École Nationale Supérieure de Techniques Avancées
module : Commande des Systèmes

examen du cours B7–1
"Filtrage bayésien et approximation particulaire"

mercredi 16 octobre 2013, 8:30 à 10:00

Problème

L'objectif de ce problème est de montrer que les estimations de l'erreur d'approximation particulaire obtenues dans le cours pour des fonctions bornées, peuvent également être établies pour certaines classes de fonctions non–nécessairement bornées.

On rappelle que les distributions non–normalisées vérifient la relation de récurrence suivante

$$\gamma_k = \gamma_{k-1} \, R_k = g_k \; (\gamma_{k-1} \, Q_k)$$

et les approximations particulaires proposées sont définies par

$$\gamma_k^N = g_k \, \eta_k^N \; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

avec la distribution empirique

$$\eta_k^N = S^N(\mu_{k-1}^N \, Q_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_k^i} \; ,$$

où conditionnellement par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{k-1}^N$ engendrée par les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$–ème génération, les v.a. $(\xi_k^1, \cdots, \xi_k^N)$ sont i.i.d. de distribution commune $\mu_{k-1}^N \, Q_k$. Pour tout $k = 1, \cdots, n$, on rappelle que

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \, \phi) \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \qquad (\star)$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée.

Soit V une fonction à valeurs dans $[1, \infty)$, et soit $\mathcal{A}_V$ l'ensemble des fonctions ϕ mesurables, non–nécessairement bornées, mais telles que la fonction $\dfrac{\phi}{V}$ soit bornée. On définit la norme $\| \cdot \|_V$ par $\displaystyle \|\phi\|_V = \sup_{x \in E} \frac{|\phi(x)|}{V(x)} = \| \frac{\phi}{V} \|$ pour tout $\phi \in \mathcal{A}_V$.

On suppose que la fonction V est une fonction de Lyapunov dans le sens suivant : pour tout $k = 1, \cdots, n$, il existe une constante $L_k > 0$ telle que

$$Q_k\, V(x) = \int_E Q_k(x, dx')\, V(x') \leq L_k\, V(x) \ ,$$

pour tout $x \in E$.

(i) **Montrer que, si la fonction ϕ appartient à $\mathcal{A}_V$, alors la fonction $Q_k(g_k\, \phi)$ aussi appartient à $\mathcal{A}_V$, et $\|Q_k(g_k\, \phi)\|_V \leq \sup_{x \in E} g_k(x)\ L_k\ \|\phi\|_V$.**

Solution

Si la fonction ϕ appartient à $\mathcal{A}_V$, alors on remarque que

$$\begin{aligned} |Q_k(g_k\, \phi)(x)| &= |\int_E Q_k(x, dx')\ g_k(x')\, \phi(x')\,| \\ &\leq \sup_{x \in E} g_k(x)\ \|\phi\|_V\ \int_E Q_k(x, dx')\ V(x') \\ &\leq \sup_{x \in E} g_k(x)\ L_k\ \|\phi\|_V\ V(x)\ , \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{|Q_k(g_k\, \phi)(x)|}{V(x)} \leq \sup_{x \in E} g_k(x)\ L_k\ \|\phi\|_V\ ,$$

pour tout $x \in E$, c'est–à–dire que la fonction $Q_k(g_k\, \phi)$ aussi appartient à $\mathcal{A}_V$, et

$$\|Q_k(g_k\, \phi)\|_V = \sup_{x \in E} \frac{|Q_k(g_k\, \phi)(x)|}{V(x)} \leq \sup_{x \in E} g_k(x)\ L_k\ \|\phi\|_V\ .$$

□

(ii) **Montrer (par exemple par récurrence) que, si la fonction de Lyapunov V est intégrable par rapport à la distribution initiale η_0, alors elle est intégrable par rapport aux distributions non–normalisées γ_k et par rapport aux distributions η_k et μ_k, pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$.**

En déduire que toute fonction ϕ appartenant à $\mathcal{A}_V$ est intégrable par rapport aux distributions non–normalisées γ_k et par rapport aux distributions η_k et μ_k, pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$.

