $p_i \in P$  est associée à une ligne de ce système et exprime une contrainte synchronique sur les exécutions possibles du système d'addition de vecteurs. Considérons l'exemple de la figure 4.2. La place  $p_1$  contient initialement un jeton, chaque occurrence de l'événement  $a$  accroît sa valeur d'une unité tandis que chaque occurrence de  $b$  la fait décroître de deux unités. Comme son contenu n'est pas autorisé à prendre des valeurs négative on en déduit  $x \Leftrightarrow 2y + 1 \geq 0$  pour toute séquence de franchissements ayant  $x$  occurrences de  $a$  et  $y$  occurrences de  $b$ .

Il s'ensuit que l'image commutative du langage de  $A = N^*$  est contenu dans le polyèdre défini par l'ensemble des contraintes synchroniques associées aux places :

$$V_A \subseteq \{X \in \mathbb{Z}[E] \mid \mu \cdot X + M_0 \geq 0\}$$

Plus précisément,  $u \in F(E)$  appartient au langage de  $N$  si, et seulement si,  $M + \mu \cdot \psi(v) \geq 0$  pour tous les préfixes  $v$  de  $u$ . On en déduit que  $V_A$  est exactement la composante connexe de l'origine dans le graphe polyédrique en question.

Inversement, tout  $\mathbb{Z}$ -polyèdre présenté comme  $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A \cdot x + b \geq 0\}$  avec  $A \in \mathbb{Z}^{k \times n}$  et  $b \in \mathbb{N}^k$  peut être vu comme un système d'addition de vecteurs dont les places sont données par les contraintes synchroniques  $A(i, \cdot) \cdot M + b(i) \geq 0$ . En résumé,

une place d'un système d'addition de vecteurs  $\equiv$  une contrainte synchronique  
 $\equiv$  un hyperplan affine

un système d'addition de vecteurs  $\equiv$  un ensemble de contraintes synchroniques  
 $\equiv$  (la présentation d')un  $\mathbb{Z}$ -polyèdre

Par la discussion qui précède, l'application  $x \mapsto \mu \cdot x + M_0$  qui envoie un vecteur du  $\mathbb{Z}$ -polyèdre  $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid \mu \cdot x + M_0 \geq 0\}$ , associé au système d'addition de vecteurs  $N = (P, E, \mu, M_0)$ , sur le vecteur des "distances" de ce vecteur à chacun des hyperplans bordant le polyèdre est un revêtement de l'automate polyédrique vers le graphe de marquage de  $N$ .

**Proposition 4.1.2** *Un automate réversible est isomorphe au graphe de marquage d'un système d'addition de vecteurs (marqué) si, et seulement si, c'est un automate commutatif réduit dont l'image commutative de son langage est une composante connexe d'un graphe polyédrique.*

#### 4.1.4 Une conjecture

D'après la proposition 3.2.5 le graphe de marquage d'un système d'addition de vecteurs est caractérisé par l'image commutative de son langage, qui est par la proposition 4.1.2 une composante connexe d'un graphe polyédrique, et par son premier groupe d'homologie. Si  $V \subseteq \mathbb{Z}^n$  notons  $\mathbf{St}(V)$  son stabilisateur,  $\mathbf{St}(V) = \{u \in \mathbb{Z}^n \mid u + V = V\}$ ; et posons  $G(V) = \mathbb{Z}^n / \mathbf{St}(V)$  le groupe quotient associé.

**Observation 4.1.3** *Si  $V$  est l'ensemble des sommets d'un graphe polyédrique, alors  $G(V)$  est sans torsion.*

En effet, soient  $u$  un vecteur et  $\ell$  un entier naturel tels que  $\ell u \in \mathbf{St}(V)$ , alors  $V + \ell u = V$  et par convexité de  $V$  il s'ensuit que  $v + u$  et  $v \Leftrightarrow u$  sont dans  $V$  pour tous  $v \in V$  et donc  $u + V = V$  ce qui montre que  $u \in \mathbf{St}(V)$  et donc que  $G(V)$  est sans torsion.

On conjecture que  $G(V)$  est également sans torsion dans le cas où  $V$  est une composante connexe d'un graphe polyédrique, c'est à dire

**Conjecture 4.1.4** *Les graphes de marquage de systèmes d'addition de vecteurs sont des automates commutatifs sans torsion.*

Si  $A$  est le graphe de marquage d'un système d'addition de vecteurs  $(P, E, \mu, M_0)$ , alors  $u \in H_1(A)$  si, et seulement si,  $\mu u = 0$  et il existe un chemin étiqueté  $u$ . La conjecture précédente peut donc se reformuler comme suit.

**Conjecture 4.1.5** *S'il existe un chemin entre deux sommets d'un graphe polyédrique de la forme  $u$  et  $u + \ell v$  où  $v$  est un invariant et  $\ell$  un entier naturel, alors il existe un chemin entre  $u$  et  $u + v$ .*

Par la proposition 3.2.12, une autre conjecture équivalente aux précédentes est la suivante :

**Conjecture 4.1.6** *Si  $V$  est une composante connexe d'un graphe polyédrique dont l'ensemble des sommets  $P = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid \mu x + b \geq 0\}$  (où  $\mu$  et  $b$  sont une matrice et un vecteur à valeurs entières) est l'ensemble des points à coordonnées entières de la fermeture convexe de  $V$ , alors  $V$  et  $P$  ont le même stabilisateur :  $\mathbf{St}(V) = \mathbf{St}(P) = \ker(\mu)$ .*

**Remarque 4.1.7** *Comme  $K(u + V) = u + K(V)$ , où  $K(V)$  désigne la fermeture convexe de  $V$ , on déduit que  $\mathbf{St}(V) \subseteq \mathbf{St}(P)$ ; de sorte qu'il suffit d'établir l'inclusion inverse, c'est à dire  $\mu \cdot u = 0 \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V \quad v_2 \Leftrightarrow v_1 = u$ .*

#### 4.1.5 Un algorithme de synthèse

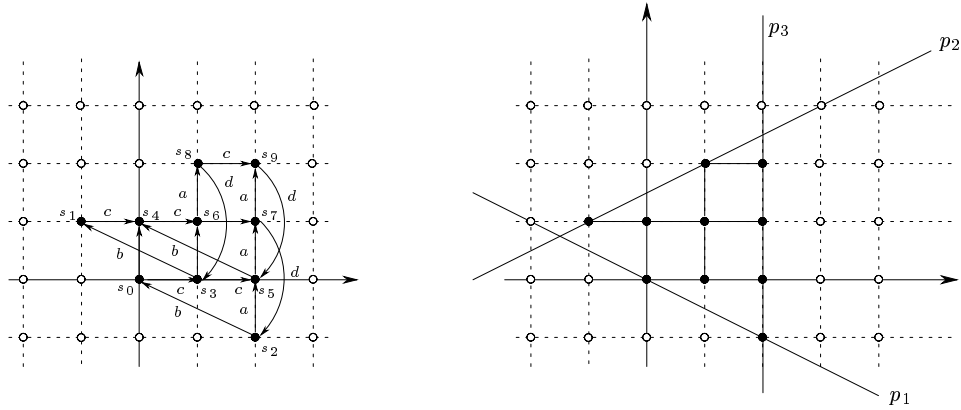
Nous décrivons, dans cette section, un algorithme de synthèse de systèmes d'addition de vecteurs qui dérive de la représentation canonique d'un automate commutatif décrit au chapitre précédent et du résultat suivant.

Soient  $V \subseteq \mathbb{Z}^n$  un ensemble de vecteurs de stabilisateur  $\mathbf{St}(V) = \{u \in \mathbb{Z}^n \mid u + V = V\}$  et  $G = \mathbb{Z}^n / \mathbf{St}(V)$  le groupe quotient associé. Soit  $M$  la matrice dont les colonnes forment une base  $u_1, \dots, u_\ell$  de  $\mathbf{St}(V)$  et  $M = RSC$  une de ses mises sous forme normal de Smith. Soient  $\varphi$  l'application linéaire associée à la matrice  $R^{-1}$  et  $\psi$  la composée de  $\varphi$  avec la projection sur les  $m$  dernières composantes de  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\ell+m}$  ( $m$  est le nombre de Betti de  $M$ ). C'est à dire que  $\psi$  est associée à la matrice  $\Lambda$  formée des  $m$  dernières lignes de  $R^{-1}$ . Si  $X \subseteq \mathbb{Z}^n$  posons  $K(X) \subseteq \mathbb{R}^n$  la fermeture convexe de  $X$  (dans  $\mathbb{R}^n$ ) et  $K_I(X) = K(X) \cap \mathbb{Z}^n$  l'ensemble des points à coordonnées entières de la fermeture convexe de  $X$ .

**Proposition 4.1.8** *L'application qui associe à l'hyperplan de  $\mathbb{R}^m$  d'équation  $u_1 \cdot x_1 + \dots + u_m \cdot x_m + b = 0$ , avec  $u \in \mathbb{Z}^m$  et  $b \in \mathbb{Z}$ , l'hyperplan d'équation  $v_1 \cdot y_1 + \dots + v_n \cdot x_n + b = 0$  avec  $v = \Lambda^t u \in \mathbb{Z}^n$  établit une correspondance bijective entre les hyperplans bordant  $\varphi(V)$  et ceux bordant  $V$ , de plus  $K_I(V) = \Psi^{-1}(K_I(\Psi(V)))$ .*

L'algorithme est alors le suivant :

1. On choisit un arbre couvrant  $U$  du graphe sous-jacent à l'automate  $A = (E, S, T, s_0)$ . Posons  $u_s$  le mot réduit étiquetant le chemin dans  $U$  allant de l'état initial  $s_0$  à l'état  $s$ . Posons  $c_t = u_s \cdot e \cdot u_s^{-1}$  le cycle associé à la corde  $t = s \xrightarrow{e} s'$ . On calcule les images commutatives des chaînes  $u_s$  et des cycles  $c_t$  : soient  $\psi_s = \psi(u_s)$  et  $\psi_t = \psi(c_t)$ .
2. On forme la matrice des relations  $M$  associée à la présentation  $H_1(A) = Ab(E, \{\pi_t \mid t \in T \setminus U\})$  du premier groupe d'homologie de l'automate donnée par le choix de l'arbre couvrant ; c'est à dire que les colonnes de  $M$  sont les images commutatives des cycles fondamentaux associés à  $U$ . On calcule la forme normale de Smith de cette matrice  $M = RSC$  (on rappelle que la matrice  $R^{-1}$  est calculée au cours du processus de normalisation).
3. Si  $n = |E|$  est la taille de l'alphabet et  $m$  le nombre de Betti de  $G$ , posons  $\Lambda \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  la matrice obtenue en prenant les  $m$  dernières lignes de  $R^{-1}$ . Les colonnes de  $\Lambda$  sont indicées par les éléments de l'alphabet, désignons par  $\lambda_e$  la colonne de  $\Lambda$  associée à l'événement  $e \in E$ . On calcule  $\lambda_s = \Lambda \psi_s$ .

FIG. 4.3 – plongement de l'automate de la figure 3.2 dans  $\mathbb{Z}^2$ 

4. On vérifie que l'application  $\lambda$  permet de représenter l'automate comme le sous-graphe induit du graphe de Cayley  $C(\mathbb{Z}^m, \{\lambda_e | e \in E\})$  sur l'ensemble des sommets  $\lambda_S = \{\lambda_s | s \in S\}$ . Cela revient à vérifier les deux conditions suivantes

- (a)  $\forall s, s' \in S \quad s \neq s' \Rightarrow \lambda_s \neq \lambda_{s'}$ .
- (b)  $\forall s, s' \in S \quad \forall e \in E \quad s \xrightarrow{e} s' \Rightarrow \lambda_s + \lambda_e \neq \lambda_{s'}$ .

Si une de ces conditions n'est pas satisfaite alors l'automate n'est pas isomorphe au graphe de marquage d'un système d'addition de vecteurs sinon on passe à l'étape suivante.

5. On calcule une présentation polyédrique  $\{x \in \mathbb{Z}^n | \Pi x + b \geq 0\}$  (avec  $\Pi \in \mathbb{Z}^{k,m}$  et  $b \in \mathbb{N}^k$ ) de la fermeture convexe de l'ensemble  $\lambda_S$ . Son image inverse est le polyèdre  $\{y \in \mathbb{Z}^n | \Pi \Lambda y + b \geq 0\}$  qui est associé au système d'addition de vecteurs (marqué)  $N = (P, E, \mu, M_0)$  ayant pour places  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$  et tel que  $\mu(p, e) = p^t \Pi \Lambda e$  et  $M_0(p) = p^t b$ . L'automate est isomorphe au graphe de marquage d'un système d'addition de vecteurs si, et seulement si, il est isomorphe au graphe de marquage de  $N$  si, et seulement si, il n'y a pas d'élément  $v \in K(\lambda_S) \setminus \lambda_S$  de la forme  $v = \lambda_s + \lambda_e$  ou  $v = \lambda_s \Leftrightarrow \lambda_e$ .

Considérons l'automate commutatif de la section 3.2.5, il se plonge dans le graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$  comme indiqué dans la partie gauche de la figure 4.3. L'image de ce plongement est l'ensemble des points à coordonnées entières d'un polytope délimité par trois hyperplans  $p_1, p_2$  et  $p_3$  comme indiqué à la figure 4.3. Ce polytope est représenté par le système

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & \Leftrightarrow 2 \\ \Leftrightarrow 1 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right) \geq \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right\}$$

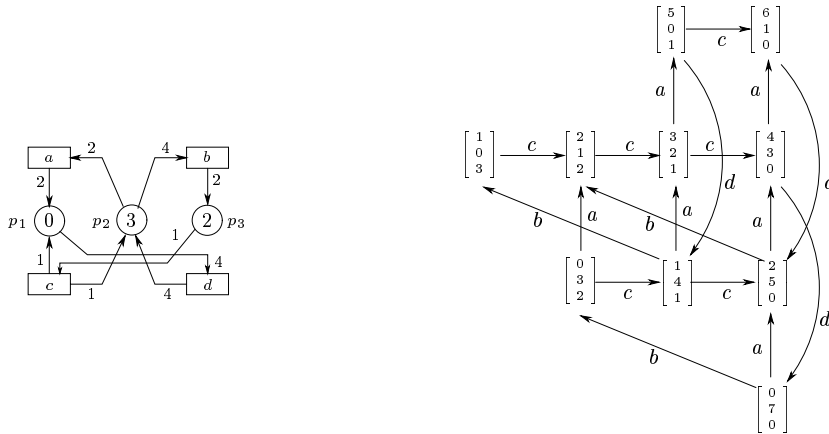


FIG. 4.4 – le système d'addition de vecteurs associé à l'automate de la figure 3.2 et son graphe de marquage

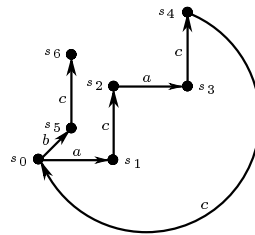


FIG. 4.5 – un automate réversible

son image inverse par  $\lambda$  est le polyèdre de  $\mathbb{Z}^4$  donné par

$$\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \Leftrightarrow 4 \\ \Leftrightarrow 2 & \Leftrightarrow 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & \Leftrightarrow 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La figure 4.4 décrit le système d'addition de vecteurs marqué associé à cette présentation ainsi que son graphe de marquage. Considérons maintenant l'automate réversible de la figure 4.5. Les vecteurs  $\psi_s$  associés au choix de l'arbre couvrant obtenu en écartant la transition  $s_4 \xleftrightarrow{c} s_0$  sont donnés dans le tableau suivant.

	$\psi_{s_0}$	$\psi_{s_1}$	$\psi_{s_2}$	$\psi_{s_3}$	$\psi_{s_4}$	$\psi_{s_5}$	$\psi_{s_6}$
$a$	0	1	1	2	2	0	0
$b$	0	0	0	0	0	1	1
$c$	0	0	1	1	2	0	1

Le cycle fondamental associé à la corde a pour image commutative  $2a + 3c$ . La normalisa-

tion de Smith de la matrice des relations est

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $R^{-1} = \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & \Leftrightarrow 2 \end{pmatrix}$ . Le quotient du groupe commutatif

libre  $\mathbb{Z}[E] \cong \mathbb{Z}^3$  par le premier groupe d'homologie de  $A$  n'a pas de coefficient de torsion, son nombre de Betti est 2. La projection canonique est donnée par la matrice  $\Lambda$  formée des deux dernières lignes de la matrice  $R^{-1}$ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & \Leftrightarrow 2 \end{pmatrix}$$

On introduit deux nouveaux symboles  $e$  et  $f$  associés aux dimensions de l'espace quotient, la matrice  $\Lambda$  donne un changement de variables de l'ancien alphabet  $\{a; b; c; d\}$  vers le nouveau  $\{e; f\}$ .

$\Lambda$	$\lambda_a$	$\lambda_b$	$\lambda_c$
$e$	0	1	0
$f$	3	0	$\Leftrightarrow 2$

De même les états  $s$  sont représentés par les vecteurs  $\lambda_s = \Lambda \psi_s$ .

