Université de Rennes 1
Master EEA (parcours SISEA)

Examen du cours
"Filtrage de Kalman et modèles de Markov cachés"
Jeudi 13 février 2020, 8:00 à 10:00

Exercice 1

Lisseur dans un modèle de Markov caché à espace d'état fini

On considère un modèle de Markov caché $\{(X_k, Y_k)\}$ caractérisé

- par la loi initiale $\nu = (\nu_i)$ définie par
$$\nu_i = \mathbb{P}[X_0 = i] \qquad \text{pour tout } i \in E,$$
- par la matrice de transition $\pi = (\pi_{i,j})$ définie par
$$\pi_{i,j} = \mathbb{P}[X_k = j \mid X_{k-1} = i] \qquad \text{pour tout } i, j \in E,$$
- et dans le cas *symbolique*, par les probabilités d'émission $b = (b_i^\ell)$ définies par
$$b_i^\ell = \mathbb{P}[Y_k = \ell \mid X_k = i] \qquad \text{pour tout } i \in E \text{ et tout } \ell \in O,$$
ou dans le cas *numérique*, par les densités d'émission $g = (g_i)$ définies par
$$g_i(y)\, dy = \mathbb{P}[Y_k \in dy \mid X_k = i] \qquad \text{pour tout } i \in E \text{ et tout } y \in \mathbb{R}^d.$$

Pour gérer à la fois le cas *symbolique* et le cas *numérique*, on introduit la notation
$$g_k^j = \begin{cases} b_j^{Y_k} \,, & \text{dans le cas symbolique} \\[2ex] g_j(Y_k) \,, & \text{dans le cas numérique} \end{cases}$$
pour tout $j \in E$.

On rappelle que le lisseur non–normalisé $q_k = (q_k^i)$ défini par
$$q_k^i = \mathbb{P}[X_k = i \mid Y_0, \cdots, Y_n]\; L_n \qquad \text{pour tout } i \in E, \text{ avec} \qquad L_n = \sum_{i \in E} q_k^i \,,$$
peut s'obtenir comme le produit composante–par–composante
$$q_k^i = p_k^i \; v_k^i \qquad \text{pour tout } i \in E, \tag{$\star$}$$
de la variable forward $p_k = (p_k^i)$ et de la variable backward $v_k = (v_k^i)$.

(i) Rappeler l'équation de récurrence vérifiée par la variable forward p_k et l'équation de récurrence rétrograde vérifiée par la variable backward v_k.

SOLUTION

La variable forward vérifie l'équation récurrente

$$p_k^j = [\sum_{i \in E} p_{k-1}^i \, \pi_{i,j} \,] \, g_k^j \qquad \text{pour tout } j \in E,$$

avec la condition initiale : $p_0^i = \nu_i \, b_i^{Y_0}$ pour tout $i \in E$.

La variable backward vérifie l'équation récurrente rétrograde

$$v_{k-1}^i = \sum_{j \in E} \pi_{i,j} \, g_k^j \, v_k^j \qquad \text{pour tout } i \in E,$$

avec la condition initiale : $v_n^i \equiv 1$ pour tout $i \in E$.

□

Le but de cet exercice est de proposer la procédure alternative suivante

> une équation de récurrence pour la variable forward p_k et une équation de récurrence rétrograde pour la variable q_k directement, sans utiliser la variable backward v_k,

au lieu de la procédure

> une équation de récurrence pour la variable forward p_k, une équation de récurrence rétrograde pour la variable backward v_k séparément, et le produit composante–par–composante $(\star)$ pour obtenir la variable q_k,

vue en cours.

(ii) Montrer que le lisseur non–normalisé vérifie une équation de récurrence rétrograde de la forme

$$q_{k-1}^i = \sum_{j \in E} t_k^{i,j} \, q_k^j \qquad \textbf{pour tout } i \in E, \qquad (\star\star)$$

où les coefficients de la matrice $t_k = (t_k^{i,j})$ dépendent des coefficients de la matrice de transition $\pi = (\pi_{i,j})$ et des composantes de la variable forward à l'instant $(k-1)$, mais ne dépendent pas des composantes de la variable backward.

