Université de Rennes 1
DEA STIR
Signal — Télécommunications — Images — Radar
Option Signal

Examen du cours
“Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés”
Mercredi 19 décembre 2001, 8:00 à 9:30
— Corrigé —

Problème :

L'objectif de ce problème est de proposer un algorithme efficace pour calculer l'espérance conditionnelle d'une fonctionnelle additive dans le système linéaire gaussien suivant :

$$X_{k+1} = F_k\, X_k + G_k\, W_k \ ,$$

$$Y_k = H_k\, X_k + V_k \ ,$$

où on suppose que

- *Le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de covariance Q^W_k.*
- *La condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne $\bar{X}_0$ et de covariance Q^X_0.*
- *Le bruit d'observation $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de covariance Q^V_k.*
- *Les bruits $\{W_k\}$ et $\{V_k\}$, et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants.*

Il s'agit de calculer la quantité suivante :

$$A_n = \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} C_k\, W_k \mid Y_0, \cdots, Y_n] \ .$$

On introduit le système linéaire gaussien :

$$\begin{pmatrix} X_{k+1} \\ \Xi_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ \Xi_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_k \\ C_k \end{pmatrix} W_k \ ,$$

$$Y_k = \begin{pmatrix} H_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ \Xi_k \end{pmatrix} + V_k \ ,$$

où en plus des hypothèses déjà faites, on suppose que

- *La condition initiale* Ξ_0 *est nulle, c'est–à–dire que la variable aléatoire* $\begin{pmatrix} X_0 \\ \Xi_0 \end{pmatrix}$ *est gaussienne, de moyenne* $\begin{pmatrix} \bar{X}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et de covariance* $\begin{pmatrix} Q_0^X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) **Montrer que**

$$\Xi_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \, W_k \ .$$

Solution

On tire directement depuis l'équation d'état, la relation suivante

$$\Xi_{k+1} = \Xi_k + C_k \, W_k \ ,$$

et en sommant membre à membre, pour $k = 0, \cdots, n-1$, on obtient

$$\Xi_n = \Xi_0 + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \, W_k = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \, W_k \ ,$$

compte tenu que $\Xi_0 = 0$.

□

Pour tout instant k, on définit la moyenne et la matrice de covariance

$$\mathbb{E}[\begin{pmatrix} X_k \\ \Xi_k \end{pmatrix} \mid Y_0, \cdots, Y_k] = \begin{pmatrix} \widehat{X}_k \\ \widehat{\Xi}_k \end{pmatrix} \ ,$$

$$\mathbb{E}[\begin{pmatrix} \widehat{X}_k - X_k \\ \widehat{\Xi}_k - \Xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{X}_k - X_k \\ \widehat{\Xi}_k - \Xi_k \end{pmatrix}^* \mid Y_0, \cdots, Y_k] = \begin{pmatrix} P_k & S_k \\ S_k^* & \Sigma_k \end{pmatrix} \ ,$$

et on définit également la moyenne et la matrice de covariance

$$\mathbb{E}[\begin{pmatrix} X_k \\ \Xi_k \end{pmatrix} \mid Y_0, \cdots, Y_{k-1}] = \begin{pmatrix} \widehat{X}_k^- \\ \widehat{\Xi}_k^- \end{pmatrix} \ ,$$

$$\mathbb{E}[\begin{pmatrix} \widehat{X}_k^- - X_k \\ \widehat{\Xi}_k^- - \Xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{X}_k^- - X_k \\ \widehat{\Xi}_k^- - \Xi_k \end{pmatrix}^* \mid Y_0, \cdots, Y_{k-1}] = \begin{pmatrix} P_k^- & S_k^- \\ (S_k^-)^* & \Sigma_k^- \end{pmatrix} \ .$$

(ii) **Montrer que**

$$A_n = \mathbb{E}[\,\Xi_n \mid Y_0, \cdots, Y_n] = \widehat{\Xi}_n \ .$$

Solution

On déduit directement de la définition de A_n et de la réponse à la question (i) que

$$A_n = \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} C_k\, W_k \mid Y_0, \cdots, Y_n] = \mathbb{E}[\Xi_n \mid Y_0, \cdots, Y_n] = \widehat{\Xi}_n \ .$$

□

(iii) **Donner les équations du filtre de Kalman pour le vecteur d'état $\begin{pmatrix} X_k \\ \Xi_k \end{pmatrix}$.**

Solution

Initialisation

$$\begin{pmatrix} \widehat{X}_0^- \\ \widehat{\Xi}_0^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X}_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} P_0^- & S_0^- \\ (S_0^-)^* & \Sigma_0^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0^X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Étape de prédiction

$$\begin{pmatrix} \widehat{X}_{k+1}^- \\ \widehat{\Xi}_{k+1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{X}_k \\ \widehat{\Xi}_k \end{pmatrix} \ ,$$