	$\lambda_{s_0}$	$\lambda_{s_1}$	$\lambda_{s_2}$	$\lambda_{s_3}$	$\lambda_{s_4}$	$\lambda_{s_5}$	$\lambda_{s_6}$
$e$	0	0	0	0	0	1	1
$f$	0	3	1	4	2	0	$\Leftrightarrow 2$

Chaque état est représenté par un vecteur différent et donc l'application  $\lambda$  procure un plongement de l'automate, indiqué dans la partie gauche de la figure 4.6, dans le graphe de Cayley  $C(\mathbb{Z}^2, \{\lambda_e | e \in E\})$ . On vérifie que ce plongement est plein c'est à dire que  $\lambda_{s'} = \lambda_s + \lambda_e$  seulement si  $s \xrightarrow{e} s'$ . La fermeture convexe de l'image de ce plongement est un polytope de  $\mathbb{Z}^2$  qui contient un élément à coordonnées entières qui n'est pas dans l'image du plongement (l'état gris dans la figure 4.6). Néanmoins cet élément n'est pas de la forme  $\lambda_s + \lambda_e$  ni  $\lambda_s \Leftrightarrow \lambda_e$  et par conséquent l'automate de la figure 4.5 est isomorphe au graphe de marquage d'un système d'addition de vecteurs. Pour calculer un tel système on représente le polytope par le système

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Leftrightarrow 1 & 0 \\ \Leftrightarrow 4 & \Leftrightarrow 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

son image inverse par  $\lambda$  est le polyèdre de  $\mathbb{Z}^3$  donné par

$$\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \Leftrightarrow 1 & 0 \\ \Leftrightarrow 3 & \Leftrightarrow 4 & 2 \\ 3 & 2 & \Leftrightarrow 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



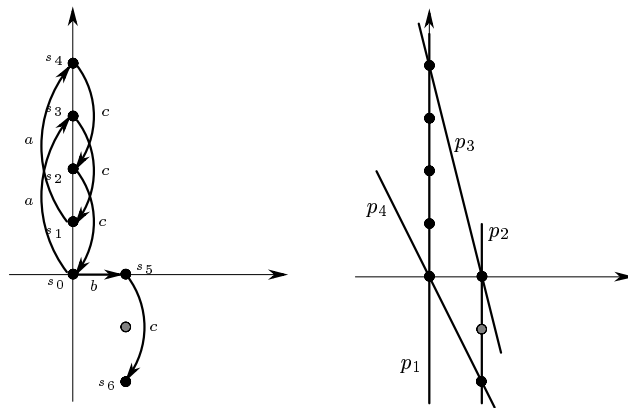


FIG. 4.6 – plongement de l'automate de la figure 4.5 dans  $\mathbb{Z}^2$

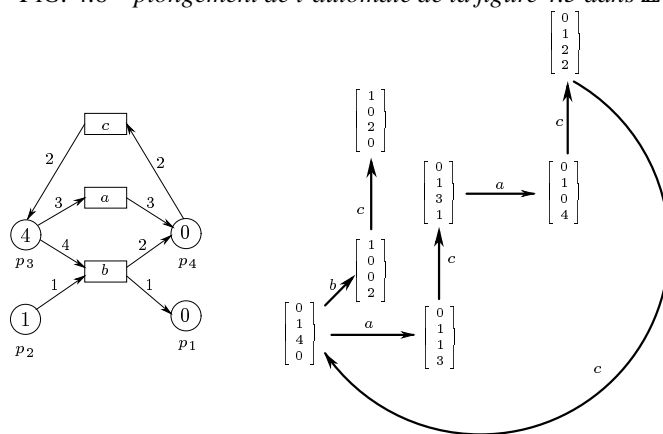


FIG. 4.7 – le système d'addition de vecteur de la figure 4.5 et son graphe de marquage

La figure 4.7 donne le système d'addition de vecteurs marqué qui lui est associé ainsi que son graphe de marquage.

### 4.1.6 Indications sur la complexité de l'algorithme

Les deux parties coûteuses de cet algorithme sont d'une part le calcul de la forme normale de Smith de la matrice des relations du groupe fondamental et d'autre part le calcul de la fermeture convexe de la représentation de l'espace d'états.

Kannan et Bachem ont donné [61] un algorithme en temps polynomial pour le calcul de la forme normale de Smith d'une matrice à coefficients entiers. Ils ont montré que le nombre des opérations algébriques mis en jeu ainsi que le nombre des chiffres binaires de toutes les valeurs intermédiaires sont bornés par des fonctions polynomiales des entrées codées en binaire. Une autre solution a été proposée dans [87] par Rayward-Smith. Chou et Collins [32] puis Iliopoulos [58] ont amélioré le résultat de Kannan et Bachem en donnant

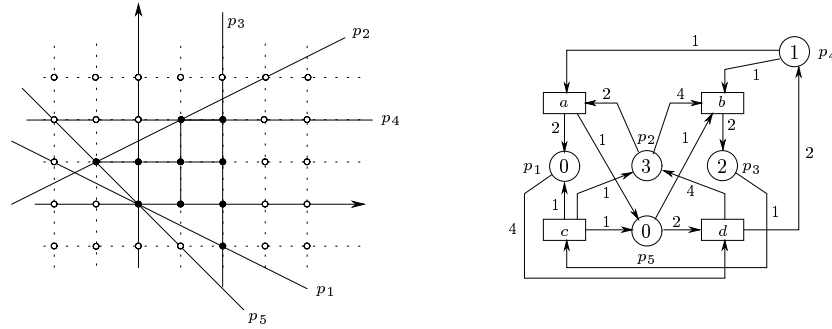


FIG. 4.8 – une construction de la fermeture convexe de la représentation de l'espace d'états de l'automate de la figure 4.3 utilisant un nombre non minimal de facettes et conduisant à un système d'addition de vecteurs ayant deux places redondantes comparativement au système d'addition de vecteurs donné dans la figure. 4.4

un algorithme en  $O(s^5 M(s^2))$  opérations élémentaires pour le calcul de la forme normale de Smith d'une matrice à coefficients entiers où  $M(n)$  donne une borne supérieure du nombre d'opérations élémentaires nécessaires au calcul de la multiplication de deux entiers de longueur  $n$  bits, et où la taille  $s$  d'une  $m \times n$  matrice  $A$  est le nombre  $m + n + \log[A]$  dans lequel  $[A] = \max_{i,j} \{ |a_{i,j}| \}$ .

Calculer la fermeture convexe d'un ensemble fini de points d'un espace euclidien est un des problèmes les plus fondamentaux de la géométrie algorithmique [40, 41]. Il existe des algorithmes en  $O(n \log n)$  en dimension 2 et 3. Pour les dimensions supérieures il existe des algorithmes calculant en temps  $O(n \log n + n^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor})$  et en espace  $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$  la fermeture convexe d'un ensemble de  $n$  points d'un espace de dimension  $d$ . Comme la dimension  $d$  correspond dans notre cas à la taille de l'alphabet moins la dimension de l'espace des cycles, on voit que la complexité dans le pire cas est exponentielle en la taille de l'automate. Néanmoins la distribution des points dans l'espace d'états d'un automate commutatif est loin d'être aléatoire puisqu'il s'agit de "presque" tous les points à coordonnées entières d'un polyèdre, et que le calcul de la fermeture convexe peut se faire à partir des seuls points extrêmes. On aurait par conséquent une meilleure évaluation de la complexité de notre algorithme si on savait comparer le nombre  $n$  des points à coordonnées entières d'un polyèdre avec  $m^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor}$  où  $m$  désigne le nombre de ses points extrêmes. Par ailleurs Seidel [95] et Swart [102] ont exprimé la complexité de l'algorithme de construction de la fermeture convexe en termes du nombre de facettes produites. Seidel donne un algorithme qui a un temps d'exécution en  $O(n^2 + F \log n)$  où  $F$  est le nombre de facettes produites. Comme nous le verrons dans la section suivante, seulement un nombre polynomial de facettes ont besoin d'être synthétisées pour résoudre le problème de synthèse des systèmes d'addition de vecteurs: on peut construire un polyèdre ayant un nombre de facettes  $F \leq n \times ((n \leftrightarrow 1) \times 2 \times p)$  donnant la fermeture convexe de la représentation de l'espace d'états d'un automate commutatif à  $n$  états et  $p$  événements lorsque celui ci est graphe de marquage d'un système d'addition de vecteurs. Néanmoins comme indiqué dans la figure 4.8 la construction de la fermeture convexe de la représentation de l'espace d'états

d'un automate commutatif peut conduire à un polyèdre n'ayant pas un nombre minimal de facettes. De plus nous n'avons aucune indication sur le nombre de facettes pouvant être produites à partir d'un automate commutatif quelconque. Cependant ce qui précède nous suggère qu'on peut espérer que la complexité moyenne de notre algorithme soit bornée par une fonction polynomiale de la taille de l'automate.

L'outil SYNETH [28] implémente l'algorithme de [6] que nous présentons dans la section suivante, et procure une solution assistée par ordinateur pour la distribution de protocoles : lorsque l'automate s'avère ne pas être isomorphe à un graphe de marquage d'un système d'addition de vecteurs, des informations sont fournies par le système pour permettre de modifier la spécification du protocole. On peut songer à utiliser l'algorithme que nous venons de décrire pour obtenir quelques informations supplémentaires, en particulier la représentation canonique d'un automate commutatif peut donner des informations utiles à sa distribution même s'il s'avère ne pas correspondre au graphe de marquage d'un système d'addition de vecteurs.

## 4.2 Le problème de synthèse des systèmes d'addition de vecteurs

Dans cette section on adapte le théorème de représentation d'Ehrenfeucht et Rozenberg au contexte des systèmes d'addition de vecteurs et on décrit un algorithme permettant de synthétiser en temps polynomial un système d'addition de vecteurs à partir de son graphe de marquage.

### 4.2.1 Régions généralisées

**Définition 4.2.1** Une région (généralisée)<sup>1</sup> d'un automate réversible  $A = (S, E, T, s_0)$  d'alphabet  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  est un demi espace fermé de la forme  $R = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid u \cdot x + u_0 \geq 0\}$ , où  $u \in \mathbb{Z}^n$  et  $u_0 \in \mathbb{N}$ , contenant l'image commutative du langage de  $A$ .

Chaque place  $p$  d'un système d'addition de vecteur  $N = (P, E, \mu, M_0)$  induit une région  $R_p = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid \mu(p, \Leftrightarrow) \cdot x + M_0 \geq 0\}$  de son graphe de marquage. Cette région  $R_p$  est appelée l'extension de la place  $p$  (voir la figure 4.9). Nous désignerons par  $R = \text{région}(u, u)$  la région  $R = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid u \cdot x + u_0 \geq 0\}$  présentée par  $u \in \mathbb{Z}^n$  et  $u_0 \in \mathbb{N}$ . Une région minimale (pour l'inclusion) est donc un demi espace bordant  $V_A$ , c'est à dire un demi espace fermé contenant  $V_A$  et tel qu'au moins un point de  $V_A$  se trouve sur l'hyperplan frontière. Nous rappelons que si  $U$  est un arbre couvrant de  $A$ , l'image commutative du langage de  $A$  est donnée par  $V_A = \bigcup_{s \in S} [\psi(u_s) + H_1(A)]$  il s'ensuit qu'un demi espace  $R = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid u \cdot x + u_0 \geq 0\}$  associé à  $u \in \mathbb{Z}^n$  et  $u_0 \in \mathbb{N}$  est une région de  $A$  si, et seulement si, il contient les vecteurs  $\psi(u_s)$  (pour  $s \in S$ ) et la direction de son hyperplan bordant contient  $H_1(A)$ . C'est à dire si, et seulement si,

1.  $H_1(A) \subseteq \ker(u)$  (c'est à dire  $\forall v \in H_1(A) \quad u \cdot v = 0$ ) et
2.  $u \cdot \psi(u_s) + u_0 \geq 0$  pour tout  $s \in S$ .

1. Nous omettrons le plus souvent le qualificatif "généralisé" tant qu'aucune confusion n'est possible avec les régions associées aux réseaux élémentaires.

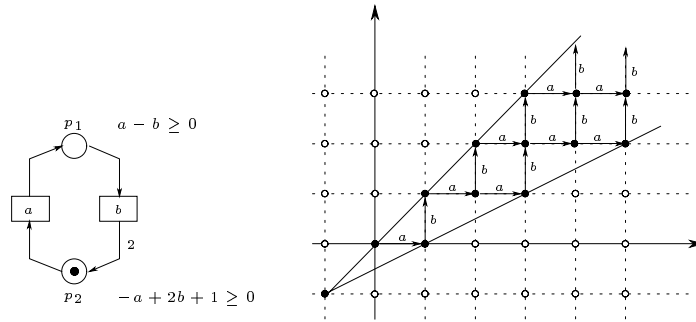


FIG. 4.9 – les extensions de places sont des régions

Inversement si ces conditions sont satisfaites on peut définir une application (notée également  $R$ )  $R : S \rightarrow \mathbf{N}$  en posant  $R(s) = u \cdot \psi(v) + u_0$  où  $v$  est un chemin arbitraire de  $s_0$  à  $s$  (deux tels chemins diffèrent par un élément de  $\pi_1(A)$ ). On remarque que si  $R$  est l'extension d'une place  $p$  d'un système d'addition de vecteur,  $u_0$  est le contenu initial de cette place et  $u \cdot \psi(v)$  donne la variation du contenu de cette place lorsque la suite  $v$  est franchie ; donc  $R(s)$  donne le contenu de la place  $p$  en l'état (marquage)  $s$ . Cette application vérifie la condition suivante

$$[s_1 \xleftrightarrow{e} s'_1 \wedge s_2 \xleftrightarrow{e} s'_2] \Rightarrow R(s'_1) \Leftrightarrow R(s_1) = R(s'_2) \Leftrightarrow R(s_2)$$

Une application  $R : S \rightarrow \mathbf{N}$  vérifiant cette propriété est appelée *potentiel*. Un potentiel  $R$  induit à son tour une application de  $E$  dans  $\mathbf{Z}$  (que l'on notera aussi  $R$ ) qui lorsqu'interprétée comme un vecteur de  $u \in \mathbf{Z}[E]$  vérifie  $\forall v \in H_1(A) \quad u \cdot v = 0$ . En effet, les éléments de  $H_1(A)$  sont les images commutatives des chemins fermés et la variation d'un potentiel le long d'un chemin fermé est nulle. Inversement un tel vecteur que nous qualifierons de *cobord* détermine le potentiel dont il est issu à un coefficient additif près, et un cobord dérive d'un potentiel si, et seulement si,  $u_0 = \mathbf{max}\{\Leftrightarrow u \cdot \psi(u_s) \mid s \in S\}$  existe (ici à nouveau cela ne dépend pas du choix de l'arbre couvrant puisque deux chemins de  $s_0$  à  $s$  ne diffèrent que par un élément de  $\pi_1(A)$ ) et dans ce cas  $R = \mathbf{region}(u_0, u)$  est la région qui détermine le potentiel dont ce cobord dérive.

En résumé on a une correspondance bijective entre les régions et les potentiels, et si l'automate est fini (auquel cas les bornes inférieures mentionnées plus haut existent) nous avons une correspondance bijective entre les régions minimales et les cobords. Notons que ceci n'est plus vrai en général si l'automate n'est pas fini. Par exemple le premier groupe d'homologie du graphe de marquage du système d'addition de vecteurs de la figure 4.9 est trivial donc tout vecteur de  $\mathbf{Z}^2$  est un cobord alors qu'il n'y a que deux régions minimales qui sont associées aux vecteurs  $a \Leftrightarrow b$  et  $\Leftrightarrow a + 2b$ .

### 4.2.2 Une connexion galoisienne

Comme nous l'avons déjà mentionné une présentation d'un polyèdre  $P = \{x \in \mathbf{Z}^n \mid \mu \cdot x + b \geq 0\}$  avec  $\mu \in \mathbf{Z}^{k \times n}$  et  $b \in \mathbf{N}^k$  peut être identifié avec le système d'addition de vecteurs de matrice de représentation  $\mu$  et marquage initial  $b$ . Si nous ne faisons

pas de distinction entre des systèmes d'addition de vecteurs qui ne diffèrent que par l'ordre dans lequel les inégalités apparaissent dans leurs présentations, alors l'ensemble  $\mathbf{SAV}(E)$  des systèmes d'addition de vecteurs sur l'alphabet  $E$  est un treillis complet dont l'ordre est donné par inclusion de leur présentations vues comme multi ensembles<sup>2</sup> d'inéquations. Par souci de simplification nous admettrons dans cette section qu'un système d'addition de vecteurs peut avoir un nombre infini de places. La relation d'ordre précédente se reflète par l'inclusion inverse des polyèdres qu'ils représentent. La borne supérieure  $\bigvee_{i \in I} N_i$  d'une famille de systèmes d'addition de vecteurs est par conséquent le système d'addition de vecteurs ayant comme présentation l'union des présentations des  $N_i$ . Un système d'addition de vecteurs est dit *atomique* s'il ne contient qu'une place. Tout système d'addition de vecteurs est de la forme  $N = \bigvee_{i \in I} N_i$  où  $P = \{p_i | i \in I\}$  est l'ensemble des places du système et  $N_i$  est le système atomique associé à la place  $p_i$ . Notons que les régions sont les systèmes d'addition de vecteurs atomiques.

