

cours SOD333

Filtrage Bayésien
et Approximation Particulaire

Démos : Localisation, Navigation et Poursuite

François Le Gland
INRIA Rennes et IRMAR

people.rennes.inria.fr/Francois.Le_Gland/ensta/

17 ou 25 septembre 2021

Systèmes non-linéaires / non-gaussiens
systèmes non-linéaires / non-gaussiens
filtrage particulière *in a nutshell*

Exemples en localisation, navigation et poursuite

Systèmes non-linéaires / non-gaussiens

évolution de l'état *caché*

$$X_k = f_k(X_{k-1}, W_k) \quad \text{avec} \quad W_k \sim p_k(dw)$$

il suffit de savoir *simuler*

$$X_0 \sim \mu_0(dx) \quad \text{et} \quad W_k \sim p_k(dw)$$

relation entre *observation* et état *caché*

$$Y_k = h_k(X_k) + V_k \quad \text{avec} \quad V_k \sim q_k(v) dv$$

il suffit de *connaître* / savoir *évaluer* la fonction de *vraisemblance*

$$g_k(x') = q_k(Y_k - h_k(x'))$$

cohérence entre un état *possible* et l'observation *réelle*, e.g.

$$g_k(x') \propto \exp\left\{-\frac{1}{2} |Y_k - h_k(x')|^2\right\}$$

objectif : estimer récursivement l'*état caché* X_k
au vu des *observations* $Y_{0:k} = (Y_0 \cdots Y_k)$

on peut montrer que le filtre bayésien

$$\mu_k(dx) = \mathbb{P}[X_k \in dx \mid Y_{0:k}]$$

(ou plus généralement une distribution de Feynman–Kac) vérifie une équation récurrente, qu'il s'agit d'approcher *numériquement*

Filtrage particulière *in a nutshell*

approximation numérique du filtre bayésien

$$\mu_k(dx) = \mathbb{P}[X_k \in dx \mid Y_{0:k}]$$

par la distribution empirique pondérée

$$\mu_k^N = \sum_{i=1}^N w_k^i \delta_{\xi_k^i} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^N w_k^i = 1$$

associée à un système de N particules, caractérisé par

les *positions* $(\xi_k^1 \cdots \xi_k^N)$ et les *poids* positifs $(w_k^1 \cdots w_k^N)$

en pratique, approximation numérique d'une moyenne conditionnelle

$$\langle \mu_k, \phi \rangle = \int \phi(x) \mu_k(dx) = \mathbb{E}[\phi(X_k) \mid Y_{0:k}]$$

par la moyenne empirique pondérée

$$\langle \mu_k^N, \phi \rangle = \int \phi(x) \mu_k^N(dx) = \sum_{i=1}^N w_k^i \phi(\xi_k^i)$$

il suffit de décrire comment poids et positions évoluent d'un pas de temps au suivant

algorithme SIR (*sampling with importance resampling*) : version de base

- ▶ rééchantillonnage : indépendamment pour tout $i = 1 \dots N$
on choisit un individu $\hat{\xi}_{k-1}^i$ au sein de la population $(\xi_{k-1}^1, \dots, \xi_{k-1}^N)$
en fonction des poids $(w_{k-1}^1, \dots, w_{k-1}^N)$
- ▶ prédiction : indépendamment pour tout $i = 1 \dots N$

$$\xi_k^i = f_k(\hat{\xi}_{k-1}^i, W_k^i) \quad \text{avec} \quad W_k^i \sim p_k(dw)$$

- ▶ correction : pour tout $i = 1 \dots N$

$$w_k^i = q_k(Y_k - h_k(\xi_k^i)) / \left[\sum_{j=1}^N q_k(Y_k - h_k(\xi_k^j)) \right]$$

si on n'effectue pas de rééchantillonnage
algorithme SIS (*sequential importance sampling*)