c'est–à–dire que

$$\widehat{X}_{k+1}^- \ = \ F_k\, \widehat{X}_k \ ,$$

$$\widehat{\Xi}_{k+1}^- \ = \ \widehat{\Xi}_k \ ,$$

et

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_{k+1}^- & S_{k+1}^- \\ (S_{k+1}^-)^* & \Sigma_{k+1}^- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_k & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k & S_k \\ S_k^* & \Sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_k \\ C_k \end{pmatrix} Q_k^W \begin{pmatrix} G_k^* & C_k^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_k\, P_k\, F_k^* & F_k\, S_k \\ S_k^*\, F_k^* & \Sigma_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_k\, Q_k^W\, G_k^* & G_k\, Q_k^W\, C_k^* \\ C_k\, Q_k^W\, G_k^* & C_k\, Q_k^W\, C_k^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_k\, P_k\, F_k^* + G_k\, Q_k^W\, G_k^* & F_k\, S_k + G_k\, Q_k^W\, C_k^* \\ S_k^*\, F_k^* + C_k\, Q_k^W\, G_k^* & \Sigma_k + C_k\, Q_k^W\, C_k^* \end{pmatrix} \ , \end{aligned}$$

et en particulier

$$P_{k+1}^- \ = \ F_k\, P_k^-\, F_k^* + G_k\, Q_k^W\, G_k^* \ ,$$

$$S_{k+1}^- \ = \ F_k\, S_k + G_k\, Q_k^W\, C_k^* \ .$$

Étape de correction

$$\begin{pmatrix} \widehat{X}_k \\ \widehat{\Xi}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{X}_k^- \\ \widehat{\Xi}_k^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_k \\ L_k \end{pmatrix} \; [\, Y_k - \begin{pmatrix} H_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{X}_k^- \\ \widehat{\Xi}_k^- \end{pmatrix}] \; ,$$

c'est–à–dire que

$$\widehat{X}_k \; = \; \widehat{X}_k^- + K_k \, [\, Y_k - H_k \, \widehat{X}_k^- \,] \; ,$$

$$\widehat{\Xi}_k \; = \; \widehat{\Xi}_k^- + L_k \, [\, Y_k - H_k \, \widehat{X}_k^- \,] \; ,$$

où le gain de Kalman est défini par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K_k \\ L_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_k^- & S_k^- \\ (S_k^-)^* & \Sigma_k^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k^* \\ 0 \end{pmatrix} [\, \begin{pmatrix} H_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k^- & S_k^- \\ (S_k^-)^* & \Sigma_k^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k^* \\ 0 \end{pmatrix} + I \,]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} P_k^- \, H_k^* \\ (S_k^-)^* \, H_k^* \end{pmatrix} [\, H_k \, P_k^- \, H_k^* + I \,]^{-1} \; , \end{aligned}$$

c'est–à–dire que

$$K_k \; = \; P_k^- \, H_k^* \, [\, H_k \, P_k^- \, H_k^* + I \,]^{-1} \; ,$$

$$L_k \; = \; (S_k^-)^* \, H_k^* \, [\, H_k \, P_k^- \, H_k^* + I \,]^{-1} \; .$$

D'autre part, on remarque que

$$L_k \, H_k \, P_k^- = (S_k^-)^* \, H_k^* \, [\, H_k \, P_k^- \, H_k^* + I \,]^{-1} \, H_k \, P_k^- = (S_k^-)^* \, H_k^* \, K_k^* \; ,$$

c'est–à–dire que

$$(S_k^-)^* - L_k \, H_k \, P_k^- = (S_k^-)^* \, [I - K_k \, H_k]^* = \big([I - K_k \, H_k] \, S_k^- \big)^* \; ,$$

donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_k & S_k \\ S_k^* & \Sigma_k \end{pmatrix} &= [\, I - \begin{pmatrix} K_k \\ L_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k & 0 \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} P_k^- & S_k^- \\ (S_k^-)^* & \Sigma_k^- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I - K_k \, H_k & 0 \\ -L_k \, H_k & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k^- & S_k^- \\ (S_k^-)^* & \Sigma_k^- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [I - K_k \, H_k] \, P_k^- & [I - K_k \, H_k] \, S_k^- \\ (S_k^-)^* - L_k \, H_k \, P_k^- & \Sigma_k^- - L_k \, H_k \, S_k^- \end{pmatrix} \; , \end{aligned}$$

et en particulier

$$P_k \; = \; [I - K_k \, H_k] \, P_k^- \; ,$$

$$S_k \; = \; [I - K_k \, H_k] \, S_k^- \; .$$

$\square$

(iv) **En déduire que**

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} L_k \, [Y_k - H_k \, \widehat{X}_k^-] \ ,$$

où on donnera l'expression de la matrice L_k pour tout instant k.

Solution

Il résulte des relations

$$\widehat{\Xi}_{k+1}^- = \widehat{\Xi}_k \ ,$$

$$\widehat{\Xi}_k = \widehat{\Xi}_k^- + L_k \, [\, Y_k - H_k \, \widehat{X}_k^- \,] \ ,$$

obtenues à la question (iii), que

$$\widehat{\Xi}_k = \widehat{\Xi}_{k-1} + L_k \, [\, Y_k - H_k \, \widehat{X}_k^- \,] \ ,$$

et en sommant membre à membre pour $k = 1, \cdots, n$ on obtient

$$\begin{aligned} A_n = \widehat{\Xi}_n &= \widehat{\Xi}_0 + \sum_{k=1}^{n} L_k \, [\, Y_k - H_k \, \widehat{X}_k^- \,] \\ &= \sum_{k=1}^{n} L_k \, [\, Y_k - H_k \, \widehat{X}_k^- \,] \ , \end{aligned}$$

compte tenu que $\widehat{\Xi}_0 = 0$.

□