De façon symétrique, si nous ne faisons pas de distinction entre des automates qui ne diffèrent que par l'identité de leurs états (c'est à dire qui sont isomorphes : identiques à un renommage bijective de leur ensemble d'états), alors l'ensemble  $\mathbf{Aut}(E)$  des automates réversibles sur l'alphabet  $E$  est un treillis complet dont la relation d'ordre est donnée par

$$A \sqsubseteq A' \Leftrightarrow \exists f : S \rightarrow S' \quad [f(s_0) = s'_0 \quad \wedge \quad s_1 \xrightarrow{E} s_2 \Rightarrow f(s_1) \xrightarrow{E} f(s_2)]$$

De fait une telle application  $f$  lorsqu'elle existe est unique (parce que  $A$  et  $A'$  sont des automates réversibles et en outre leurs graphes sont connexes), et cette relation est un pré-ordre dont l'équivalence induite est l'isomorphie des automates. La borne inférieure d'automates réversibles est donnée par leur produit synchrone. Nous rappelons que le produit synchrone  $\bigwedge_{i \in I} A_i$  d'une famille d'automates  $A_i = (S_i, E, T_i, s_{0,i})$  indicés par  $i \in I$  est l'automate  $(S, E, T, s_0)$  défini comme suit :  $s_0 = (s_{0,i})_{i \in I}$ ,  $S$  est la composante connexe de l'état initial  $s_0$  vis à vis du système de transition synchrone

$$(s_i)_{i \in I} \xrightarrow{E} (s'_i)_{i \in I} \quad \text{ssi} \quad \forall i \in I \quad (s_i \xrightarrow{E} s'_i) \in T_i$$

et  $T$  est la restriction de cette relation sur les états de  $S$ .

Nous rappelons que le graphe de marquage  $N^*$  d'un système d'addition de vecteurs associé au polyèdre  $P = \{x \in \mathbb{Z}^n | \mu \cdot x + b \geq 0\}$  où  $\mu \in \mathbb{Z}^k \times n$  et  $b \in \mathbb{N}^k$  est l'automate dont les états sont  $S = \{y \in \mathbb{N}^k | \exists x \in P \quad y = \mu \cdot x + b\}$  avec état initial  $s_0 = b$  et dont la relation de transition est  $y \xrightarrow{E} y' \Leftrightarrow y' = y + \mu \cdot e_i$ . Par définition  $N^* = \bigwedge_{1 \leq i \leq m} N_i^*$  où  $N = \bigvee_{1 \leq i \leq m} N_i$  est la décomposition de  $N$  en éléments atomiques. Les remarques précédentes peuvent être étendues au cas où  $A$  est une matrice avec un nombre infini de lignes, c'est à dire lorsque  $N$  est un système d'addition de vecteurs avec un nombre infini de places. De façon symétrique  $A^* = \bigvee \{N | N \text{ est une région } A\}$  est le système d'addition de vecteurs associé à l'automate réversible  $A$ .

**Observation 4.2.2** *Pour tout système d'addition de vecteurs atomique  $N$  et tout automate réversible  $A$ ,  $A \sqsubseteq N^*$  si, et seulement si,  $N$  est une région de  $A$  et donc*

$$A \sqsubseteq N^* \Leftrightarrow N \sqsubseteq A^*$$

2. Si on admet que les présentations peuvent admettre des inéquations répliquées.

**Proposition 4.2.3** *Les deux opérateurs  $()^*$ , qui envoient respectivement l'automate  $A$  sur son système d'addition de vecteurs dual  $A^*$  et le système d'addition de vecteurs  $N$  sur son graphe de marquage  $N^*$ , constitue une connexion galoisienne entre les ensembles ordonnés  $\mathbf{SAV}(E)$  et  $\mathbf{Aut}(E)$ :  $A \sqsubseteq N^* \Leftrightarrow N \sqsubseteq A^*$  pour  $A \in \mathbf{Aut}(E)$  et  $N \in \mathbf{SAV}(E)$ .*

Les relations  $A_1 \sqsubseteq A_2 \Rightarrow A_2^* \sqsubseteq A_1^*$  (pour  $A_1, A_2 \in \mathbf{Aut}(E)$ ) et  $N_1 \sqsubseteq N_2 \Rightarrow N_2^* \sqsubseteq N_1^*$  (pour  $N_1, N_2 \in \mathbf{SAV}(E)$ ) sont des conséquences de cette dualité. Une autre propriété des connexions galoisiennes est de produire des *opérateurs de fermeture* par composition des opérateurs duaux. Rappelons qu'un opérateur  $()$  sur  $(X, \leq)$ , envoyant  $x$  sur  $\overline{x}$ , est un opérateur de fermeture s'il est croissant ( $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \overline{x_1} \leq \overline{x_2}$ ), extensif ( $x \leq \overline{x}$ ), et idempotent ( $\overline{\overline{x}} = \overline{x}$ ). Les opérateurs associant le double dual  $()^{**}$  agissant respectivement sur les ensembles ordonnés  $(\mathbf{Aut}(E), \sqsubseteq)$  et  $(\mathbf{SAV}(E), \sqsubseteq)$  sont des opérateurs de fermeture. Un automate réversible  $A$  égal à sa fermeture  $A^{**}$  est dit *séparé*, tandis qu'un système d'addition de vecteurs égal à sa fermeture  $N^{**}$  est dit *saturé*. Les treillis des automates réversibles séparés et des systèmes d'addition de vecteurs saturés sont duaux, c'est à dire anti-isomorphes.

Ainsi un automate réversible est isomorphe au graphe de marquage d'un système d'addition de vecteurs si, et seulement si, il est séparé; et son dual est alors un tel système d'addition de vecteurs (en fait le plus grand). Cependant si  $A$  possède au moins une région, il en admettra une infinité et son dual sera un système d'addition de vecteurs avec un nombre infini de places. Nous verrons que tout automate réversible séparé fini est graphe de marquage d'un système d'addition de vecteurs fini. Dans ce but nous introduisons la notion d'ensemble admissible de régions analogue à celle introduite par Desel et Reisig pour les réseaux élémentaires.

**Définition 4.2.4** *Un ensemble  $\mathcal{R}$  de régions d'un automate réversible est dit admissible si  $A \cong \bigwedge \{N^* \mid N \in \mathcal{R}\}$ , il est dit complet si  $A^{**} \cong \bigwedge \{N^* \mid N \in \mathcal{R}\}$ .*

Ainsi pour synthétiser un système d'addition de vecteurs à partir d'un automate réversible on peut restreindre l'espace de recherche à tout ensemble complet de régions et arrêter la synthèse dès qu'un ensemble admissible de régions a été produit. Le graphe de marquage  $N^*$  d'un système d'addition de vecteurs est séparé parce que  $N^* \cong N^{***}$  est une conséquence de la connexion galoisienne. En fait, les composants atomiques de  $N$  forment un ensemble admissible de régions de  $N^*$ . La fermeture convexe de l'image commutative du langage de  $A$  correspond à une famille complète de régions. Par conséquent les régions minimales (qui correspondent aux demi espaces bordants) constituent un ensemble complet de régions. Cette observation est l'analogie du fait observé par Bernardinello [19] que les régions minimales d'un système de transitions élémentaire forment un ensemble complet de régions.

### 4.2.3 Théorème de représentation

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, Ehrenfeucht et Rozenberg ont donné une caractérisation des graphes de marquages des réseaux élémentaires en termes de deux propriétés de séparation. De façon similaire le critère suivant peut être utilisé pour reconnaître un ensemble admissible de régions, et donc pour caractériser les automates séparés. Nous

rappelons qu'une région  $R$  de  $A = (S, E, T, s_0)$  détermine (et est déterminée par) deux applications (que l'on note aussi  $R$ ): le potentiel  $R : S \rightarrow \mathbf{N}$  et le cobord  $R : E \rightarrow \mathbf{Z}$ . (On rappelle qu'à un coefficient additif près la première se déduit de la seconde.)

**Proposition 4.2.5** *Un ensemble  $\mathcal{R}$  de régions d'un automate réversible  $A = (S, E, T, s_0)$  est admissible si, et seulement si, les propriétés de séparation suivantes sont satisfaites pour toute paire d'états  $s, s' \in S$ , et tout événement  $e \in E$ :*

- (**ssp**):  $s \neq s' \Rightarrow \exists R \in \mathcal{R} \quad Rs \neq Rs'$
- (**essp**):  $\begin{cases} s \xrightarrow{e} \Rightarrow \exists R \in \mathcal{R} \quad Rs + Re < 0 \\ \xrightarrow{e} s \Rightarrow \exists R \in \mathcal{R} \quad Rs \Leftrightarrow Re < 0 \end{cases}$

Lorsque ces propriétés sont satisfaites,  $A \cong (A_{\mathcal{R}}^*)^*$ , où  $A_{\mathcal{R}}^*$  est le sous-système de  $A^*$  induit sur les places de  $\mathcal{R}$ , appelé système d'addition de vecteurs synthétisé à partir de  $\mathcal{R}$ .

En effet,  $(A_{\mathcal{R}}^*)^* \cong \bigwedge \{R^* | R \in \mathcal{R}\}$  et le morphisme  $A \rightarrow \bigwedge \{R^* | R \in \mathcal{R}\}$  qui envoie un état  $s$  sur le vecteur  $(R(s); R \in \mathcal{R})$  est injectif si, et seulement si,  $A$  vérifie la propriété de séparation **ssp** et c'est un revêtement si, et seulement si,  $A$  vérifie la propriété de séparation **essp**. Et les isomorphismes coïncident avec les revêtements injectifs.

Si on s'intéresse à la représentation d'un automate réversible par un système d'addition de vecteur ayant le même langage il suffit d'abandonner la propriété de séparation **ssp** et si de plus on ne s'intéresse qu'au langage direct (c'est à dire ne prenant en compte que les mots  $u \in E^*$  étiquettant les chemins dirigés de l'automate) alors on abandonne également la seconde partie dans **essp**.

#### 4.2.4 Un algorithme polynomial

L'ensemble des cobords d'un automate réversible fini  $A$ , c'est à dire l'ensemble des vecteurs  $u \in \mathbf{Z}[E]$  tels que  $\forall v \in H_1(A) \quad u \cdot v = 0$ , est le noyau de la transformation linéaire définie par la transposée de la matrice des relations du groupe canonique de  $A$ ,  $\mathcal{C}(A) = \mathbf{Z}[E]/H_1(A)$ . L'algorithme de von zur Gathen et Sieveking (voir [94]) produit en temps polynomial l'ensemble des générateurs  $\{u_1, \dots, u_t\}$  du groupe des cobords à partir de la matrice des relations donnée en entrée. Par exemple, le premier groupe d'homologie de l'automate représenté dans la figure 4.10 est engendré par les vecteurs  $a + b + c$  et  $a' + b' + c'$ . Le groupe des cobords est par conséquent constitué des vecteurs  $u : E \rightarrow \mathbf{Z}$  pour lesquels:

$$u(a) + u(b) + u(c) = 0 \quad \text{et} \quad u(a') + u(b') + u(c') = 0$$

Il s'agit donc du sous-groupe de  $\mathbf{Z}[E]$  engendré par

$$u_1 = a \Leftrightarrow c ; \quad u_2 = b \Leftrightarrow c ; \quad u_3 = a' \Leftrightarrow c' \quad \text{et} \quad u_4 = b' \Leftrightarrow c'$$

Nous rappelons que, puisque  $A$  est fini, l'ensemble des cobords est en correspondance bijective avec l'ensemble des régions minimales: la région minimale  $R = \mathbf{r\acute{e}gion}(u_0, u)$  induite par le cobord  $u$  est telle que  $u_0 = \mathbf{min}\{\Leftrightarrow u \cdot \psi(u_s) | s \in S\}$ ,  $R(s) = u_0 + u \cdot \psi(u_s)$

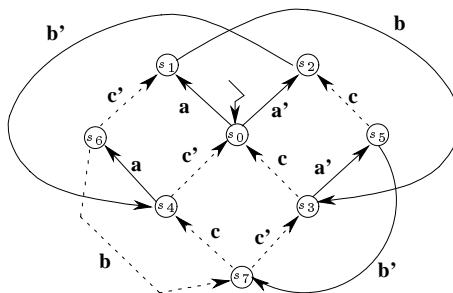


FIG. 4.10 – un automate et un de ses arbres couvrants

TAB. 4.1 – les états  $s \in S$  représentés par les vecteurs  $(u_i \cdot \psi(u_s))_i$  indicés par un ensemble générateur de cobords  $u_i$ 

$u_i \cdot \psi(u_s)$	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$
$u_1$	0	1	0	1	0	1	1	1
$u_2$	0	0	0	1	0	1	0	1
$u_3$	0	0	1	0	1	1	1	1
$u_4$	0	0	0	0	1	0	1	1

et  $R(e) = u(e)$ . Par ailleurs les régions minimales constituent un ensemble complet de régions et

**Proposition 4.2.6** *L'ensemble des régions minimales induites par un ensemble  $C$  de cobords est un ensemble admissible de régions si, et seulement si, les propriétés de séparation suivantes sont satisfaites pour  $s, s' \in S$ , et  $e \in E$ :*

- (ssp):  $s \neq s' \Rightarrow \exists u \in C \quad u \cdot \psi(u_s) \neq u \cdot \psi(u_{s'})$
- (essp):  $\begin{cases} s \xrightarrow[e]{\neq} s' \Rightarrow \exists u \in C \quad \forall s' \in S \quad u \cdot \psi(u_s) + u \cdot e \Leftrightarrow u \cdot \psi(u_{s'}) < 0 \\ \xrightarrow[e]{\neq} s' \Rightarrow \exists u \in C \quad \forall s \in S \quad u \cdot \psi(u_s) + u \cdot e \Leftrightarrow u \cdot \psi(u_{s'}) > 0 \end{cases}$

En ce qui concerne la première propriété de séparation, il suffit de vérifier que chaque état  $s$  est représenté de façon non ambiguë par le vecteur  $[s] = (u_i \cdot \psi(u_s); 1 \leq i \leq t)$  où  $\{u_1, \dots, u_t\}$  est un ensemble de générateurs du groupe des cobords. Reprenons l'exemple précédent. Les images commutatives des chemins menant de  $s_0$  à  $s$  dans l'arbre couvrant sont

$$\begin{array}{llll} \psi(u_{s_0}) = 0 & \psi(u_{s_1}) = a & \psi(u_{s_2}) = a' & \psi(u_{s_3}) = a + b \\ \psi(u_{s_4}) = a' + b' & \psi(u_{s_5}) = a + b + a' & \psi(u_{s_6}) = a' + b' + a & \psi(u_{s_7}) = a + b \\ & & & + a' + b' \end{array}$$

Les produits scalaires  $u_i \cdot \psi(u_s)$  sont portés dans le tableau 4.1. On observe que la première propriété de séparation est satisfaite car les colonnes de ce tableau sont toutes distinctes.

Soit  $\{u_1, \dots, u_t\}$  un ensemble de générateurs des cobords, posons  $\alpha_i(s, e, s') = u_i \cdot \psi(u_s) + u_i(e) \Leftrightarrow u_i \cdot \psi(u_{s'})$ . La seconde propriété de séparation peut se lire comme suit :

Si  $s \xrightarrow[e]{\neq} s'$  trouver  $u = \sum_{i=1}^t x_i \cdot u_i$  tel que  $\forall s' \in S \quad \sum_{i=1}^t \alpha_i(s, e, s') \cdot x_i < 0$ ;



TAB. 4.2 – région minimale  $R_u = \text{région}(u_0, u)$  induite par le cobord  $u$ 

$u$	$a$	$b$	$c$	$a'$	$b'$	$c'$	$u_0$
$\Leftrightarrow u_1$	-1	0	1	0	0	0	1
$u_2$	0	1	-1	0	0	0	0
$\Leftrightarrow u_3$	0	0	0	-1	0	1	1
$u_4$	0	0	0	0	1	-1	0
$u_1 \Leftrightarrow u_2$	1	-1	0	0	0	0	0
$u_3 \Leftrightarrow u_4$	0	0	0	1	-1	0	0
$u_2 + u_4 \Leftrightarrow u_1 \Leftrightarrow u_3$	-1	1	0	-1	1	0	1

de façon similaire

si  $\xrightarrow{e} s'$  trouver  $u = \sum_{i=1}^t x_i \cdot u_i$  tel que  $\forall s \in S \quad \sum_{i=1}^t \alpha_i(s, e, s') \cdot x_i > 0$ .

Ainsi une instance de la seconde propriété de séparation s'écrit comme un système d'inéquations linéaires  $MX < 0$  où  $M \in \mathbb{Z}^{|S|, t}$ . Un tel système peut s'écrire de façon équivalente sous la forme

$$MX \leq (\Leftrightarrow 1)^{|S|} \quad (4.1)$$

où  $(\Leftrightarrow 1)^{|S|} = (\Leftrightarrow 1, \dots, \Leftrightarrow 1) \in \mathbb{Z}^{|S|}$ . Un tel système admet une solution entière si, et seulement si, il admet une solution rationnelle. La méthode de Khachiyan (voir [94] p.170) permet de décider de la faisabilité de (4.1) et d'en calculer une solution rationnelle, si elle existe, en temps polynomial. Ainsi toute instance de la seconde propriété de séparation peut être résolue ou prouvée insatisfiable en temps polynomial en la taille de l'automate. Dans l'exemple courant, le système d'inéquations linéaires codant l'instance de la seconde propriété de séparation associée à  $s_2 \xrightarrow{a}$  est le suivant :

$s$	$\sum_i \alpha_i(s_2, a, s) \cdot x_i < 0$
$s_0$	$x_1 + x_3 < 0$
$s_1$	$x_3 < 0$
$s_2$	$x_1 < 0$
$s_3$	$x_3 \Leftrightarrow x_2 < 0$
$s_4$	$x_1 \Leftrightarrow x_4 < 0$
$s_5$	$\Leftrightarrow x_2 < 0$
$s_6$	$\Leftrightarrow x_4 < 0$
$s_7$	$\Leftrightarrow x_2 \Leftrightarrow x_4 < 0$

Une solution de ce système est donné par  $x_1 = x_3 = \Leftrightarrow 1$  et  $x_2 = x_4 = 1$ , et donc le cobord  $u = \Leftrightarrow u_1 + u_2 \Leftrightarrow u_3 + u_4 = \Leftrightarrow a + b \Leftrightarrow a' + b'$  résout ce problème. L'automate de la figure 4.3 est séparé : toute instance de propriétés de séparation est résolue par l'un des cobords du tableau 4.2. Le système d'addition de vecteurs synthétisé à partir de cet ensemble de régions est indiqué dans la figure 4.11.