- ▶ prédiction : indépendamment pour tout $i = 1 \dots N$

$$\xi_k^i = f_k(\xi_{k-1}^i, W_k^i) \quad \text{avec} \quad W_k^i \sim p_k(dw)$$

- ▶ correction : pour tout $i = 1 \dots N$

$$w_k^i = w_{k-1}^i q_k(Y_k - h_k(\xi_k^i)) / \left[\sum_{j=1}^N w_{k-1}^j q_k(Y_k - h_k(\xi_k^j)) \right]$$

utilisation différente des poids dans SIR et dans SIS

on peut utiliser un rééchantillonnage adaptatif
on calcule la *taille effective* du système de particules

$$N_{\text{eff}} = 1 / \left[\sum_{i=1}^N (w_{k-1}^i)^2 \right]$$

si $N_{\text{eff}} \leq c N$ alors [comme dans SIR]

- ▶ rééchantillonnage : indépendamment pour tout $i = 1 \dots N$
on choisit un individu $\hat{\xi}_{k-1}^i$ au sein de la population $(\xi_{k-1}^1, \dots, \xi_{k-1}^N)$
en fonction des poids $(w_{k-1}^1, \dots, w_{k-1}^N)$
- ▶ prédiction : indépendamment pour tout $i = 1 \dots N$

$$\xi_k^i = f_k(\hat{\xi}_{k-1}^i, W_k^i) \quad \text{avec} \quad W_k^i \sim p_k(dw)$$

- ▶ correction : pour tout $i = 1 \dots N$

$$w_k^i = q_k(Y_k - h_k(\xi_k^i)) / \left[\sum_{j=1}^N q_k(Y_k - h_k(\xi_k^j)) \right]$$

on peut utiliser un rééchantillonnage adaptatif
on calcule la *taille effective* du système de particules

$$N_{\text{eff}} = 1 / \left[\sum_{i=1}^N (w_{k-1}^i)^2 \right]$$

si $N_{\text{eff}} > c N$ alors [comme dans SIS]

- ▶ prédiction : indépendamment pour tout $i = 1 \dots N$

$$\xi_k^i = f_k(\xi_{k-1}^i, W_k^i) \quad \text{avec} \quad W_k^i \sim p_k(dw)$$

- ▶ correction [mise-à-jour multiplicative] : pour tout $i = 1 \dots N$

$$w_k^i = w_{k-1}^i q_k(Y_k - h_k(\xi_k^i)) / \left[\sum_{j=1}^N w_{k-1}^j q_k(Y_k - h_k(\xi_k^j)) \right]$$

Systèmes non-linéaires / non-gaussiens

Exemples en localisation, navigation et poursuite

recalage altimétrique de navigation inertielle

suivi visuel par histogramme de couleur

navigation en environnement intérieur

1er exemple : recalage altimétrique de navigation inertielle

démo originale due à Fabien Campillo (INRIA, Montpellier)

financement : DGA, programme d'étude amont *NCT (nouveaux concepts pour la navigation par corrélation de terrain)*, coordination Thalès

Communications

- ▶ mesures inertielles
 - accélération linéaire et vitesse angulaire de l'avion (centrale inertielle)
- par double intégration : estimation inertielle de position et vitesse de l'avion
- ▶ modèle a priori pour l'évolution de l'erreur d'estimation inertielle
- ▶ mesures altimétriques bruitées de l'altitude de l'avion
 - par rapport au niveau de la mer (baro-altimètre)
 - au-dessus du relief (radio-altimètre)
- par différence : mesure bruitée de la hauteur du relief à la verticale de l'avion
- ▶ corrélation avec une carte numérique (MNT, modèle numérique de terrain) donnant la hauteur du relief en toute position horizontale