Donner l'expression de la condition initiale, exprimée à l'instant final n.

[Indication : Pour obtenir l'équation ($\star\star$), on mettra en œuvre les étapes suivantes

- écrire l'équation ($\star$) à l'instant $(k-1)$,
- utiliser l'équation backward, pour exprimer les composantes de la variable backward à l'instant $(k-1)$ en fonction des composantes de la variable backward à l'instant k,
- utiliser l'équation ($\star$) à l'instant k, pour éliminer les composantes de la variable backward à l'instant k,
- utiliser l'équation forward, pour exprimer les composantes de la variable forward à l'instant k en fonction des composantes de la variable forward à l'instant $(k-1)$.]

Solution

En mettant en œuvre les étapes proposées, on obtient

$$\begin{aligned}
q_{k-1}^i &= p_{k-1}^i \, v_{k-1}^i \\
&= p_{k-1}^i \, [\sum_{j \in E} \pi_{i,j} \, g_k^j \, v_k^j \,] \\
&= p_{k-1}^i \, [\sum_{j \in E} \pi_{i,j} \, g_k^j \, \frac{q_k^j}{p_k^j} \,] \\
&= p_{k-1}^i \, \sum_{j \in E} \frac{\pi_{i,j} \, g_k^j \, q_k^j}{[\sum_{\ell \in E} p_{k-1}^\ell \, \pi_{\ell,j} \,] \, g_k^j} \\
&= \sum_{j \in E} \frac{p_{k-1}^i \, \pi_{i,j}}{\sum_{\ell \in E} p_{k-1}^\ell \, \pi_{\ell,j}} \, q_k^j \\
&= \sum_{j \in E} t_k^{i,j} \, q_k^j \qquad \text{pour tout } i \in E,
\end{aligned}$$

avec

$$t_k^{i,j} = \frac{p_{k-1}^i \, \pi_{i,j}}{\sum_{\ell \in E} p_{k-1}^\ell \, \pi_{\ell,j}} \qquad \text{pour tout } i,j \in E,$$

pour tout instant k.

A l'instant n, qui joue le rôle d'instant initial pour l'équation de récurrence rétrograde ($\star\star$), on a $q_n^i = p_n^i$ pour tout $i \in E$.

$\square$

(iii) Exprimer les coefficients de la matrice $t_k = (t_k^{i,j})$ à l'aide des composantes de la variable forward *normalisée* à l'instant $(k-1)$.

Solution

En divisant numérateur et dénominateur par la constante de normalisation de la variable forward non–normalisée, on obtient

$$t_k^{i,j} = \frac{p_{k-1}^i \, \pi_{i,j}}{\displaystyle\sum_{\ell \in E} p_{k-1}^\ell \, \pi_{\ell,j}} = \frac{\bar{p}_{k-1}^i \, \pi_{i,j}}{\displaystyle\sum_{\ell \in E} \bar{p}_{k-1}^\ell \, \pi_{\ell,j}} \qquad \text{pour tout } i,j \in E,$$

pour tout instant k.

□

(iv) Montrer qu'à tout instant k, la somme des coefficients de chaque *colonne* est égale à 1, c'est–à–dire que la matrice $t_k = (t_k^{i,j})$ est une matrice stochastique *rétrograde* (et peut donc s'interpréter comme la matrice de transition d'une chaîne de Markov *rétrograde*).

En déduire que toute suite vérifiant l'équation $(\star\star)$ possède la propriété que la somme des coefficients est constante (ne dépend pas de l'instant considéré). Cette propriété est–elle surprenante, ou était–elle prévisible, et pourquoi ?