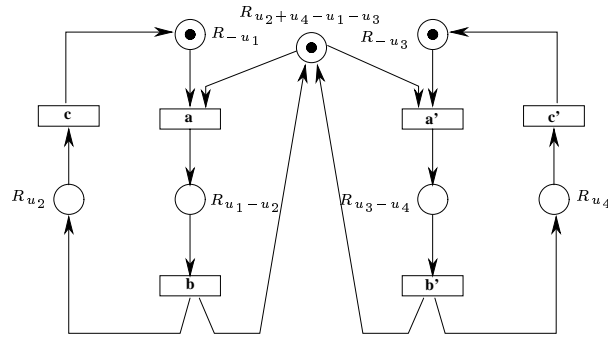


FIG. 4.11 – système d'addition de vecteurs synthétisé à partir de l'ensemble admissible de régions minimales du tableau 4.2

#### 4.2.5 Variante de l'algorithme

L'ensemble des régions  $R = \mathbf{région}(u_0, u)$  où  $u = (u_1, \dots, u_n)$  est caractérisé comme l'ensemble des vecteurs  $(u_0, u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$  ( $n = |E|$ ) tel que :

$$\begin{aligned} \forall v \in H_1(A) & \quad v \cdot (u_1, \dots, u_n) = 0 \\ \forall s \in S & \quad (u_1, \dots, u_n) \cdot \psi(u_s) + u_0 \geq 0 \\ & \quad u_0 \geq 0 \end{aligned}$$

Il s'agit donc des vecteurs à coordonnées entières d'un cône polyédrique  $C$  de  $\mathcal{Q}^{n+1}$ . On peut calculer une représentation paramétrique de ce cône de la forme

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^K \lambda_i \cdot R_i \mid \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

avec  $R_i \in \mathbb{Z}^{n+1}$ . Il est alors immédiat de vérifier que l'ensemble des régions  $R_i$  ainsi obtenu est **complet**. On obtient en testant les instances des propriétés de séparation dans cet ensemble fini et complet de régions un autre algorithme de synthèse. Ce dernier bien que n'étant pas polynomial semble être, au moins sur les quelques exemples sur lesquels on l'a essayé, plus performant que l'algorithme décrit précédemment et il s'agit de l'algorithme actuellement implémenté par l'outil SYNET<sup>3</sup>. Par dualité le calcul des rayons générateurs d'un cône polyédral équivaut au calcul de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points. On retrouve ainsi, au quotient préalable par  $H_1(A)$  près, l'algorithme décrit en 4.1.5

3. <http://www.irisa.fr/pampa/LOGICIELS/synet/synet.html>

## Chapitre 5

# Dualité entre réseaux et automates

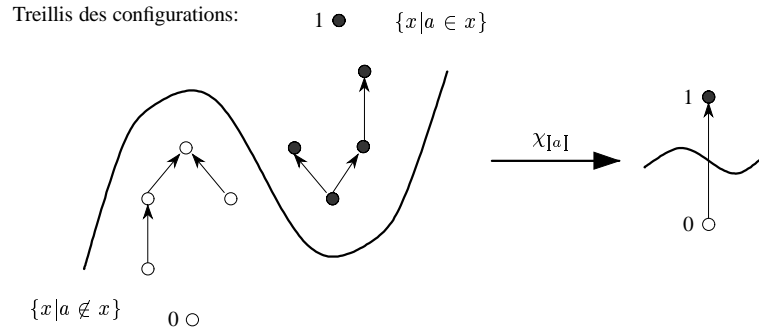
Dans ce chapitre on décrit des dualités entre réseaux et automates. Ces dualités catégoriques sont induites par des objets schizoïdes<sup>1</sup> et sont paramétrées par le type des réseaux. L'avantage de cette présentation est double. D'abord cela montre que les dualités entre réseaux et automates basées sur la notion de région sont analogues aux théorèmes de représentations classiques, tels le théorème de Birkhoff et celui de Stone, qui proviennent presque toujours de l'existence d'un objet schizoïde. Ensuite cela donne une présentation uniforme pour toutes (ou pratiquement toutes) les dualités entre réseaux et automates rencontrées dans la littérature, en particulier cette construction s'adapte aux automates de dimension supérieure ce qui permet de prendre en compte le comportement concurrent des réseaux.

### 5.1 Adjonctions duales induites par des objets schizoïdes

L'exemple le plus simple de dualité induite par un objet schizoïde est la dualité de Birkhoff entre treillis distributifs finis et ensembles ordonnés finis. Supposons qu'un *ordonnement* soit donné sous la forme d'un ensemble ordonné fini de *tâches*, où la relation  $a \leq b$  figure que la tâche  $a$  doit être antérieure à la tâche  $b$ . Une *configuration* est un ensemble de tâches clos vers le bas : c'est un ensemble de tâches qui peuvent avoir été exécutées dans un certain état du système. Cet ensemble de configurations ordonné par inclusion est un treillis distributif fini dans la mesure où les bornes inférieures et supérieures sont données par les opérations ensemblistes d'intersection et d'union. Nous appelons ce treillis, le treillis des configurations de l'ordonnement. Le problème est maintenant de savoir si un treillis distributif fini donné est le treillis des configurations d'un ensemble

---

1. Le terme anglais habituellement utilisé est *schizophrenic object*. Comme nous le verrons ces objets ont une double face : ils peuvent être vus de deux façons différentes. La dualité repose sur le changement de point de vue qu'ils autorisent. Ces objets ont donc une *forme scindée* et c'est sur cette duplicité que repose la dualité. En revanche un tel objet n'a pas d'esprit. Le terme *schizoïde* semble donc plus approprié que *schizophrène* et il a par ailleurs l'avantage de ne pas avoir la connotation négative attachée à cette maladie.

FIG. 5.1 – *filtres premiers comme éléments de la représentation*

ordonné. L'*extension*  $[a]$  de la tâche  $a$  dans le treillis des configurations, c'est à dire l'ensemble des configurations dans lesquelles figure cette tâche, est un filtre premier du treillis des configurations (voir la figure 5.1). En effet, c'est un filtre (ensemble non vide, clos vers le haut et clos par bornes inférieures) car l'ensemble complet  $y$  appartient,  $[a \in x \text{ et } x \subseteq y] \Rightarrow a \in y$  et  $[a \in x \text{ et } a \in y] \Rightarrow a \in x \cap y$ . De façon symétrique son complément est un idéal (ensemble non vide clos vers le bas et clos par bornes supérieures). Donc  $[a]$  est un filtre premier. Par ailleurs  $a \leq b \Rightarrow [a] \supseteq [b]$ . Dans le but de représenter un treillis distributif fini il est donc naturel de considérer son ensemble de filtres premiers ordonné par inclusion inverse. Appelons cet ensemble ordonné l'ordonnement du treillis. Le théorème de Birkhoff affirme que

*tout ensemble ordonné fini est isomorphe à l'ordonnement de son treillis de configurations et tout treillis distributif fini est isomorphe au treillis des configurations de son ordonnement.*

La dualité de Birkhoff entre treillis distributifs finis et ensembles ordonnés finis repose sur l'objet schizoïde  $\mathbf{2} = \{0; 1\}$  qui a le double statut de treillis et d'ensemble ordonné avec  $0 \leq 1$ . Le dual  $L^*$  d'un treillis distributif  $L$ , c'est à dire son ordonnement, est l'ensemble de ses filtres premiers  $F$  c'est à dire les parties  $F \subseteq L$  dont les fonctions caractéristiques sont les morphismes de treillis  $\chi_F : L \rightarrow \mathbf{2}$ . Le dual  $E^*$  d'un ensemble ordonné est le treillis de ses configurations, qui ne sont rien d'autres que les (complémentaires des) parties  $x \subseteq E$  dont les fonctions caractéristiques sont des morphismes d'ensembles ordonnés  $\chi_x : E \rightarrow \mathbf{2}$ .

L'adjonction duale dit plus précisément que pour tout ensemble ordonné fini  $E$  et tout treillis distributif fini l'ensemble des applications croissantes de  $E$  dans  $L^*$  est en correspondance bijective avec l'ensemble des morphismes de treillis de  $L$  vers  $E^*$ . En fait ces deux ensembles sont en correspondance bijective avec les relations binaires  $\models \subseteq E \times L$  telles que

$$\begin{aligned}
 a &\neq 0 & a &\models 1 \\
 a &\models x \wedge y & \Leftrightarrow & (a \models x \text{ et } a \models y) \\
 a &\models x \vee y & \Leftrightarrow & (a \models x \text{ ou } a \models y) \\
 (a &\leq b \text{ et } b &\models x) & \Rightarrow a \models x
 \end{aligned}$$

En effet ces conditions équivalent au fait que l'application  $a \mapsto \{x|a \models x\}$  est une application croissante de  $E$  dans  $L^*$  ou au fait que l'application  $x \mapsto \{x|a \models x\}$  est un morphisme de treillis de  $L$  vers  $E^*$ .

Si  $L = E^*$  est le treillis des configurations de  $E$ , l'ensemble ordonné  $E$  est isomorphe à son double dual  $E \cong E^{**}$  avec  $a \in E$  identifié à  $ev_a \in E^{**}$  tel que  $\chi_{ev_a}(x) = \chi_x(a)$  pour tout ensemble clos vers le bas  $x \in E^*$ . De façon symétrique, si  $E = L^*$  est l'ordonnancement de  $L$ , le treillis  $L$  est isomorphe à son double dual  $L \cong L^{**}$  avec  $x \in L$  identifié à  $ev_x \in L^{**}$  tel que  $\chi_{ev_x}(F) = \chi_F(x)$  pour tout filtre premier  $F \in L^*$ . Ce qui signifie que les deux unités de l'adjonction duale sont des morphismes dont les applications sous-jacentes sont les évaluations.

La dualité de Birkhoff décrite ci-dessus est un prototype du cadre plus général que nous présentons maintenant.

**Définition 5.1.1** Une Ens-catégorie (ou catégorie au dessus de la catégorie **Ens** des ensembles) est une paire  $\langle C, U \rangle$  où  $C$  est une catégorie et  $U : C \rightarrow \mathbf{Ens}$  est un foncteur appelé foncteur sous-jacent.  $C$  est une catégorie concrète si  $U$  est fidèle.

Dans la suite, le foncteur sous-jacent sera laissé implicite et nous utiliserons la notation uniforme  $|C|$  et  $|f|$  pour désigner respectivement l'ensemble sous-jacent à un objet  $C$  et l'application sous-jacente à un morphisme  $f$ . Une source structurée est une famille de paires  $\{C_i; f_i : X \rightarrow |C_i|\}$  constituées d'objets  $C_i$  de la catégorie  $C$  et d'applications  $f_i$  d'un ensemble  $X$  vers les ensembles sous-jacents aux  $C_i$ . Un relèvement de cette source structurée est la donnée d'une famille de morphismes  $\tilde{f}_i : C \rightarrow C_i$  de  $C$  tels que  $|\tilde{f}_i| = f_i$ , et donc en particulier  $|C| = X$ . Ce relèvement est dit initial si pour tout autre relèvement  $g_i : C' \rightarrow C_i$  pour lequel il existe une application  $f : |C'| \rightarrow X$  telle que  $|g_i| = f_i \circ f$  on peut trouver un unique morphisme  $\tilde{f} : C' \rightarrow C$  tel que  $|\tilde{f}| = f$  et  $g_i = f_i \circ \tilde{f}$ . La définition suivante est une adaptation de [84].

**Définition 5.1.2** Un objet schizoïde entre deux Ens-catégories  $A$  et  $B$  est une paire d'objets  $\langle K_A, K_B \rangle \in |A| \times |B|$  ayant le même ensemble sous-jacent  $K = |K_A| = |K_B|$  et tels que :

1. pour tout objet  $A$  dans  $A$  la famille  $\{K_B; ev_A(a) : A(A, K_A) \rightarrow K\}_{a \in |A|}$  des évaluations  $ev_A(a)(f) = |f|(a)$  admet un relèvement initial  $\{\epsilon_A(a) : A^* \rightarrow K_B\}_{a \in |A|}$
2. pour tout objet  $B$  dans  $B$  la famille  $\{K_A; ev_B(b) : B(B, K_B) \rightarrow K\}_{b \in |B|}$  des évaluations  $ev_B(b)(f) = |f|(b)$  admet un relèvement initial  $\{\epsilon_B(b) : B^* \rightarrow K_A\}_{b \in |B|}$

$A^*$ , appelé le dual de  $A$ , est donc un objet de la catégorie  $B$  dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des morphismes dans  $A$  de  $A$  vers l'objet classifiant  $K_A$ . Si  $K = \{0, 1\}$  et si  $A$  est concrète, alors les éléments de l'ensemble sous-jacent du dual de  $A$  peuvent être identifiés à des sous-ensembles de l'ensemble sous-jacent à  $A$  :  $|A^*| \subseteq 2^{|A|}$  et  $|A^{**}| \subseteq 2^{2^{|A|}}$ . Dans tous les cas de figure,  $A$  et  $A^{**}$  sont liés par un morphisme d'évaluation  $Ev_A : A \rightarrow A^{**}$  selon le résultat suivant.

**Lemme 5.1.3** Soit  $\langle K_A, K_B \rangle$  un objet schizoïde entre les Ens-catégories  $A$  et  $B$ . Le relèvement initial  $\{\epsilon_A(a) : A^* \rightarrow K_B\}_{a \in |A|}$  des évaluations, vu comme application  $\epsilon_A : |A| \rightarrow B(A^*, K_B)$ , est sous-jacente à un morphisme  $Ev_A : A \rightarrow A^{**}$ .

En tant que relèvement initial, le dual d'un objet n'est défini qu'à isomorphisme près. Néanmoins lorsqu'un représentant arbitraire a été choisi dans chacune de ses classes d'isomorphie, l'opérateur  $(\Leftrightarrow)^*$  donne lieu à un foncteur.

**Lemme 5.1.4** *Soit  $\langle K_A, K_B \rangle$  un objet schizoïde entre deux Ens-catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . Pour tout morphisme  $f : A_1 \rightarrow A_2$  dans  $\mathcal{A}$ , l'application "composer avec  $f$ " donnée comme suit :  $f^\bullet : \mathcal{A}(A_2, K_A) \rightarrow \mathcal{A}(A_1, K_A) : g \mapsto g \circ f$  est l'application sous-jacente à un morphisme  $f^* : A_2^* \rightarrow A_1^*$  de  $\mathcal{B}$  tel que les lois de functorialité  $(1_A)^* = 1_{A^*}$  et  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$  sont satisfaites.*

La proposition suivante nous dit que les deux foncteurs  $(\Leftrightarrow)^*$  induits par un objet schizoïde sont des adjoints duaux.

**Proposition 5.1.5** *Soit  $\langle K_A, K_B \rangle$  un objet schizoïde entre deux Ens-catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . Les identités suivantes, où  $f : A \rightarrow B^*$  et  $g : B \rightarrow A^*$ , définissent une correspondance bijective  $\mathcal{A}(A, B^*) \cong \mathcal{B}(B, A^*)$  :*

$$g = f^* \circ Ev_B \quad \text{et} \quad f = g^* \circ Ev_A$$

*c'est à dire que les foncteurs  $(-)^*$  sont adjoints à droite et ont les évaluations comme unités.*

Dans le cas particulier où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des catégories concrètes, la correspondance précédente peut être vue comme la transposition de matrices. En effet, dans ce cas particulier,  $\mathcal{A}(A, B^*) \cong \mathbf{Span}_{\mathcal{K}}(A, B) \cong \mathcal{B}(B, A^*)$  où  $\mathbf{Span}_{\mathcal{K}}(A, B)$  est l'ensemble des matrices  $|A| \times |B| \rightarrow K$  dont les lignes sont les applications sous-jacentes aux morphismes  $\varphi_a : B \rightarrow K_B$  (pour  $a \in |A|$ ), ou de façon équivalente dont les colonnes sont les applications sous-jacentes aux morphismes  $\varphi^b : A \rightarrow K_A$  (pour  $b \in |B|$ ). Dans une telle matrice, l'ensemble des lignes détermine un unique morphisme de  $A$  vers  $B^*$  et l'ensemble des colonnes détermine un unique morphisme de  $B$  vers  $A^*$ .