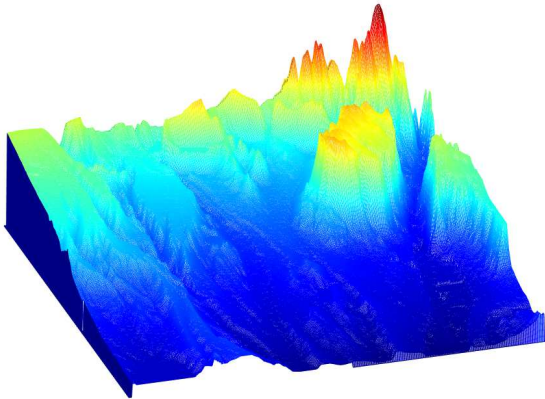


Figure: Relief 3D de la zone survolée

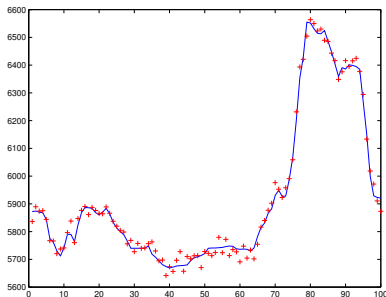
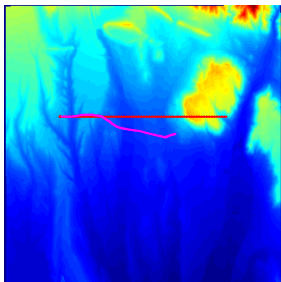


Figure: Trajectoire réelle et trajectoire estimée par intégration des mesures inertielles seules — Profil du relief survolé et mesures altimétriques bruitées

mesures inertielles bruitées : accélération de l'avion dans le plan horizontal

$$a_k^{\text{INS}} = a_k + w_k^{\text{INS}}$$

trajectoire estimée par intégration des mesures inertielle seules

$$r_k^{\text{INS}} = r_{k-1}^{\text{INS}} + \Delta_k v_{k-1}^{\text{INS}} \quad \text{et} \quad v_k^{\text{INS}} = v_{k-1}^{\text{INS}} + \Delta_k a_k^{\text{INS}}$$

variable d'état $X_k = (\delta r_k, \delta v_k)$: correction à apporter à l'estimation inertielle de la position et de la vitesse dans le plan horizontal, i.e.

$$\delta r_k = r_k - r_k^{\text{INS}} \quad \text{et} \quad \delta v_k = v_k - v_k^{\text{INS}}$$

modèle d'état : par différence (ou par linéarisation, dans un modèle plus réaliste)

$$\delta r_k = r_{k-1} + \Delta_k v_{k-1} - (r_{k-1}^{\text{INS}} + \Delta_k v_{k-1}^{\text{INS}}) = \delta r_{k-1} + \Delta_k \delta v_{k-1}$$

$$\delta v_k = v_{k-1} + \Delta_k a_k - (v_{k-1}^{\text{INS}} + \Delta_k a_k^{\text{INS}}) = \delta v_{k-1} - \Delta_k w_k^{\text{INS}}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} \delta r_k \\ \delta v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta r_{k-1} + \Delta_k \delta v_{k-1} \\ \delta v_{k-1} \end{pmatrix} - \Delta_k \begin{pmatrix} 0 \\ w_k^{\text{INS}} \end{pmatrix}$$

observation Y_k : hauteur du relief à la verticale de l'avion, obtenue par différence

- ▶ entre l'altitude de l'avion mesurée par rapport au niveau de la mer

$$z_k^{\text{BAR}} = z_k + w_k^{\text{BAR}}$$

- ▶ et l'altitude de l'avion mesurée au-dessus du relief

$$z_k^{\text{ALT}} = (z_k - h_k(X_k)) + w_k^{\text{ALT}}$$

i.e.

$$Y_k = z_k^{\text{BAR}} - z_k^{\text{ALT}} = h_k(X_k) + V_k \quad \text{avec} \quad V_k = w_k^{\text{BAR}} - w_k^{\text{ALT}}$$

relation $h_k(x)$ avec l'état caché $x = (\delta r, \delta v)$: altitude du relief (lu sur la carte numérique) à la position $r_k^{\text{INS}} + \delta r$ dans le plan horizontal
 pondération (fonction de vraisemblance) : écart entre la hauteur du relief mesurée à la verticale de l'avion, et la hauteur du relief lue sur la carte numérique

$$g_k(x) \propto q_k(Y_k - h_k(x))$$

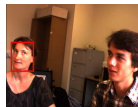
démo (mise en œuvre au 1er TP)

2ème exemple : suivi visuel par histogramme de couleur

démo due à Élise Arnaud (UJF et INRIA, Grenoble)

source : Patrick Pérez, Carine Hue, Jako Vermaak and Marc Gangnet, *Color-based probabilistic tracking*, European Conference on Computer Vision (ECCV'02)

l'utilisateur sélectionne une zone dans la première image de la séquence
objectif : suivre automatiquement cette même zone sur l'ensemble de la séquence



initialisation

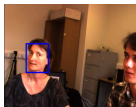


image 2

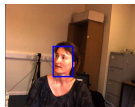


image 3

...