Solution

Clairement, la somme des coefficients de la j–ème colonne vérifie

$$\sum_{i \in E} t_k^{i,j} = \sum_{i \in E} \frac{p_{k-1}^i \, \pi_{i,j}}{\displaystyle\sum_{\ell \in E} p_{k-1}^\ell \, \pi_{\ell,j}} = 1 \ .$$

Si la matrice la matrice t_k est une matrice stochastique *rétrograde*, alors la suite $\{q_k\}$ vérifie

$$\sum_{i \in E} q_{k-1}^i = \sum_{i \in E} \sum_{j \in E} t_k^{i,j} \, q_k^j = \sum_{j \in E} [\sum_{i \in E} t_k^{i,j} \,] \, q_k^j = \sum_{j \in E} q_k^j \ ,$$

à chaque instant k. Il s'agit d'une propriété bien connue pour le lisseur.

□

(v) Donner l'équation de récurrence rétrograde vérifiée par le lisseur *normalisé* $\bar{q}_k = (\bar{q}_k^i)$, défini par

$$\bar{q}_k^i = \mathbb{P}[X_k = i \mid Y_0, \cdots, Y_n] \qquad \textbf{pour tout } i \in E.$$

Solution

En divisant membre–à–membre l'équation ($\star\star$) par la constante de normalisation, laquelle ne dépend pas de l'instant considéré comme il a été démontré en réponse à la question (iv), on obtient

$$\bar{q}^i_{k-1} = \frac{q^i_{k-1}}{\displaystyle\sum_{i \in E} q^i_{k-1}} = \frac{\displaystyle\sum_{j \in E} t^{i,j}_k \, q^j_k}{\displaystyle\sum_{j \in E} q^j_k} = \sum_{j \in E} t^{i,j}_k \, \bar{q}^j_k \,, \qquad \text{pour tout } i \in E,$$

pour tout instant k.

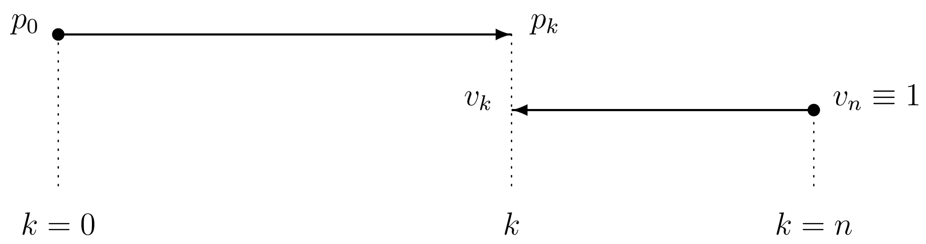
□

(vi) Comparer les deux procédures en termes de temps de calcul, d'encombrement mémoire, etc. On pourra moduler la réponse selon que l'objectif est d'obtenir le lisseur

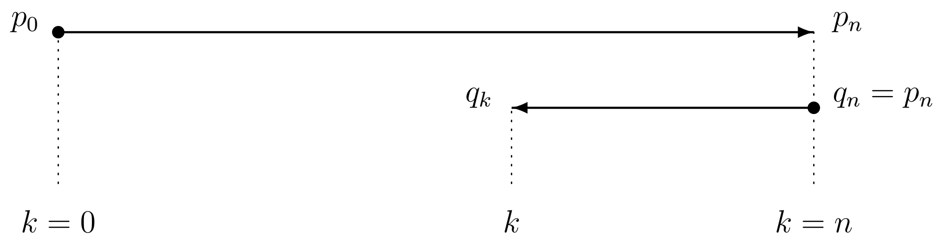
- **à un instant intermédiaire k unique,**
- **à tous les instants compris entre l'instant initial 0 et l'instant final n.**

Solution

Si l'objectif est d'obtenir le lisseur à un instant intermédiaire k unique, alors la procédure vue en cours requiert de résoudre l'équation forward depuis l'instant initial 0 jusqu'à l'instant k, de résoudre l'équation backward de l'instant final n (vu comme instant initial pour l'équation backward) jusqu'à l'instant k et d'effectuer le produit composante–par–composante ($\star$) pour obtenir le lisseur lui–même. Il n'est pas nécessaire de conserver les valeurs intermédiaires de la variable forward ni de la variable backward, lesquelles peuvent donc être écrasées au fur et à mesure du calcul récursif. Le temps de calcul est proportionnel à n, et l'encombrement mémoire est celui de deux vecteurs de dimension $|E|$, soit un vecteur pour recevoir la variable forward et un vecteur pour recevoir la variable backward.