On peut faire de l'ensemble des  $\mathcal{K}$ -spans une catégorie dont les objets sont les triplets  $(A, \varphi, B)$  avec  $\varphi \in \mathbf{Span}_{\mathcal{K}}(A, B)$  (ou de façon équivalente  $(A, f, B)$  avec  $f \in \mathcal{A}(A, B^*)$  ou encore  $(A, f^\sharp, B)$  avec  $f^\sharp \in \mathcal{B}(B, A^*)$ ) et dont les morphismes sont les paires de morphismes de ré-indexation  $\alpha \in \mathcal{A}(A_1, A_2)$ , et  $\beta \in \mathcal{B}(B_2, B_1)$  tels que

- $\forall a \in A_1 \quad \forall b \in B_2 \quad \varphi_1^{\beta|b} = \varphi_2^b \circ \alpha \quad \text{et} \quad (\varphi_2)_{|\alpha|a} = (\varphi_1)_a \circ \beta,$
- ou de façon équivalente  $\beta^* \circ f_1 = f_2 \circ \alpha,$
- ou de façon équivalente  $\alpha^* \circ f_2^\sharp = f_1^\sharp \circ \beta.$

Pour les catégories concrètes cette condition sur les morphismes se simplifie en :

$$\forall a \in A_1 \quad \forall b \in B_2 \quad \varphi_1(a, |\beta|b) = \varphi_2(|\alpha|a, b)$$

La projection  $\pi_1 : \mathbf{Span}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{A}$  admet un adjoint à gauche inverse à droite  $\rho_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Span}_{\mathcal{K}}$  qui envoie un objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  vers l'unité  $Ev_A : A \rightarrow A^{**}$  et envoie le morphisme  $f : A \rightarrow A'$  vers la paire  $(f, f^*)$ . De façon symétrique la seconde projection  $\pi_2 : \mathbf{Span}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{B}^{op}$  admet un adjoint à droite inverse à droite  $\rho_2 : \mathcal{B}^{op} \rightarrow \mathbf{Span}_{\mathcal{K}}$  qui envoie un objet  $B$  de  $\mathcal{B}$  vers l'unité  $Ev_B : B \rightarrow B^{**}$  et envoie le morphisme  $g : B' \rightarrow B$  vers la paire  $(g^*, g)$ . L'adjonction duale  $(-)^* \dashv ((-)^*)^{op} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^{op}$  se décompose alors en une co-réflexion  $\rho_1 \dashv \pi_1$  et une réflexion  $\pi_2 \dashv \rho_2$ . Les catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}^{op}$  sont des sous catégories pleines respectivement réflexive et coréflexive de  $\mathbf{Span}_{\mathcal{K}}$ . Le noyau de cette adjonction est la sous catégorie pleine qui consiste des spans  $\varphi \in \mathbf{Span}_{\mathcal{K}}(A, B)$  pour lesquels  $B \cong A^*$  et  $A \cong B^*$ , elle est équivalente aux sous catégories pleines de  $\mathcal{A}$  et de  $\mathcal{B}^{op}$  dont les objets sont ceux pour lesquels l'unité

est un isomorphisme. Ceci procure une dualité entre les sous catégories respectives de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ .

La notion de span apparait dans la littérature sous différentes appellations. G. Birkhoff [23] les appelle *polarités*, néanmoins ce terme est parfois utilisé pour désigner les correspondances galoisiennes. S. Vickers [105] qualifie de *systèmes topologiques* les spans associés à l'adjonction duale entre les espaces topologiques et les algèbres de Heyting complètes. R. Wille [106] (voir aussi [34]) observe qu'un concept a une nature duale ; son extension est l'ensemble de tous les objets illustrant le concept et son intension (ou sa signification) est l'ensemble de toutes les propriétés partagées par ces objets. R. Wille appelle un *contexte* un span reliant instances et propriétés. Les spans apparaissent aussi sous le nom d'*espaces de Chu* [85] ou de *classifications* [17].

## 5.2 Connexions galoisiennes

L'adjonction duale de Birkhoff entre ensembles ordonnés finis et treillis distributifs finis est en fait une dualité, c'est à dire une équivalence de catégories. Ceci n'est généralement pas le cas et il peut être difficile dans certain cas d'identifier le noyau en restriction duquel on obtient la dualité. Un cas particulier d'adjonction duale, pas nécessairement induite par un objet schizoïde, est lorsque le noyau coïncide avec les images respectives des deux catégories.

**Définition 5.2.1 (Connexions galoisiennes)** Soit  $\mathcal{A}(A, B^*) \cong \mathcal{B}(B, A^*)$  une adjonction duale avec unités  $\{E_A : A \rightarrow A^{**}\}_{A \in |\mathcal{A}|}$  et  $\{E_B : B \rightarrow B^{**}\}_{B \in |\mathcal{B}|}$ . On désigne par  $\mathcal{B}^*$ , appelée image de  $\mathcal{B}$ , la sous catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  qui consiste en ces objets  $B^*$  pour  $B \in |\mathcal{B}|$ . L'image de  $\mathcal{A}$  est définie de la même façon. L'adjonction duale est une connexion galoisienne si une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. elle se restreint en une dualité entre les images :  $\mathcal{B}^* \stackrel{op}{\cong} \mathcal{A}^*$ ,
2. les morphismes  $(E_A)^*$  où  $A \in |\mathcal{A}|$  sont des isomorphismes,
3. leurs inverses à gauche  $E_{A^*}$  sont des isomorphismes,
4. les morphismes  $(E_B)^*$  où  $B \in |\mathcal{B}|$  sont des isomorphismes,
5. leurs inverses à gauche  $E_{B^*}$  sont des isomorphismes,
6. les morphismes  $\{E_A : A \rightarrow A^{**}\}_{A \in |\mathcal{A}|}$  constituent une réflexion de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}^*$ ,
7. les morphismes  $\{E_B : B \rightarrow B^{**}\}_{B \in |\mathcal{B}|}$  constituent une réflexion de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{A}^*$ .

Par exemple l'adjonction duale entre les espaces topologiques et les algèbres de Heyting complètes induite par l'objet schizoïde  $\mathbf{2}$ , vu comme une algèbre de Boole et comme un espace topologique discret [60, 34] est une connexion galoisienne. Rappelons qu'une algèbre de Heyting complète est un treillis complet vérifiant la loi de distributivité généralisée (les bornes inférieures finies commutent aux bornes supérieures quelconques :  $f \wedge \bigvee_i f_i = \bigvee_i (f \wedge f_i)$ ). Pour toute algèbre de Heyting complète  $F$ , posons  $pt(F)$ , l'ensemble de ses points, défini comme les morphismes d'algèbres de Heyting  $x : F \rightarrow \mathbf{2}$ . Le dual  $F^*$  de  $F$  est l'espace topologique  $(pt(F), \Omega)$  dont les ouverts sont les ensembles  $O_f = \{x : F \rightarrow \mathbf{2} \mid x(f) = 1\}$  pour  $f$  dans  $F$ . Inversement, le dual  $X^*$  d'un espace topologique  $(X, \Omega)$  est son ensemble d'ouverts qui est une algèbre de Heyting complète pour les opérations ensemblistes d'union et d'intersection. Notons que les ouverts de  $X$  sont les parties  $O \subseteq X$  dont les fonctions caractéristiques  $\chi_O$  sont les application continues de

$(X, \Omega)$  vers l'espace de Sierpinski  $\mathbf{2}$  dont les ouverts sont les ensembles  $\{0, 1\}$ ,  $\{1\}$ , et  $\emptyset$ . Les algèbres de Heyting complètes et les espaces topologiques sont liés par une connexion galoisienne  $\mathbf{AHC}(F, X^*) \cong \mathbf{Top}(X, F^*)$ . En restreignant cette adjonction à son noyau, on obtient donc une dualité  $\mathbf{Top}^* \xrightarrow{op} \mathbf{AHC}^*$  entre la sous-catégorie  $\mathbf{Top}^*$  des algèbres de Heyting spatiales (c'est à dire qui correspondent à l'algèbre des ouverts d'un espace topologique) et la sous-catégorie  $\mathbf{AHC}^*$  des espaces dits *sobres*. Les algèbres de Heyting spatiales sont caractérisées par deux conditions très similaires aux propriétés de séparation pour les automates, lorsque les régions sont remplacées par les morphismes  $x : F \rightarrow \mathbf{2}$ . Précisément, une algèbre de Heyting complète est spatiale si, et seulement si, elle satisfait aux conditions suivantes dans lesquelles  $f, f' \in F$  et  $f \leq f' \Leftrightarrow f = f \wedge f'$ :

- (i)  $f \neq f' \Rightarrow \exists x : F \rightarrow \mathbf{2} : x(f) \neq x(f')$
- (ii)  $f \not\leq f' \Rightarrow \exists x : F \rightarrow \mathbf{2} : x(f) = 1 \wedge x(f') = 0$

La condition (i) est l'analogue de la propriété de séparation des états et la condition (ii) est la contrepartie de la propriété de séparation entre état et événement lorsque la structure de système de transitions étiquetées est remplacée par la structure d'ordre.

Nous dirons qu'une adjonction duale est de *profondeur* 0 s'il s'agit d'une dualité et qu'elle est de profondeur  $n + 1$  si sa restriction aux images est de profondeur  $n$ . Ainsi une connexion galoisienne est une adjonction duale de profondeur 1.

### 5.3 Adjonction duale entre réseaux et systèmes de transitions

Les dualités classiques rappelées ci dessus sont concernées par des points  $x \in X$ , des propriétés  $p \in P$ , et une relation binaire  $|\subseteq X \times P$  valuée dans l'ensemble sous-jacent à l'objet schizoïde, c'est à dire  $\{0, 1\}$ . Quand cette relation est présentée matriciellement la dualité apparait comme la transposition de matrices. Les dualités entre systèmes de transitions et réseaux suit le même schéma. Les points sont les transitions  $s \xleftrightarrow{e} s'$ , les propriétés sont les régions  $(\sigma, \eta)$ , et la matrice d'évaluation donnée par  $ev(s \xleftrightarrow{e} s', (\sigma, \eta)) = \sigma(s) \xleftrightarrow{\eta(e)} \sigma(s')$  décrit l'effet local de la transition sur les places  $(\sigma, \eta)$  du réseau dual. Cette construction est paramétrée par les *types de réseaux* [10].

#### 5.3.1 Types de réseaux

**Définition 5.3.1** *Un type de réseaux est un système de transitions déterministe  $\tau = (LS, LE, LT)$  dans lesquels  $LS$  et  $LE$  sont les ensembles d'états locaux et d'événements locaux, et  $LT \subseteq LS \times LE \times LS$  définit l'action partielle d'un événement local sur les états locaux.*

**Définition 5.3.2** *Un réseau de type  $\tau$  est une structure  $N = (P, E, W)$  dans laquelle  $P$  est un ensemble de places,  $E$  un ensemble d'événements, et  $W : P \times E \rightarrow LE$  est une matrice de pondération. Un marquage est une application  $M : P \rightarrow LS$  associant à chaque place un état local. Un réseau marqué  $\mathcal{N} = (P, E, W, M_0)$  est un réseau muni d'un marquage  $M_0$  dit initial.*



Un réseau est dit à places simples si toutes les lignes de la matrice de pondération sont distinctes ; et il est dit à événements simples si toutes les colonnes de cette matrice sont distinctes.

Un réseau peut être vu comme un graphe bipartite complet non dirigé dont les arêtes sont étiquetées par des événements locaux. La dynamique des réseaux est donnée par leur type :

**Définition 5.3.3** *Le graphe de marquage (séquentiel) d'un réseau  $N = (P, E, W)$  de type  $\tau = (LS, LE, LT)$  est le système de transitions  $N^* = (LS^P, E, T)$  dont l'ensemble des transitions  $T$  est donné par*

$$(M \xrightarrow{e} M') \in T \Leftrightarrow \forall p \in P \quad (M(p) \xrightarrow{W(p,e)} M'(p)) \in LT$$

*Le graphe de marquage (séquentiel) d'un réseau marqué  $\mathcal{N} = (P, E, W, M_0)$  est l'automate  $\mathcal{N}^* = (S, E, T_S, M_0)$  où  $S$  est la composante connexe<sup>2</sup> de  $M_0$  dans  $T$ , et  $T_S = T \cap (S \times E \times S)$ .*

Ainsi un événement est autorisé en un marquage  $M$  si, et seulement si, pour toute place  $p$ , l'événement local  $W(p, e)$  est autorisé dans l'état local  $M(p)$  dans le type. Les réseaux élémentaires sont les réseaux de type  $\tau_{EN}$  indiqués à la figure 5.2. Les systèmes d'addition

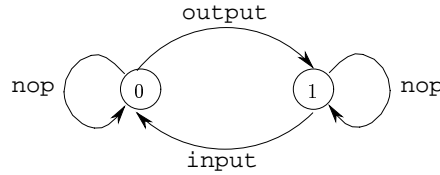


FIG. 5.2 – le type  $\tau_{EN}$  des réseaux élémentaires

de vecteurs sont les réseaux de type  $\tau_{vas} = (\mathbf{N}, \mathbf{Z}, T)$  tel que  $n \xrightarrow{z} n'$  lorsque  $n' = n + z$ , c'est à dire que  $\tau_{vas}$  est le sous graphe induit du graphe de Cayley de  $\mathbf{Z}$  sur  $\mathbf{N}$ . Le type des réseaux de Petri est le système de transitions  $\tau_{PN} = (\mathbf{N}, \mathbf{N} \times \mathbf{N}, T)$  tel que  $n \xrightarrow{(p,q)} n'$  si, et seulement si,  $n \geq p$  et  $n' = (n \ominus p) + q$ . Les réseaux de Petri correspondent aux réseaux de type  $\tau_{PN}$ , la relation de franchissement donnée dans la définition 5.3.3 peut effectivement se lire comme

$$M[e > M'] \Leftrightarrow \forall p \in P \quad M(p) \geq F(p, e) \wedge M'(p) = M(p) \ominus F(p, e) + F(e, p)$$

Les réseaux considérés ci dessus sont des instances des réseaux de Petri généralisés étudiés par Droste et Shortt dans [38]. Ces derniers paramétrisent la définition classique des réseaux de Petri en substituant à  $\mathbf{N}$  la partie positive  $G^+$  d'un groupe commutatif partiellement ordonné  $G$ . Ces types de réseaux sur  $G$  sont alors classés en terme de l'ensemble des paires  $((F(p, e), F(e, p)) \in G^+ \times G^+$  autorisées à apparaître comme valeurs pour la relation de flux. Par exemple, les réseaux conditions événements sont obtenus par restriction sur  $\mathbf{Z}$  aux paires  $((F(p, e), F(e, p)) \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ . Les types de réseaux donnés

2. On aurait pu prendre comme ensemble d'états la fermeture inductive de  $\{M_0\}$  vis à vis de la relation de transition vers l'avant, cependant comme nous sommes principalement intéressés par la représentation d'automates réversibles nous préférons considérer la fermeture vers l'avant et vers l'arrière.

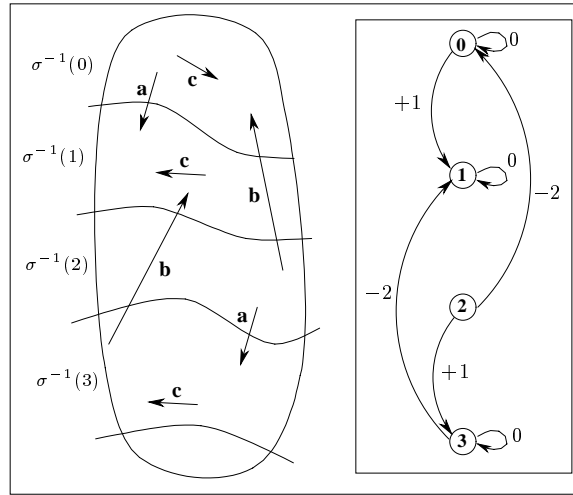


FIG. 5.3 – région généralisée comme morphisme :  $\mathbf{T} \rightarrow \tau_{vas}$

jusqu'ici peuvent de même s'obtenir comme graphes induits de graphes de Cayley. Par exemple le type  $\tau_{EN}$  est le graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  restreint aux noeuds 0 et 1, avec  $\text{nop} = 0$ ,  $\text{output} = 1$ , et  $\text{input} = 2$ .

### 5.3.2 Régions comme morphismes

La règle de franchissement donnée dans la définition 5.3.3 nous dit que pour chaque place  $p$  d'un réseau de type  $\tau$ , la paire  $(\sigma_p, \eta_p)$  définie par  $\sigma_p(M) = M(p)$  et  $\eta_p(e) = W(p, e)$  est un morphisme de système de transitions du graphe de marquage du réseau vers le type  $\tau$ . Ce morphisme, appelé *extension* de la place  $p$ , est une région du graphe de marquage au sens de la définition suivante.

**Définition 5.3.4** L'ensemble  $\mathcal{R}_\tau(\mathbf{T})$  des régions d'un système de transitions  $\mathbf{T} = (S, E, T)$  de type  $\tau = (LS, LE, LT)$  est l'ensemble des morphismes de  $\mathbf{T}$  vers  $\tau$ .

Comme nous l'avons observé dans le chapitre 2 (voir la figure 2.1) les régions introduites par Ehrenfeucht et Rozenberg coïncident avec les morphismes de systèmes de transitions de  $\mathbf{T}$  dans  $\tau_{EN}$ . De la même façon les régions généralisées (voir (4.2.1)) coïncident avec les morphismes de systèmes de transitions de  $\mathbf{T}$  dans  $\tau_{vas}$ , voir la figure 5.3.