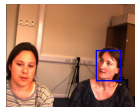


image 10

Figure: Suivi d'un visage dans une séquence de 10 images

la zone initiale est caractérisée par un histogramme de couleur (histogramme de référence), construit avec les N_b couleurs les plus représentées dans cette zone

nombre normalisé $q^(n)$ de pixels de la zone initiale dont la couleur est la couleur $n = 1, \dots, N_b$*

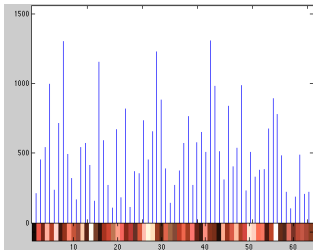


Figure: Zone initiale et histogramme de couleur associé, avec $N_b = 64$

pour évaluer la pertinence d'une zone-test dans la k -ème image de la séquence, caractérisée par la position (exprimée en pixels) de son centre x , on calcule son histogramme de couleur

nombre normalisé $q_k(x, n)$ de pixels de la zone-test centrée à la position x dans la k -ème image de la séquence, dont la couleur est la couleur $n = 1 \cdots Nb$

et on définit une mesure de distance (distance de Hellinger) entre les deux histogrammes de couleur normalisés

$$D(q^*, q_k(x)) = 1 - \sum_{n=1}^{Nb} \sqrt{q^*(n) q_k(x, n)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{Nb} (\sqrt{q^*(n)} - \sqrt{q_k(x, n)})^2$$

hypothèse : l'histogramme de couleur de la zone à suivre est constant le long de la séquence

variable d'état $X_k = r_k$: position du centre de la zone suivie dans la k -ème image

modèle d'état : marche aléatoire simple

$$r_k = r_{k-1} + W_k$$

observation Y_k : k -ème image de la séquence

pondération : écart entre l'histogramme de la zone-test et l'histogramme de référence

$$g_k(x) \propto \exp\{-\lambda D(q^*, q_k(x))\}$$

démo (mise en œuvre au 2ème TP)

3ème exemple : navigation en environnement intérieur

financement : ANR, projet *FIL (fusion d'information pour la localisation)*,
programme Télécommunications, coordination Thalès Alénià Space

- ▶ mesures de navigation (PNS, pedestrian navigation system)
 - distance parcourue et changement de direction entre deux instants successifs
- par intégration : estimation PNS de position et orientation de l'utilisateur
- ▶ modèle de déplacement a priori pour l'utilisateur, i.e. évolution de position et orientation, à partir des mesures PNS incrémentales
- ▶ mesures bruitées de
 - distance entre un utilisateur et une balise de *ranging* de position connue et de portée limitée
- ▶ détection (ou non-détection) par une balise de proximité
- ▶ map-matching : contraintes de déplacement dues à la présence d'obstacles, disponibles à partir d'un plan du bâtiment

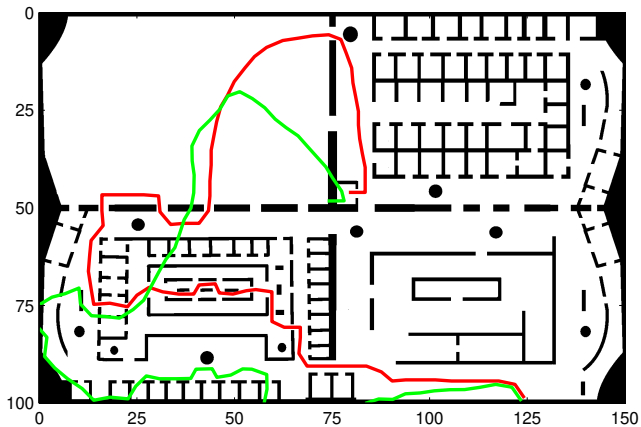


Figure: Trajectoire admissible et trajectoire estimée par intégration des mesures PNS seules