En déduire que la relation $(\star)$ est vérifiée aussi pour toute fonction ϕ appartenant à $\mathcal{A}_V$.

Solution

Pour $k=0$

$$\langle \gamma_0, V \rangle = \langle \eta_0, g_0\, V \rangle \leq \sup_{x \in E} g_0(x)\ \langle \eta_0, V \rangle\ ,$$

et pour tout $k=1,\cdots,n$

$$\langle \gamma_k, V \rangle = \langle \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\, V)\, \rangle \leq \sup_{x \in E} g_k(x)\ L_k\ \langle \gamma_{k-1}, V \rangle\ .$$

Pour $k=0$

$$\langle \mu_0, V \rangle = \frac{\langle \eta_0, g_0\, V \rangle}{\langle \eta_0, g_0 \rangle} \leq \frac{\sup_{x \in E} g_0(x)}{\langle \eta_0, g_0 \rangle}\ \langle \eta_0, V \rangle = r_0\ \langle \eta_0, V \rangle\ ,$$

et pour tout $k=1,\cdots,n$

$$\langle \eta_k, V \rangle = \langle \mu_{k-1}, Q_k\, V \rangle \leq L_k\ \langle \mu_{k-1}, V \rangle\ ,$$

et

$$\langle \mu_k, V \rangle = \frac{\langle \eta_k, g_k\, V \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \leq \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle}\ \langle \eta_k, V \rangle = r_k\ \langle \eta_k, V \rangle\ .$$

Si la fonction ϕ appartient à $\mathcal{A}_V$, et si la fonction de Lyapunov V est intégrable par rapport à une distribution (normalisée ou pas) notée κ, alors

$$|\, \langle \kappa, \phi \rangle \,| \leq \langle \kappa, |\phi| \rangle \leq \|\phi\|_V\ \langle \kappa, V \rangle < \infty\ ,$$

c'est–à–dire que la fonction ϕ aussi est intégrable par rapport à la distribution κ. Il suffit alors d'appliquer cette simple observation avec $\kappa = \gamma_k$, avec $\kappa = \eta_k$ ou avec $\kappa = \mu_k$, pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$.

$\square$

(iii) **Montrer (par exemple par récurrence) que l'approximation particulaire des distributions non–normalisées est non–biaisée, i.e. $\mathbb{E}\langle \gamma_k^N, \phi \rangle = \langle \gamma_k, \phi \rangle$ pour toute fonction ϕ appartenant à $\mathcal{A}_V$.**

Solution

Par définition

$$\langle \gamma_0^N, \phi \rangle = \langle \eta_0^N, g_0\, \phi \rangle\ ,$$

de sorte que

$$\mathbb{E}\langle \gamma_0^N, \phi \rangle = \langle \eta_0, g_0\, \phi \rangle = \langle \gamma_0, 1 \rangle\ ,$$

c'est–à–dire que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang 0.

On suppose que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $(k-1)$. Par définition

$$\langle \gamma_k^N, \phi \rangle = \langle \eta_k^N, g_k\, \phi \rangle \; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \ ,$$

de sorte que, conditionnellement par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{k-1}^N$ engendrée par les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$–ème génération

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\, \langle \gamma_k^N, \phi \rangle \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \; &= \; \mathbb{E}[\, \langle \eta_k^N, g_k\, \phi \rangle \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \\
&= \; \langle \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle \; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \\
&= \; \langle \gamma_{k-1}^N, Q_k(g_k\, \phi)\, \rangle \ ,
\end{aligned}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence au rang $(k-1)$

$$\mathbb{E} \langle \gamma_k^N, \phi \rangle = \mathbb{E} \langle \gamma_{k-1}^N, Q_k(g_k\, \phi)\, \rangle = \langle \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\, \phi)\, \rangle = \langle \gamma_k\, \phi \rangle \ ,$$

c'est–à–dire que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang k.