### 5.3.3 Objet schizoïde

La catégorie **Trans** des systèmes de transitions, dont les morphismes  $(\sigma, \eta) : (S, E, T) \rightarrow (S', E', T')$  sont les paires  $\sigma : S \rightarrow S'$  et  $\eta : E \rightarrow E'$  telles que  $s \xrightarrow{e} s'$  entraîne  $\sigma(s) \xrightarrow{\eta(e)} \sigma(s')$ , est une Ens-catégorie dont le foncteur sous-jacent  $U : \mathbf{Trans} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est donné par  $U(S, E, T) = T$  et  $U(\sigma, \eta)(s \xrightarrow{e} s') = (\sigma(s) \xrightarrow{\eta(e)} \sigma(s'))$ . Une famille d'applications  $f_i : X \rightarrow X_i$  est dite injective si  $\forall i \quad f_i(x) = f_i(y) \Rightarrow x = y$ , c'est à dire s'il

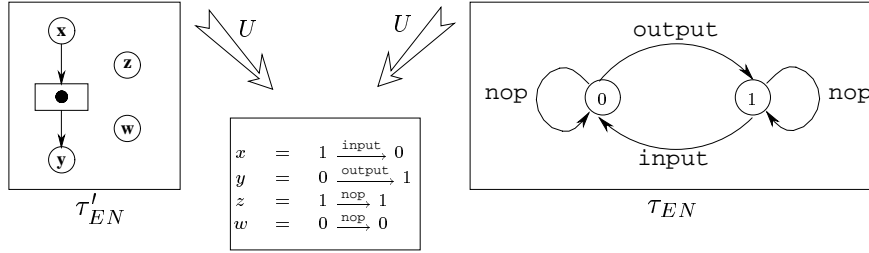


FIG. 5.4 – objet schizoïde pour les réseaux élémentaires

existe une injection  $j : X \hookrightarrow \prod_i X_i$  telle que  $f_i = \pi_i \circ j$  où  $\pi_i : \prod_i X_i \rightarrow X_i$  est la  $i$ ème projection. Dans la catégorie **Trans** toute source structurée injective  $\{(S_i, E_i, T_i); T \subseteq \prod_i T_i \xrightarrow{f} T_i\}$  admet un relèvement initial donné par le produit  $(\prod_i S_i, \prod_i E_i, T \subseteq \prod_i T_i)$ .

Soit **Nets** la catégorie des réseaux  $(P, E, W)$  à événements simples de type  $\tau$  (c'est à dire que  $W : P \times E \rightarrow LE$  a toutes ses colonnes distinctes). Un morphisme entre deux tels réseaux  $(\beta, \eta) : (P, E, W) \rightarrow (P', E', W')$  est une paire d'applications  $\beta : P \rightarrow P'$  et  $\eta : E' \rightarrow E$  telles que  $W(p, \eta(e')) = W(\beta(p), e')$ . Par absence de colonnes redondantes dans les matrices de pondération, on déduit que la composante  $\beta$  détermine la composante  $\eta$  dans tout morphisme  $(\beta, \eta)$  et que munie du foncteur sous-jacent  $U : \mathbf{Nets} \rightarrow \mathbf{Ens}$  défini par  $U(P, E, W) = P$  et  $U(\beta, \eta) = \beta$ , **Nets** est une catégorie concrète. Par ailleurs dans cette catégorie toute source structurée  $\{(P_i, E_i, W_i); \beta_i : P \rightarrow P_i\}$  admet un relèvement initial donné par  $(P, \prod_i E_i, W)$  où  $W : P \times E_i \rightarrow LE$  est le "coproduit" des matrices  $W_i$  :

$$\forall p \in P \quad \forall a_i \in A_i \quad W_i(\beta_i(p), a_i) = W(p, in_i(a_i))$$

Soit  $\tau' = (LT, \{\bullet\}, W) \in \mathbf{Nets}$  le réseau à place unique  $\bullet$  et tel que  $W(ls \xrightarrow{e} ls') = le$  pour toute place  $ls \xrightarrow{e} ls' \in LT$ . Ainsi  $U\tau' = LT = U\tau$ . La figure 5.4 montre le réseau  $\tau'_{EN}$  associé au type  $\tau_{EN}$  des réseaux élémentaires.

**Proposition 5.3.5** *La paire  $(\tau, \tau')$  est un objet schizoïde entre les catégories **Trans** et **Nets** qui induit une adjonction duale  $\mathbf{Trans}(\mathbf{T}, N^*) \cong \mathbf{Nets}(N, \mathbf{T}^*)$ .*

Il nous reste à interpréter  $\mathbf{T}^*$  en  $N^*$  termes plus familiers. Pour tout système de transitions  $\mathbf{T} = (S, E, T)$  l'ensemble des morphismes  $\mathbf{Trans}(T, \tau)$  est par définition l'ensemble  $\mathcal{R}_\tau(\mathbf{T})$  de ses régions. L'évaluation  $ev_{\mathbf{T}}(s \xrightarrow{e} s')(\sigma, \eta) = (\sigma(s) \xrightarrow{\eta(e)} \sigma(s'))$  permet de classer les transitions  $t = (s \xrightarrow{e} s') \in T$  en fonction de leur effet local sur chaque région. Par définition  $\mathbf{T}^*$  est le réseau obtenu comme relèvement optimal de la famille des applications  $ev_A(t)$  pour  $t \in \mathbf{T}$ . La proposition suivante montre que  $\mathbf{T}^*$  coïncide avec le réseau synthétisé à partir de l'ensemble des régions  $\mathcal{R}_\tau(\mathbf{T})$  à une confusion près d'événements indiscernables.

**Proposition 5.3.6**  *$\mathbf{T}^*$  est isomorphe au réseau  $(P, E_{\equiv}, W)$  tel que  $P = \mathcal{R}_\tau(\mathbf{T})$  est l'ensemble des régions de  $\mathbf{T}$ ,  $\equiv$  est la relation d'équivalence sur  $E$  donnée par  $e \equiv e'$  lorsque  $\eta(e) = \eta(e')$  pour toute région  $(\sigma, \eta)$ , et  $W((\sigma, \eta), [e]_{\equiv}) = \eta(e)$ .*

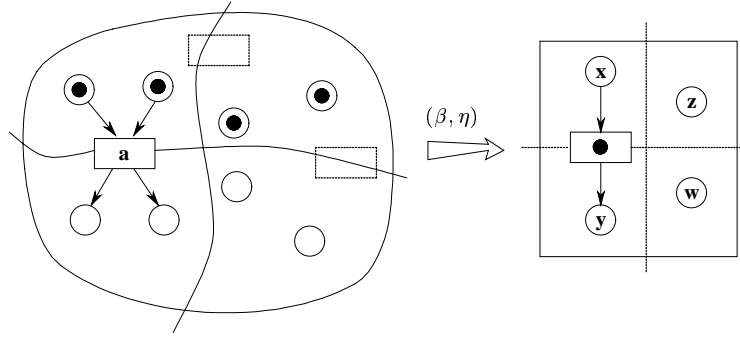


FIG. 5.5 – franchissements comme morphismes

Pour tout réseau  $N = (P, E, W)$  l'ensemble  $\mathbf{Nets}(N, \tau')$  est en correspondance bijective avec l'ensemble des transitions du graphe de marquage de  $N$ . Dans le cas des réseaux élémentaires (voir la figure 5.5), chaque morphisme  $(\beta, \eta) : N \rightarrow \tau'_{EN}$  induit la transition  $\beta^{-1}(\{x, z\}) \xrightarrow{\eta(e)} \beta^{-1}(\{y, z\})$ , et inversement chaque franchissement  $M[e > M']$  induit le morphisme  $(\beta, \eta)$  tel que  $\eta(\bullet) = e$  et pour chaque place  $p$ ,

$$\beta(p) = \begin{cases} x & \text{si } p \in M \setminus M' \\ y & \text{si } p \in M' \setminus M \\ z & \text{si } p \in M \cap M' \\ w & \text{si } p \notin M \cup M' \end{cases}$$

Ainsi l'évaluation  $ev_N(p)(\beta, \eta) = \beta(p)$  classe les places de  $N$  en fonction des transition locales qu'elle subit pour chaque franchissement d'un événement du réseau. Par définition  $N^*$  est le système de transitions obtenu comme relèvement initial de la famille d'évaluations  $ev_N(p)$  pour  $p \in P$ .

**Proposition 5.3.7**  $N^*$  est isomorphe au graphe de marquage de  $N$ .

## 5.4 Adjonction duale entre réseaux et automates

La catégorie **Aut** des automates a pour objets les paires  $A = (\mathbf{T}, s_0)$  constituées d'un système de transitions connexe et d'un état initial  $s_0 \in S$  et pour morphismes les morphismes de systèmes de transitions  $(\sigma, \eta) : A \rightarrow A'$  tels que  $\sigma(s_0) = s'_0$ . Le dual d'un automate est le réseau marqué  $A^* = (\mathbf{T}^*, M_0)$  dont le marquage initial vérifie  $M_0(p) = p(s_0)$  pour toute place  $p \in \mathcal{R}_\tau(\mathbf{T})$  de  $\mathbf{T}^*$ . Les réseaux marqués de type  $\tau$  forment une catégorie **MNets** dont les morphismes  $(\beta, \eta) : (P, E, W, M_0) \rightarrow (P', E', W', M'_0)$  sont les morphismes entre les réseaux sous-jacents (c'est à dire les paires d'applications  $\beta : P \rightarrow P'$  et  $\eta : E' \rightarrow E$  telles que  $W(p, \eta(e')) = W(\beta(p), e')$  pour  $p \in P$  et  $e' \in E'$ ) tels que  $M_0 = M'_0 \circ \beta$ .

**Proposition 5.4.1** L'adjonction duale entre les systèmes de transitions et les réseaux induit une adjonction duale de profondeur 2 entre les réseaux marqués et les automates. Par

restriction à son noyau elle procure une dualité  $\mathbf{Aut}^{**} \cong^{op} \mathbf{MNets}^{**}$  entre les automates séparés et les réseaux marqués saturés. Un automate est séparé si, et seulement si, il satisfait aux propriétés de séparation suivantes où  $\mathcal{R}$  désigne l'ensemble des régions du système de transitions sous-jacent.

- (**esp**):  $e \neq e' \Rightarrow \exists R = (\sigma, \eta) \in \mathcal{R} \quad \eta(e) \neq \eta(e')$
- (**ssp**):  $s \neq s' \Rightarrow \exists R = (\sigma, \eta) \in \mathcal{R} \quad \sigma(s) \neq \sigma(s')$
- (**essp**):  $\begin{cases} s \xrightarrow{e} \not\rightarrow & \Rightarrow \exists R = (\sigma, \eta) \in \mathcal{R} \quad \sigma(s) \xrightarrow{\eta(e)} \text{ dans } \tau \\ \xrightarrow{e} s & \Rightarrow \exists R = (\sigma, \eta) \in \mathcal{R} \quad \xrightarrow{\eta(e)} \sigma(s) \text{ dans } \tau \end{cases}$

En effet si  $\mathcal{N} = (N, M_0)$  et  $A = (\mathbf{T}, s_0)$ , puisque  $\mathbf{T}$  est connexe et comme  $\mathcal{N}^*$  est la composante connexe de  $M_0$  dans  $N^*$  les morphismes  $f : A \rightarrow \mathcal{N}^*$  coïncident avec les morphismes  $f : \mathbf{T} \rightarrow N^*$  tels que  $f(s_0) = M_0$ , ceux ci sont en correspondance bijective avec les morphismes  $f^\sharp : N \rightarrow \mathbf{T}^*$  tels que  $f^\sharp(p)(s_0) = M_0(p)$ , c'est à dire avec les morphismes  $f^\sharp : \mathcal{N} \rightarrow A^*$ . D'où une adjonction duale  $\mathbf{Aut}(A, \mathcal{N}^*) \cong \mathbf{MNet}(\mathcal{N}, A^*)$ . L'évaluation  $Ev_A : A \rightarrow A^{**}$  représente un état  $s \in S$  comme le vecteur d'états locaux  $(\sigma(s); R = (\sigma, \eta) \in \mathcal{R})$ , un événement comme le vecteur d'événements locaux  $(\eta(e); R = (\sigma, \eta) \in \mathcal{R})$ , et une transition  $t = s \xleftrightarrow{e} e'$  comme le vecteur de transitions locales  $(\sigma(s) \xrightarrow{\eta(e)} \sigma(s'); R = (\sigma, \eta) \in \mathcal{R})$ ; c'est par conséquent un isomorphisme si, et seulement si, les trois propriétés de séparation sont satisfaites. Les extensions des places d'un réseau marqué sont suffisantes pour établir les propriétés de séparations **ssp** et **essp** de son graphe de marquage mais pas en général **esp**.  $Ev_{\mathcal{N}^*}$  n'est donc pas nécessairement un isomorphisme pour tout réseau marqué  $\mathcal{N}$ , c'est à dire que l'adjonction duale n'est pas une connexion galoisienne. Néanmoins c'est un isomorphisme pour ces réseaux dont les graphes de marquage vérifient **esp**:

**Proposition 5.4.2** *Un automate vérifiant **esp** est isomorphe au graphe de marquage d'un réseau marqué si, et seulement si, il vérifie les propriétés de séparation **ssp** et **essp**.*

## 5.5 Extension aux automates de dimension supérieure

Nielsen et Winskel [76] et Mukund [70] ont résolu le problème de synthèse pour respectivement les réseaux de Petri saufs et les réseaux de Petri, autorisant ainsi les conditions de bord. Le comportement d'un réseau de Petri pur (c'est à dire sans condition de bord) est parfaitement décrit par son graphe de marquage. En effet, la structure d'indépendance entre les événements du réseau se retrouve dans la structure de son graphe de marquage. La modélisation du comportement concurrent d'un réseau impur nécessite par contre l'introduction d'information supplémentaire pour rendre explicite la structure d'indépendance des événements. L'illustration la plus simple de ce phénomène est illustré par la figure 5.6 qui montre deux réseaux de Petri saufs qui ont le même graphe de marquage mais tels que les événements  $a$  et  $b$  sont indépendants dans le premier mais pas dans le second. Des événements d'un réseaux de Petri saufs sont indépendants s'ils ont des domaines disjoints, où le domaine d'un événement est l'ensemble de conditions qui lui sont attachées (c'est à dire ses pré-conditions et ses post-conditions). L'information sur l'indépendance des événements d'un réseau de Petri sauf peut être capturée par une relation binaire. Enrichis de

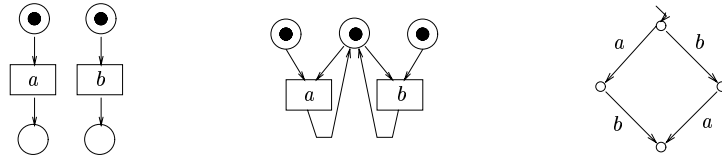


FIG. 5.6 – deux réseaux de Petri saufs ayant le même graphe de marquage mais des relations d'indépendance différentes

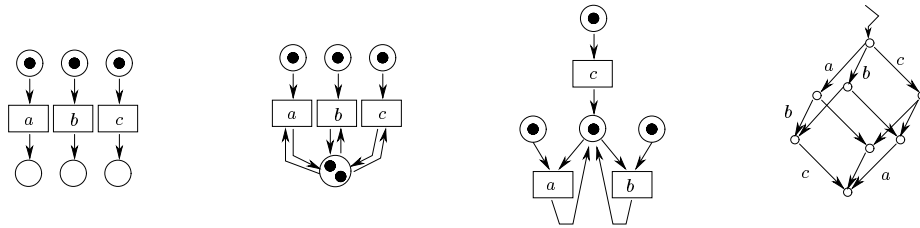


FIG. 5.7 – trois réseaux de Petri ayant le même graphe de marquage mais des relations d'indépendance différentes

cette relation, les graphes de marquage de réseaux de Petri saufs deviennent des *systèmes de transitions asynchrones* [18, 96]. Dans la direction inverse, Nielsen et Winskel ont défini une variante des régions, appelées *conditions*, dans les systèmes de transitions asynchrones. Les conditions d'un système de transitions asynchrone deviennent les places d'un réseau de Petri pur dont le graphe de marquage est le système de transitions asynchrone de départ lorsque celui ci satisfait aux axiomes de séparation.

Des événements d'un réseau de Petri sont indépendants dans un marquage donné s'il y a suffisamment de jetons dans leurs places d'entrée pour que ces événements puissent être franchis simultanément. Par exemple les trois réseaux de la figure 5.7 ont le même graphe de marquage. Néanmoins les événements  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont indépendants dans le premier réseau (pour le marquage indiqué), ils sont deux à deux indépendants mais pas indépendants dans le second réseau. Le troisième exemple (emprunté à [56]) est plus compliqué: les ensembles maximaux d'événements indépendants dans le marquage indiqué sont  $\{a, c\}$  et  $\{b, c\}$ ;  $a$  et  $b$  ne sont pas indépendants mais ils le deviennent une fois que l'événement  $c$  est franchi. On observe que la relation d'indépendance dépend du marquage courant et que même dans un marquage donné l'information sur l'indépendance des événements ne peut pas se réduire à une relation binaire: les événements peuvent comme dans le second exemple être indépendants deux à deux mais pas indépendants globalement. Par ailleurs il semble naturel d'admettre l'*autoconcurrency*, c'est à dire que plusieurs instances du même événement puissent être franchies en même temps s'il y a suffisamment de ressources dans leurs places d'entrée. Si on enrichit le graphe de marquage d'un réseau en indiquant dans chaque état l'ensemble des multi ensembles d'événements qui sont autorisés de façon indépendante on se retrouve avec un *système de transitions par pas* (step transition systems). Cette généralisation des systèmes de transitions asynchrones introduite par Mukund dans [70] sont des systèmes de transitions dans lesquels on peut transiter d'un état à un autre

en exécutant un multi ensemble d'événements indépendants. Mukund a introduit une variante des régions que nous appellerons ici des *conditions généralisées* pour les systèmes de transitions par pas. Ces conditions généralisées sont les places d'un réseau de Petri dont le graphe de marquage concurrent est le système de transitions par pas de départ lorsque celui-ci satisfait aux deux propriétés de séparation.