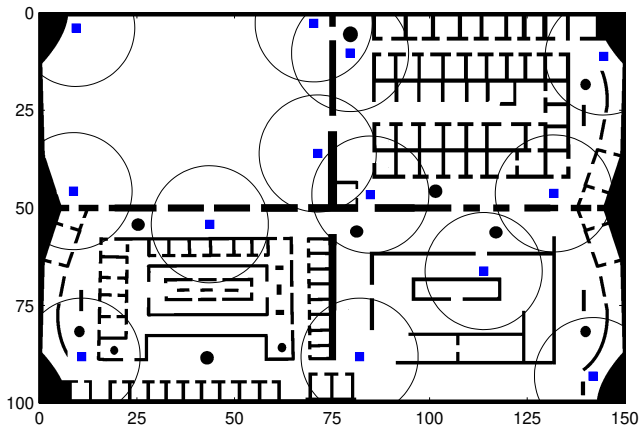


Figure: Balises de *ranging* à portée limitée

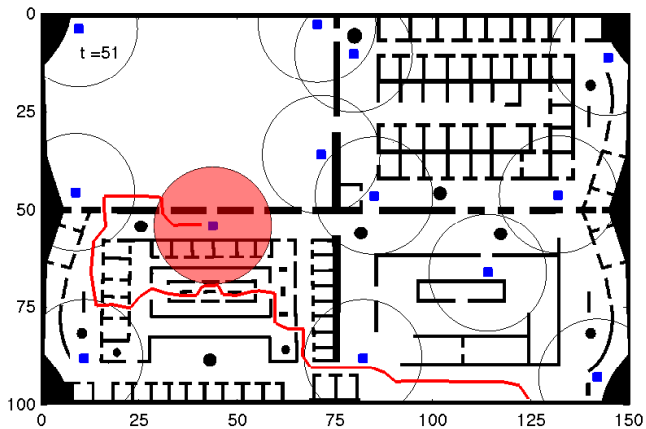


Figure: Détection par une balise de *ranging*

mesures PNS incrémentales bruitée : distance parcourue et changement de direction entre deux instants successifs

$$d_k^{\text{PNS}} = d_k + w_k^{\text{walk}} \quad \text{et} \quad \alpha_k^{\text{PNS}} = \alpha_k + w_k^{\text{turn}}$$

trajectoire estimée par intégration des mesures PNS seules

$$r_k^{\text{PNS}} = r_{k-1}^{\text{PNS}} + u(\theta_{k-1}^{\text{PNS}}) d_k^{\text{PNS}} \quad \text{et} \quad \theta_k^{\text{PNS}} = \theta_{k-1}^{\text{PNS}} + \alpha_k^{\text{PNS}}$$

variable d'état $X_k = (r_k, \theta_k)$: position et orientation de l'utilisateur
modèle d'état : mise à jour incrémentale à l'aide des mesures PNS

$$r_k = r_{k-1} + u(\theta_{k-1}) \underbrace{(d_k^{\text{PNS}} - w_k^{\text{walk}})}_{d_k} \quad \text{et} \quad \theta_k = \theta_{k-1} + \underbrace{(\alpha_k^{\text{PNS}} - w_k^{\text{turn}})}_{\alpha_k}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} r_k \\ \theta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{k-1} + u(\theta_{k-1}) d_k^{\text{PNS}} \\ \theta_{k-1} + \alpha_k^{\text{PNS}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(\theta_{k-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_k^{\text{walk}} \\ w_k^{\text{turn}} \end{pmatrix}$$

observation Y_k : distance à une balise active située à la position a et de portée R

$$Y_k = h(X_k) + V_k$$

relation $h(x)$ avec l'état caché $x = (r, \theta)$: distance $|r - a|$ à la balise
pondération (fonction de vraisemblance) : écart entre la distance mesurée à la balise, et la distance réelle à la balise

$$g_k(x) \propto q_k(Y_k - h(x))$$

si l'utilisateur est / n'est pas détecté par la balise, alors

$$g_k(x) \propto 1_{\{h(x) \leq R\}} \quad \text{ou bien} \quad g_k(x) \propto 1_{\{h(x) \geq R\}}$$

démo