$\square$

On suppose que la fonction V^2 aussi est une fonction de Lyapunov dans le sens suivant

$$Q_k\, V^2(x) = \int_E Q_k(x, dx')\, V^2(x') \leq L_k^{(2)}\; V^2(x)$$

(iv) **Montrer (par exemple par récurrence) que, si la fonction de Lyapunov V^2 est intégrable par rapport à la distribution initiale η_0, alors elle est intégrable par rapport aux distributions η_k et μ_k, pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$.**

Solution

Pour $k = 0$

$$\langle \mu_0, V^2 \rangle = \frac{\langle \eta_0, g_0\, V^2 \rangle}{\langle \eta_0, g_0 \rangle} \leq \frac{\sup\limits_{x \in E} g_0(x)}{\langle \eta_0, g_0 \rangle} \; \langle \eta_0, V^2 \rangle = r_0 \; \langle \eta_0, V^2 \rangle \ ,$$

et pour tout $k = 1, \cdots, n$

$$\langle \eta_k, V^2 \rangle = \langle \mu_{k-1}, Q_k\, V^2 \rangle \leq L_k^{(2)} \; \langle \mu_{k-1}, V^2 \rangle \ ,$$

et

$$\langle \mu_k, V^2 \rangle = \frac{\langle \eta_k, g_k\, V^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \leq \frac{\sup\limits_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \; \langle \eta_k, V^2 \rangle = r_k \; \langle \eta_k, V^2 \rangle \ .$$

On peut en déduire par exemple la relation de récurrence suivante

$$\langle \mu_k, V^2 \rangle \leq r_k \; \langle \eta_k, V^2 \rangle \leq r_k \; L_k^{(2)} \; \langle \mu_{k-1}, V^2 \rangle \ .$$

$\square$

Il est maintenant possible de suivre les étapes de la démonstration vue en cours dans le cas plus simple des fonctions bornées, et d'obtenir des estimations de l'erreur d'approximation particulaire dans le cas plus général des fonctions appartenant à $\mathcal{A}_V$.

(v) **Montrer (par exemple par récurrence, et en suivant les étapes de la démonstration vue en cours dans le cas plus simple des fonctions bornées) que**

$$\sup_{\phi\,:\,\|\phi\|_V=1} \mathbb{E}|\, \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} \,| \leq z_k^N \ ,$$

où la suite $\{z_k^N\}$ vérifie la relation de récurrence suivante

$$z_k^N \leq r_k\ L_k\ z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}}\ \langle \eta_k, V^2 \rangle^{1/2} \qquad \textbf{et} \qquad z_0^N \leq \frac{r_0}{\sqrt{N}}\ \langle \eta_0, V^2 \rangle^{1/2} \ .$$

Solution

Pour $k = 0$, on rappelle que

$$\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi \rangle = \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0\, \phi \rangle \ ,$$

pour toute fonction ϕ appartenant à $\mathcal{A}_V$, et on remarque que

$$\mathbb{E}|\, \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0\, \phi \rangle \,| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\ (\, \mathrm{var}(g_0\, \phi, \eta_0)\,)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\ \sup_{x \in E} g_0(x)\ \|\phi\|_V\ \langle \eta_0, V^2 \rangle^{1/2} \ ,$$

et en divisant par $\langle \gamma_0, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 \rangle$ on obtient

$$z_0^N = \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|_V=1} \mathbb{E}|\, \frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi \rangle}{\langle \gamma_0, 1 \rangle} \,| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\ \frac{\sup_{x \in E} g_0(x)}{\langle \eta_0, g_0 \rangle}\ \langle \eta_0, V^2 \rangle^{1/2} = \frac{r_0}{\sqrt{N}}\ \langle \eta_0, V^2 \rangle^{1/2} \ .$$

Pour tout $k = 1, \cdots, n$, on rappelle que

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\, \phi) \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle\ \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \ ,$$

pour toute fonction ϕ appartenant à $\mathcal{A}_V$, et il résulte de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|_V=1} \mathbb{E}|\, \langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle \,| \ \leq & \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|_V=1} \mathbb{E}|\, \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\, \phi) \rangle \,| \\ & + \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|_V=1} \mathbb{E}[\, |\, \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle \,|\ \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \,] \ . \end{aligned}$$