**Définition 5.5.1** *Un système de transitions par pas  $(S, M, T)$  sur un monoïde commutatif  $M$  consiste en un ensemble d'états  $S$  et une relation de transition déterministe  $T \subseteq S \times M \times S$ , telle que (i)  $s \xrightarrow{0} s' \text{ssi } s = s'$  et (ii)  $s_1 \xrightarrow{\alpha} s_2, s_2 \xrightarrow{\beta} s_3$ , et  $s_1 \xrightarrow{\alpha+\beta} s_4$  entraîne  $s_3 = s_4$ . Un automate par pas est un système de transitions par pas connexe  $(S, M, T, s_0)$  avec état initial  $s_0 \in S$ .*

Cette définition généralise quelque peu la définition originale de Mukund qui se limitait aux monoïdes commutatifs libres. Cette extension nous autorise à considérer des automates par pas ne vérifiant pas nécessairement la propriété de l'état intermédiaire :  $s \xrightarrow{\alpha+\beta} s' \Rightarrow \exists s'' \in S \ s \xrightarrow{\alpha} s'' \wedge s'' \xrightarrow{\beta} s'$ . La définition de régions dans les systèmes de transitions par pas est paramétrée par les types enrichis de réseaux définis comme suit.

**Définition 5.5.2** *Un type enrichi de réseaux est un système de transitions par pas déterministe  $\tau = (LS, LE, LT)$ , où  $LE$  est un monoïde commutatif  $(LE, +, 0)$ .*

Par exemple, le type enrichi des réseaux de Petri est  $\tau_{PN} = (\mathbf{N}, \mathbf{N} \times \mathbf{N}, LT)$ , où  $n \xrightarrow{(i,j)} n' \in LT$  si, et seulement si,  $n \geq i$  et  $n' = n \ominus i + j$ , avec l'opération d'addition composantes à composantes sur  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ . Chaque type de réseaux détermine une règle spécifique de franchissement concurrent et donc une construction d'un graphe de marquage concurrent.

**Définition 5.5.3** *Le graphe de marquage concurrent d'un réseaux  $N = (P, E, W)$  pour le type (enrichi)  $\tau = (LS, LE, LT)$  est le système de transitions par pas  $(LS^P, \langle E \rangle, T)$  sur le monoïde librement engendré par l'alphabet  $E$  et dont les transitions sont données par :*

$$(M \xrightarrow{\alpha} M') \in T \Leftrightarrow \forall x \in P \ (M(x) \xrightarrow{W(x,\alpha)} M'(x)) \in LT \quad (5.1)$$

où  $W(x, e_1 + \dots + e_n) = W(x, e_1) + \dots + W(x, e_n)$ . Le graphe de marquage concurrent d'un réseau marqué  $\mathcal{N} = (P, E, W, M_0)$  est l'automate par pas  $\mathcal{N}^* = (S, \langle E \rangle, T_S, M_0)$  où  $S$  est la composante connexe de  $M_0$  dans  $T$  et  $T_S = T \cap (S \times \langle E \rangle \times S)$ .

**Définition 5.5.4** *Un morphisme de systèmes de transitions par pas de  $\mathbf{T} = (S, M, T)$  vers  $\mathbf{T}' = (S', M', T')$  est une paire  $(\sigma, \eta)$  constituée d'une application  $\sigma : S \rightarrow S'$  et d'un morphisme de monoïdes  $\eta : M \rightarrow M'$  tels que  $s \xrightarrow{\alpha} s' \Rightarrow \sigma(s) \xrightarrow{\eta(\alpha)} \sigma(s')$ . Les morphismes d'automates par pas sont les morphismes entre leur systèmes de transitions par pas sous-jacents qui préserve les états initiaux.*

**Définition 5.5.5** *Étant donné un système de transitions par pas  $\mathbf{T} = (S, M, T)$  et un type enrichi de réseaux  $\tau = (LS, LE, LT)$ , l'ensemble  $\mathcal{R}_\tau(\mathbf{T})$  des régions de type  $\tau$  de  $\mathbf{T}$  est l'ensemble des morphismes de systèmes de transitions par pas de  $\mathbf{T}$  dans  $\tau$ .*

En spécialisant cette définition au type  $\tau_{PN}$  on retrouve exactement la définition des conditions généralisée donnée par Mukund. Regardons plus précisément ce qui se passe pour les systèmes de transitions par pas  $\mathbf{T} = (S, M, T)$  associés à des systèmes de transitions

asynchrones  $(S, E, \parallel, T')$  qui sont définis comme suit :  $M = \langle E \rangle$  est le monoïde commutatif librement engendré par  $E$ ,  $s \xrightarrow{\alpha} s'$  dans  $T$  si, et seulement si,  $\alpha$  est un sous-ensemble<sup>3</sup> d'événements deux à deux indépendants  $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq E$  pour lequel il existe dans  $T'$  une suite de transitions  $s \xrightarrow{e_1} s_1 \xrightarrow{e_2} s_2 \dots s_{n-1} \xrightarrow{e_n} s_n$  avec  $s' = s_n$ <sup>4</sup>. Pour cette sous classe de système de transitions par pas, les régions  $(\sigma, \eta) : A \rightarrow \tau_{PN}$  qui sont *sauves* en ce sens que  $\sigma(s) \in \{0, 1\}$  pour tout  $s \in S$  sont en correspondance bijective avec les *conditions* définies par Nielsen et Winskel pour les systèmes de transitions asynchrones [76].

Comme dans la section 5.3.3,  $\tau'$  est le réseau dont les places sont les transitions locales du type.

**Proposition 5.5.6** *La paire  $(\tau, \tau')$  est un objet schizoïde entre la catégorie **STP** des systèmes de transitions par pas et la catégorie **Nets** des réseaux qui induit une adjonction duale  $\mathbf{STP}(\mathbf{T}, N^*) \cong \mathbf{Nets}(N, \mathbf{T}^*)$ .*

Nous avons un analogue de la proposition 5.4.1 où les événements sont remplacés par des pas (notons que le graphe de marquage concurrent d'un réseau est un système de transitions par pas sur un monoïde commutatif *libre*). La caractérisation donnée par Mukund pour les graphes de marquages concurrent des réseaux de Petri [70] est une conséquence de ce résultat appliqué au type  $\tau_{PN}$  des réseaux de Petri. La caractérisation donnée par Nielsen et Winskel pour les systèmes de transitions asynchrones séparés [76] s'en déduit comme le cas particulier obtenu en imposant que les régions  $(\sigma, \eta) \in \mathcal{R}$  soient telles que  $\sigma(s) \in \{0, 1\}$  pour tout état  $s$ . La synthèse de réseaux avec arcs inhibiteurs à partir de leur graphe de marquage concurrent [82, 83] est une autre instance de cette construction.

Les systèmes de transitions par pas sur un monoïde commutatif libre sont des *automates de dimension supérieure*. Il s'agit d'un modèle géométrique d'automates concurrents proposé par Pratt et van Glabbeek [86, 47] (voir aussi [97]) qui ont été étudiés de manière intensive dans la thèse de Goubault [49]. Un automate de dimension supérieure possède des états de diverses dimensions. Un état de dimension  $n$  s'interprète comme une situation dans laquelle  $n$  événements indépendants sont en cours d'exécution. Un état  $n$ -dimensionnel d'un automate par pas sur un monoïde commutatif libre est une paire  $(s, \alpha)$  où  $\alpha$  est un pas (multi-ensemble d'événements indépendants) autorisé en  $s$ . Un tel automate peut être vu comme un automate ordinaire, appelé sa *discrétisation*, défini sur l'alphabet scindé (chaque événement  $a$  est scindé en son initialisation,  $beg(a)$ , et sa terminaison,  $end(a)$ ) par  $(s, \alpha) \xrightarrow{beg(a)} (s, \beta)$  et  $(s, \beta) \xrightarrow{end(a)} (s', \alpha)$  lorsque  $s \xrightarrow{a} s'$  et  $\beta = \alpha + a$ . La discrétisation des automates de dimension supérieure est analogue à la transformation de réseaux impurs en réseaux purs par scindage d'événements (voir [48]). Cette transformation est illustrée dans la figure 5.8: Chaque place d'entrée d'un événement  $a$  devient une place d'entrée de  $beg(a)$  avec le même poids, de même chaque place de sortie de  $a$  devient une place de sortie de  $end(a)$ . La place  $exec(a)$  qui est une place de sortie de  $beg(a)$  et une place d'entrée de  $end(a)$  (avec des poids simples) témoigne de l'activité de l'événement  $a$  dans le cas d'un réseau sauf, ou compte le nombre d'occurrences de l'action  $a$  en cours d'exécution dans le cas d'un réseau de Petri général. Un marquage du réseau scindé peut être vu comme un état  $n$ -dimensionnel où  $n$  est le nombre total de jetons dans des places de la forme  $exec(a)$ . Plus précisément le graphe de marquage du réseau scindé, qui est un automate ordinaire sur l'alphabet scindé, est la discrétisation de l'automate de

3. Il n'y a pas d'autoconcurrency dans les systèmes de transitions asynchrones.

4. De telles suites existent donc aussi nécessairement pour toute permutation de  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .



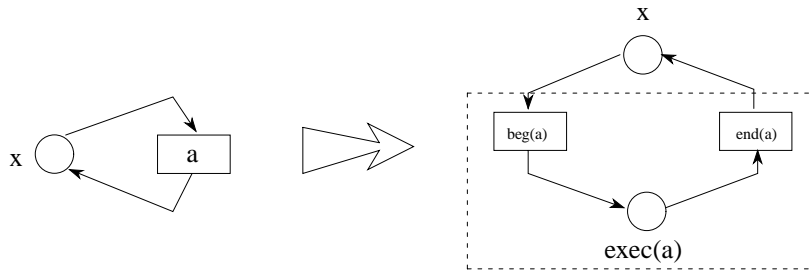


FIG. 5.8 – transformation d'un réseau avec condition de bord en réseau pur par scindage d'événements

dimension supérieure donnant le graphe de marquage concurrent du réseau de départ (voir la figure 5.9). De plus

**Proposition 5.5.7 ([3])** *Un système de transitions asynchrone est comportement d'un réseau de Petri sauf (c'est à dire vérifie les propriétés de séparation vis à vis de ses conditions) si, et seulement si, sa discrétisation est le graphe de marquage d'un réseau élémentaire (i.e. est séparé par régions). De façon analogue un automate par pas est le comportement d'un réseau de Petri (i.e. est séparé par conditions généralisées) si, et seulement si, sa discrétisation est le graphe de marquage d'un réseau de Petri pur (i.e. est séparé par régions généralisées).*

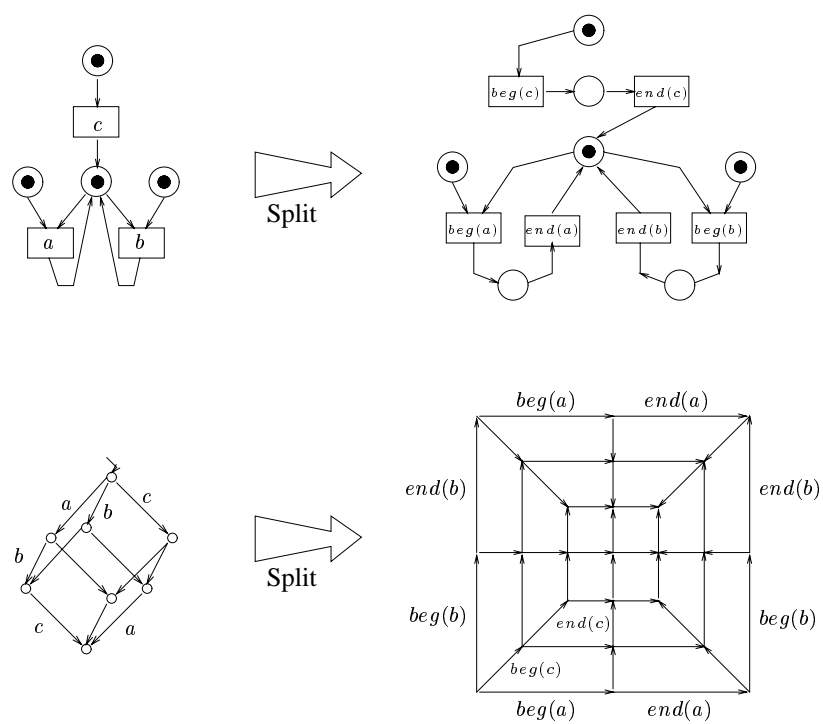


FIG. 5.9 – le graphe de marquage du réseau scindé comme la discrétisation de l'automate de dimension supérieure associé au réseau de départ

## Chapitre 6

# Conclusion

Mentionnons d'abord quelques résultats qui n'ont pas été présentés dans ce document. L'algorithme polynomial de [6] présenté dans la section 4.2.4, a été adapté à la synthèse de réseaux de Petri à partir de leurs graphes de marquage séquentiels ou parallèles [12], à la synthèse de réseaux de Petri à partir de langages [6, 33] et à la synthèse de réseaux de Petri stratifiés [13] qui sont une forme particulière des réseaux auto-modifiants de Valk [103, 104]. Dans l'article de synthèse [14] nous indiquons quelques connexions entre la théorie des régions et la représentation des graphes par leur coupes (cutsets) sur laquelle repose la synthèse des graphes marqués [71]. On y donne aussi une classification des réseaux saufs, c'est à dire des réseaux ayant une représentation ensembliste (les états locaux sont 0 et 1), parmi lesquels on trouve, en dehors des réseaux élémentaires, les *trace nets* de [8, 9] (ou leurs équivalents, les *chart nets* [63]) et les *flip flop nets* de [92].

La théorie des régions a trouvé jusqu'ici deux domaines d'applications : le problème de codage des états pour les circuits asynchrones où les régions élémentaires sont utilisées [30] et la distribution de protocoles qui est quant à elle basée sur le calcul des régions généralisées [28]. On peut songer à utiliser les régions pour synthétiser des contrôleurs distribués pour des systèmes à événements discrets et à utiliser la synthèse de réseaux de Petri stratifiés pour l'analyse des systèmes coopératifs dans le but d'identifier leurs divers modes opératoires.

Un autre but de recherche est de considérer des variantes du problème de synthèse dans lesquelles des systèmes parallèles sont dérivés à partir de spécifications données par des langages ou par des ensembles de formules logiques plutôt que par des automates. En particulier il peut être intéressant de pouvoir synthétiser des réseaux à partir de spécifications partielles. Dans cette direction [33] décrit un algorithme qui décide s'il existe un réseau dont le langage contient un langage rationnel donné qui exprime des exigences de service et qui est disjoint d'un autre langage rationnel donné qui exprime des conditions de sécurité.

La correspondance entre réseaux et automates illustre la nature duale des systèmes à événements discrets dans lesquels un événement peut être décrit de façon extensionnelle par une relation de transition ou de façon intensionnelle par les altérations des propriétés du système liées à l'occurrence de cet événement. Il est alors tentant de voir les marquages comme des théories complètes pour une algèbre logique données par les places. Il est par

exemple montré dans [20] que l'ensemble des régions d'un système de transitions élémentaire ordonné par inclusion est un treillis orthomodulaire dont les ultrafiltres correspondent aux marquages. Ceci est similaire à la *logic of theory change* [1] dans laquelle un état est décrit comme une théorie maximale cohérente (l'analogue des ultrafiltres), et un changement est vu comme une modification des propriétés et est traité par une fonction de révision sur les théories : une théorie est amendée pour prendre en compte les propositions qui ont été validées ou invalidées par l'occurrence de l'événement.

Dans ce document nous avons décrit la dualité entre réseaux et automates fondée sur la théorie des régions. Nous avons également indiqué un théorème de représentation pour les automates réversibles et nous avons observé que ce résultat mettait en jeu des conditions analogues aux deux propriétés de séparation. Ce fait n'est évidemment pas accidentel : même si la théorie des régions concerne essentiellement la synthèse de réseaux de Petri, des applications sont tout à fait envisageables pour diverses classes d'automates "locaux", c'est à dire dans lesquels les états sont des vecteurs d'*états locaux* et qui sont tels que l'occurrence d'un événement est liée à des conditions locales du système et ne modifie que localement l'état du système. Par exemple, les deux propriétés de séparation apparaissent dans [69] pour caractériser les automates parallèles isomorphes au produit synchrone de certaines de leurs composantes séquentielles.