En utilisant le résultat obtenu à la question (i), on remarque que

$$\sup_{\phi\,:\,\|\phi\|_V=1} \mathbb{E}|\, \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\, \phi) \rangle \,| \leq \sup_{x \in E} g_k(x)\ L_k \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|_V=1} \mathbb{E}|\, \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi \rangle \,| \ ,$$

et en divisant par $\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle\ \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$ on obtient

$$\begin{aligned} z_k^N \ = & \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|_V=1} \mathbb{E}|\, \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} \,| \\ \leq & \ \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle}\ L_k \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|_V=1} \mathbb{E}|\, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \,| \\ & + \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|_V=1} \mathbb{E}|\, \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle\ \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle\ \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \,| \ , \end{aligned}$$

i.e.

$$z_k^N \leq r_k \; L_k \; z_{k-1}^N + \varepsilon_k^N \; . \tag{$\bullet$}$$

Il suffit à présent de controler l'erreur locale, définie par

$$\varepsilon_k^N = \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|_V = 1} \mathbb{E}| \, \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \; \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \, | \; ,$$

et on remarque que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\, | \, \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \, | \mid \mathcal{F}_{k-1}^N \,] \; &\leq \; \frac{1}{\sqrt{N}} \; (\, \mathrm{var}(g_k \, \phi, \mu_{k-1}^N \, Q_k) \,)^{1/2} \\ &\leq \; \frac{1}{\sqrt{N}} \; \sup_{x \in E} g_k(x) \; \|\phi\|_V \; \langle \mu_{k-1}^N \, Q_k, V^2 \rangle^{1/2} \; , \end{aligned}$$

où $\mathcal{F}_{k-1}^N$ dénote la tribu engendrée par les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$–ème génération, puis

- en multipliant par $\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{k-1}^N$,
- et en divisant par $\langle \eta_k, g_k \rangle \; \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$,

on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\, | \, \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \; \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \, | \mid \mathcal{F}_{k-1}^N \,] \\ &\qquad \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \; \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \; \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \; \|\phi\|_V \; \langle \mu_{k-1}^N \, Q_k, V^2 \rangle^{1/2} \\ &\qquad = \frac{r_k}{\sqrt{N}} \; \|\phi\|_V \;\; \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^{1/2} \; \langle \gamma_{k-1}^N \, Q_k, V^2 \rangle^{1/2}}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \; . \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwartz et la propriété démontrée à la question (iii), on en déduit que

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_k^N &= \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|_V=1} \mathbb{E}|\, \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle \ \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \ \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle}\,| \\
&\leq \frac{r_k}{\sqrt{N}}\ \mathbb{E}[\, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^{1/2} \ \langle \gamma_{k-1}^N\, Q_k, V^2 \rangle^{1/2}}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle}\,] \\
&\leq \frac{r_k}{\sqrt{N}}\ \frac{[\,\mathbb{E}\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle\,]^{1/2}\ [\,\mathbb{E}\langle \gamma_{k-1}^N\, Q_k, V^2 \rangle\,]^{1/2}}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \\
&= \frac{r_k}{\sqrt{N}}\ \frac{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle^{1/2}\ \langle \gamma_{k-1}\, Q_k, V^2 \rangle^{1/2}}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \\
&= \frac{r_k}{\sqrt{N}}\ \langle \mu_{k-1}\, Q_k, V^2 \rangle^{1/2} \\
&= \frac{r_k}{\sqrt{N}}\ \langle \eta_k, V^2 \rangle^{1/2}\ ,
\end{aligned}
$$

et en reportant cette estimation dans ($\bullet$), on obtient

$$
z_k^N \leq r_k\ L_k\ z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}}\ \langle \eta_k, V^2 \rangle^{1/2}\ ,
$$

ou bien

$$
\left\{
\begin{aligned}
z_k^N &\leq r_k\ L_k\ z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}}\ (L_k^{(2)}\ c_{k-1})^{1/2}\ , \\
c_k &\leq r_k\ L_k^{(2)}\ c_{k-1}\ .
\end{aligned}
\right.
$$

$\square$