---

# Bibliographie

- [1] ALCHOURRÓN, C.E., GÄRDENFORS, P., and MAKINSON, D., *On the Logic of Theory Change: Partial Meet Contraction and Revision Functions*. The Journal of Symbolic Logic, volume 50, Number 2 (1985) 510–530.
- [2] BADOUEL, E., *Models of concurrency*. Fifth European Summer School in Logic Language and Information, Faculdade de Letras, Universidade de Lisboa, 1993.
- [3] BADOUEL, E., *Splitting of Actions, Higher-Dimensional Automata and Net Synthesis*. Inria Research Report No 3013 (1996).
- [4] BADOUEL, E., *Réseaux de Petri à structure dynamique*. Ecole d'été MOVEP (modélisation et vérification des processus parallèles), Nantes (juillet 1998).
- [5] BADOUEL, E., *Representations of Reversible Automata and State Graphs of Vector Addition Systems*. Inria Research Report no 3490 (1998).
- [6] BADOUEL, E., BERNARDINELLO, L. and DARONDEAU, PH., *Polynomial algorithms for the synthesis of bounded nets*, Proceedings Caap 95, Lecture Notes in Computer Science 915 (1995) 647–679.
- [7] BADOUEL, E., BERNARDINELLO, L. and DARONDEAU, PH., *The synthesis problem for elementary net systems is NP-complete*, Theoretical Computer Science 186 (1997) 107–134.
- [8] BADOUEL, E., and DARONDEAU, PH., *Trace Nets*. REX workshop, Beekbergen “Semantics: Foundation and Applications”, Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science, vol. 666 (1993) 21–50.
- [9] BADOUEL, E., and DARONDEAU, PH., *Trace nets and process automata*, Acta Informatica 32 (1995) 647–679.
- [10] BADOUEL, E., and DARONDEAU, PH., *Dualities between Nets and Automata induced by Schizophrenic Objects*, 6<sup>th</sup> International Conference on Category Theory and Computer Science, Cambridge, volume 953 of Lecture Notes in Computer Science (1995) 24–43.
- [11] BADOUEL, E., and DARONDEAU, PH., *A Survey on Net Synthesis*, Proceedings of CESA'96 IMACS Multi-conference, Lille, France (1996)
- [12] BADOUEL, E., and DARONDEAU, PH., *On the Synthesis of General Petri Nets*. Inria Research Report No 3025 (1996).
- [13] BADOUEL, E., and DARONDEAU, PH., *Stratified Petri Nets*. Proceedings of FCT'97, volume 1279 of Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag (1997) 117–128.
- [14] BADOUEL, E., and DARONDEAU, PH., *Theory of Regions*. Third Advance Course on Petri Nets, Dagstuhl Castle. Volume 1491 of Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science (1998) 529–586.
- [15] BADOUEL, E., DARONDEAU, PH., and RAOULT, J.-C., *Context-Free Event Domains are Recognizable*. Proceedings Amast 95 (Algebraic Methodology and Software Technology), Montréal. volume 936 of Lecture Notes in Computer Science (1995) 214–229. To appear in *Information and Computation*.
- [16] BADOUEL, E., and OLIVER, J., *Reconfigurable Nets, A Class of High Level Petri Nets Supporting Dynamic Changes*. Proceedings of the workshop *Workflow Management: Net-based Concepts, Models, Techniques and Tools*, Lisbon (1998).
- [17] BARWISE, J., and SELIGMAN, J., *Information Flow, the Logic of Distributed Systems*. Cambridge Tracts in Computer Science 44, Cambridge University Press (1997).
- [18] BEDNARCZYK, M. A., *Categories of Asynchronous Systems*. Ph. D. Thesis, University of Sussex (1988).
- [19] BERNARDINELLO, L., *Synthesis of Net Systems*. Application and Theory of Petri Nets, Lecture Notes in Computer Science 691 (1993) 89–105.

- 
- [20] BERNARDINELLO, L., *Propriétés algébriques et combinatoires des régions dans les graphes, et leurs applications à la synthèse de réseaux*. Thèse Université de Rennes I (1998).
- [21] BERNARDINELLO, L., DE MICHELIS, G., PETRUNI, K., and VIGNA, S., *On the Synchronic Structure of Transition Systems*, in J. Desel (Ed.), *Structures in Concurrency Theory (STRICT)*, May 1995, Springer (1996) 11–31.
- [22] BERTHELOT, G., *Transformations and Decomposition of Nets*. In [24] 359–376.
- [23] BIRKHOFF, G.D., *Lattice Theory*. Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, R.I. (1940).
- [24] BRAUER, W., REISIG, W., and ROZENBERG, G., (eds): *Petri Nets: Central Models and their Properties, Advances in Petri Nets 1986, Part I*, Lecture Notes in Computer Science vol. 254 (1987)
- [25] BRYANT, R., *Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation*. IEEE Transactions on Computers, vol. C-35, no. 8 (1986) 677–691.
- [26] BRYANT, R., *Symbolic boolean manipulation with ordered binary decision diagrams*. ACM Computing Surveys, vol. 24, no. 3 (1992) 293–318.
- [27] BUSI, N., and PINNA, G.M., *Synthesis of nets with inhibitor arcs*. Proceedings of Concur'97, Lecture Notes in Computer Science vol. 1243 (1997), 151–165.
- [28] CAILLAUD, B., SYNET: *un outil de synthèse de réseaux de Petri bornés, applications* Irisa Research Report no 1101 (1997).
- [29] CORTADELLA, J., KISHINEVSKY, M., LAVAGNO, L., and YAKOVLEV, A., *Synthesizing Petri Nets from State-Based Models*. Proceedings of ICCAD'95 (1995) 164–171.
- [30] CORTADELLA, J., KISHINEVSKY, M., KONDRATYEV, A., LAVAGNO, L., and YAKOVLEV, A., *Complete state encoding based on the theory of regions*. Proceedings of the 2nd International Workshop on Advanced Research in Asynchronous Circuits and Systems (1996) 36–47.
- [31] CHAND, D.R., and KAPUR, S.S., *An algorithm for convex polytopes*. Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 17, No 1 (1970) 78–86.
- [32] CHOU, T.J., and COLLINS, G.E., *Algorithms for the solution of systems of linear Diophantine equations*, SIAM Journal of Computing, 11 (1982) 687–708.
- [33] DARONDEAU, PH., *Deriving unbounded Petri nets from formal languages*. Proceedings of CONCUR'98, Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science Vol. 1466 (1998) 533–548.
- [34] DAVEY, B.A., and PRIESTLEY, H.A., *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, (1990).
- [35] DESROCHERS, A.A., and AL-JAAR, R., *Applications of Petri Nets in Manufacturing Systems. Modeling, Control, and Performance Analysis*. IEEE Press, New York (1995).
- [36] DESEL, J., and ESPARZA, J., *Free Choice Petri Nets*. Volume 40 of Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press (1995).
- [37] DESEL, J., REISIG, W., *The Synthesis Problem of Petri Nets*. Acta Informatica vol. 33 (1996) 297–315.
- [38] DROSTE, M., and SHORTT, R.M., *Petri Nets and Automata with Concurrency Relations – an Adjunction*. in "Semantics of Programming Languages and Model Theory", M. Droste and Y. Gurevich eds(1993) 69–87.
- [39] DROSTE, M., and SHORTT, R.M., *From Petri Nets to Automata with Concurrency*. Unpublished draft (1996).
- [40] EDELSBRUNNER, H., *Algorithms in Combinatorial Geometry*. EATCS Monographs in Theoretical Computer Science vol. 10, Springer, Heidelberg (1987).
- [41] EDELSBRUNNER, H., *Geometric Algorithms*. In P.M. Gruber and J.M. Wills (Eds.) Handbook of Convex Geometry vol. A, North-Holland (1993) 699–735.
- [42] EHRENFUCHT, A., and ROZENBERG, G., *Partial 2-structures ; Part I: Basic Notions and the Representation Problem*, Acta Informatica, vol. 27 (1990) 315–342.
- [43] EHRENFUCHT, A., and ROZENBERG, G., *Partial 2-structures ; Part II: State Spaces of Concurrent Systems*, Acta Informatica, vol. 27 (1990) 343–368.
- [44] FERIGATO, C., *Note su Alcune Proprietà Algebriche, Logiche e Topologiche della Concorrenza*. Dottorato di Ricerca in Informatica, Roma (1996).
- [45] FUCHS, L., *Infinite Abelian Groups*, Academic Press (1970).
- [46] GAREY, M.R., and JOHNSON, D.S., *Computer and Intractability. A guide to the theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman and Company (1979).

- 
- [47] VAN GLABBEEK, R., *Bisimulation Semantics for Higher Dimensional Automata*. Technical report, Stanford University (1991).
- [48] VAN GLABBEEK, R., and VAANDRAGER, F., *Petri net models for algebraic theories of concurrency*. In Proceedings PARLE'87, vol. II: Parallel Languages, Eindhoven, volume 259 of Lecture Notes in Computer Science (1987) 224–242.
- [49] GOUBAULT, E., *The Geometry of Concurrency*. Ph. D. Thesis, Ecole Normale Supérieure, Paris (1995).
- [50] GROSS, J.L., and TUCKER, T.W., *Topological Graph Theory*, Wiley-Interscience, New York (1987).
- [51] HALL, M. JR. *Subgroups of finite index in free groups*. Canadian J. Math. (1), (1949) 187–190.
- [52] HERWIG, B., *Extending partial isomorphisms on finite structures*, *Combinatorica* 15 (1995) 365–371.
- [53] HERWIG, B., and LASCAR, D., *Extending partial automorphism and the profinite topology on the free groups*. Draft (1997).
- [54] HIRAIISHI, K., *Some complexity results on transition systems and elementary net systems*. *Theoretical Computer Science* 135 (1994) 361–376.
- [55] HOOGERS, P.W., KLEIJN, H.C.M., and THIAGARAJAN, P.S., *A Trace Semantics for Petri Nets*. *Lecture Notes in Computer Science* vol. 623 (1992) 595–604.
- [56] HOOGERS, P.W., KLEIJN, H.C.M., and THIAGARAJAN, P.S., *An Event Structure Semantics for General Petri Nets*. *Theoretical Computer Science*, volume 153 (1996) 129–170.
- [57] HRUSHOVSKI, E. *Extending partial isomorphisms of graphs*, *Combinatorica* 12 (1992) 204–218.
- [58] ILIOPOULOS, C.S., *Worst-case complexity bounds on algorithms for computing the canonical structure of finite abelian groups and the Hermite and Smith normal forms of an integer matrix*. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 18, No 4 (1989) 658–669.
- [59] JENSEN, K., *Coloured Petri Nets. Basic Concepts, Analysis Methods and Practical Use, Volume 1, Basic Concepts*. EATCS-Monographs, Springer Verlag (1992).
- [60] JOHNSTONE, P.T., *Stone Spaces*. Cambridge University Press, (1982).
- [61] KANNAN, R., and BACHEM, A., *Polynomial Algorithms for Computing the Smith and Hermite Normal Forms of an Integer Matrix*. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 8, No 4 (1979) 499–507.
- [62] KARP, R.M., and MILLER, R.E., *Parallel program schemata*. *Journal of Computer and System Sciences* vol. 3 (1969) 147–195.
- [63] KISHINEVSKY, M., CORTADELLA, J., KONDRATYEV, A., LAVAGNO, L., TAUBIN, A., and YAKOVLEV, A., *Place Chart Nets and their Synthesis*. Technical Report 96-2-003 Department of Computer Hardware, University of Aizu (1996).
- [64] KISHINEVSKY, M., CORTADELLA, J., KONDRATYEV, A., LAVAGNO, L., and YAKOVLEV, A., *Synthesis of General Petri Nets*. Technical Report 96-2-004, Department of Computer Hardware, University of Aizu (1996).
- [65] LYNDON, R.C., and SCHUPP, P.E., *Combinatorial Group Theory*. *Ergebnisse* Vol. 89, Springer (1977).
- [66] MAGNUS, W., KARRASS, A., and SOLITAR, D., *Combinatorial Group Theory*. Wiley, New York (1966).
- [67] MARCUS, M., and MINC, H., *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*. Dover Publications, New York (1992).
- [68] MEMMI, G., and ROUCAIROL, G., *Linear algebra in net theory*. *Proceedings of Net Theory and Applications*, volume 84 of the *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Verlag (1980) 213–223.
- [69] MORIN, R., *Catégories de modèles du parallélisme*. Thèse de l'Université Paris XIII (1999).
- [70] MUKUND, M., *Petri Nets and Step Transition Systems*. *International Journal of Foundation of Computer Science*, vol 3, n° 4 (1992) 443–478.
- [71] MURATA, T., *Circuit Theoretic Analysis and Synthesis of Marked Graphs*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-24, No. 7 (1977) 400–405.
- [72] MURATA, T., *Petri Nets: Properties, Analysis and Applications*. *Proceeding of the IEEE*, 77(4) (1989) 541–580.
- [73] NIELSEN, M., ROZENBERG, G., AND THIAGARAJAN, P.S., *Elementary Transition Systems*. *Theoretical Computer Science*, vol. 96 (1992) 3–33.
- [74] NIELSEN, M., ROZENBERG, G., AND THIAGARAJAN, P.S., *Transition Systems, Event Structures and Unfoldings*. DAIMI PB-353 Aarhus (1991).
- [75] NIELSEN, M., ROZENBERG, G., AND THIAGARAJAN, P.S., *Elementary Transition Systems and Refinement*. *Acta Informatica* 29 (1992) 555–578.

- [76] NIELSEN, M., and WINSKEL, G., *Models for Concurrency*, Handbook of Logic for Computer Science, vol. 3, Oxford University Press (1994) 100–200. Appeared also as Research Report DAIMI PB-463, Aarhus University, November 1993.
- [77] PETERSON, J.L., *Petri Net Theory and the Modelling of Systems*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall (1981).
- [78] PETRI, C. A., *Kommunikation mit Automaten*, Schriften des IIM Nr. 2, Institut für Instrumentelle Mathematik, Bonn (1962). *English translation*: Technical Report RADC-TR-65-377, Griffiths Air Force Base, New York, vol. 1, suppl. 1 (1966).
- [79] PETRI NETS TOOL DATABASE, CPN group at University of Aarhus, Denmark, <http://www.daimi.au.dk/PetriNets/tools/>
- [80] PETRI NET MAILING LIST, CPN group at University of Aarhus, Denmark, <http://www.daimi.au.dk/petri-net/>
- [81] PETRICH, M., *Inverse Semigroups*, Wiley, New York (1984).
- [82] PIETKIEWICZ-KOUTNY, M., *Transition systems of elementary net systems with inhibitor arcs*. Proceedings of ICATPN'97. Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science Vol. 1248 (1997) 310–327.
- [83] PIETKIEWICZ-KOUTNY, M., *Synthesis of ENI-systems Using Minimal regions*. Proceedings of CONCUR'98, Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science Vol. 1466 (1998) 565–580.
- [84] PORST, H.-E., and THOLEN, W., *Concrete Dualities*. In “Category Theory at Work”, H. Herrlich, and H.-E. Porst (eds.), Heldermann Verlag Berlin (1991) 111–136.
- [85] PRATT, V.R., *The Stone Gamut: A Coordinatization of Mathematics*, Proceedings of the 10<sup>th</sup> Symposium on Logics in Computer Science, IEEE Computer Society (1995) 444–454.
- [86] PRATT, V., *Modelling Concurrency with Geometry*. Proceedings of the 18<sup>th</sup> ACM Symposium on Principles of Programming Languages, Orlando, ACM Press (1991) 311–322.
- [87] RAYWARD-SMITH, V.J., *On computing the Smith normal form of an integer matrix*. ACM Transaction on Mathematical Software, Vol. 5. No 4 (1979) 451–456.
- [88] REISIG, W., *Petri Nets*. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, Vol. 4, Springer Verlag (1985).
- [89] REISIG, W., *Elements of Distributed Algorithms, Modeling and Analysis with Petri Nets*. Springer (1998).
- [90] REUTENAUER, CH., *Aspects mathématiques des réseaux de Petri*. Masson, Paris (1989). English translation by I. Craig: *The Mathematics of Petri Nets*. Prentice-Hall, New York (1990).
- [91] SANCHEZ-LEIGHTON, V., *Quelques relations entre les réseaux de Petri, la logique dynamique et les méthodes de la sémantique dénotationnelle*. Thèse de l'Université de Paris 6 (1983).
- [92] SCHMITT, V., *Flip-Flop Nets*, Proceedings of Stacs 96, Lecture Notes in Computer Science vol. 1046 (1996) 517–528.
- [93] SCHMITT, V., *Représentations finies de comportements concurrents*. Thèse de l'Université de Rennes I (1997).
- [94] SCHRJVER, A., *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley (1986).
- [95] SEIDEL, R., *Constructing Higher-Dimensional Convex Hulls at Logarithmic Cost per Face*. Proceedings Annual ACM Symposium on Theory of Computing 18 (1986) 404–413.
- [96] SHIELDS, M.W., *Concurrent machines*, Computer Journal, vol. 28 (1985) 449–465.
- [97] SHIELDS, M.W., *Deterministic asynchronous automata*. In *Formal Methods in Programming*, North Holland (1985).
- [98] SILVA, M., and COLOM, J.M., *On the Computation of Structural Synchronic Invariants in P/T nets*. In “Advances in Petri Nets 1988”, G. Rozenberg (Ed.), volume 340 of Springer Verlag Lecture Notes in Computer Science (1988) 386–417.
- [99] SILVA, M., TERUEL, E., and COLOM, J.M., *Linear Algebraic Techniques for the Analysis of Net Systems*. Third Advance Course on Petri Nets, Dagstuhl Castle. To appear in the Lecture Notes in Computer Science (1997).
- [100] STALLINGS, J.R., *Topology of Finite Graphs*. Inventiones Mathematicae. 71 (1983) 551–565.
- [101] STILLWELL, J., *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer Verlag, New York (1980).
- [102] SWART, G., *Finding the Convex Hull Facet by Facet*. Journal of Algorithm 6 (1985) 17–48.
- [103] VALK, R., *Self-Modifying Nets, a Natural Extension of Petri Nets*. Proceedings of Icalp'78, Lecture Notes in Computer Science vol. 62 (1978) 464–476.



- 
- [104] VALK, R., *Generalizations of Petri Nets*. Proceedings of MFCS'81, Lecture Notes in Computer Science vol. 118 (1981) 140–155.
- [105] VICKERS, S., *Topology via Logic*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 5, (1989) Cambridge University Press.
- [106] WILLE, R., *Restructuring Lattice Theory: an Approach based on Hierarchies of Concepts*. In I. Rival (ed.) *Ordered Sets*, NATO ASI Series 83, Reidel, Dordrecht (1982) 445–470.