Pour ce même objectif, la procédure alternative proposée requiert de résoudre l'équation forward depuis l'instant initial 0 jusqu'à l'instant final n, et de résoudre l'équation de récurrence rétrograde ($\star\star$) de l'instant final n jusqu'à l'instant k. Mais pour résoudre l'équation de récurrence rétrograde ($\star\star$), il est nécessaire de disposer de la variable forward à tous les instants, ou au moins à tous les instants compris entre l'instant k et l'instant final n, de manière à pouvoir construire à la demande la matrice de transition de la chaîne de Markov rétrograde. En revanche, il n'est pas nécessaire de conserver les valeurs intermédiaires du lisseur lui–même, lesquelles peuvent être écrasées au fur et à mesure du calcul récursif. Le temps de calcul est proportionnel à $n + (n - k) = 2n - k$, et l'encombrement mémoire est celui de $(n - k) + 1$ vecteurs de dimension $|E|$, soit $(n - k)$ vecteurs pour recevoir la variable forward à tous les instants compris entre l'instant k et l'instant final n, et un vecteur pour recevoir le lisseur lui–même.



Clairement pour ce premier objectif, la procédure vue en cours semble plus économique.

Si l'objectif est d'obtenir le lisseur à tous les instants compris entre l'instant initial 0 et l'ensemble final n, alors la procédure vue en cours requiert de résoudre l'équation forward depuis l'instant initial 0 jusqu'à l'instant final n, de résoudre l'équation backward de l'instant final n jusqu'à l'instant initial 0 et d'effectuer le produit composante–par–composante ($\star$) pour obtenir le lisseur lui–même à tous les instants intermédiaires. Mais pour effectuer le produit composante–par–composante ($\star$) à tous les instants intermédiaires, il est nécessaire de disposer de la variable forward à tous les instants intermédiaires. En revanche, il n'est pas nécessaire de conserver les valeurs intermédiaires de la variable backward, lesquelles peuvent être écrasées au fur et à mesure du calcul récursif. Le temps de calcul est proportionnel à $2n$, et l'encombrement mémoire est celui de $n + 1$ vecteurs de dimension $|E|$, soit n vecteurs pour recevoir la variable forward à tous les instants compris entre l'instant initial 0 et l'instant final n, et un vecteur pour recevoir la variable backward.

Pour ce même objectif, la procédure alternative proposée est implémentée exactement comme pour l'objectif restreint d'obtenir le lisseur à l'instant initial 0. Concrètement, elle requiert de résoudre l'équation forward depuis l'instant initial 0 jusqu'à l'instant final n, et de résoudre l'équation de récurrence rétrograde ($\star\star$) de l'instant final n jusqu'à l'instant initial 0. Mais pour résoudre l'équation de récurrence rétrograde ($\star\star$), il est nécessaire de disposer de la variable forward à tous les instants compris entre l'instant initial 0 et l'instant final n, de manière à pouvoir construire à la demande la matrice de transition de la chaîne de Markov rétrograde. En revanche, il n'est pas nécessaire de conserver les valeurs intermédiaires du lisseur lui–même, lesquelles peuvent être écrasées au fur et à mesure du calcul récursif. Par conséquent, le temps de calcul est proportionnel à $2n$, et l'encombrement mémoire est celui de $n+1$ vecteurs de dimension $|E|$, soit n vecteurs pour recevoir la variable forward à tous les instants compris entre l'instant initial 0 et l'instant final n, et un vecteur pour recevoir le lisseur lui–même.

Clairement pour ce deuxième objectif, les deux procédures semblent aussi économique l'une que l'autre.

A son avantage, la procédure alternative proposée permet d'échantillonner un scénario (une suite d'hypothèses) distribué selon la loi jointe $\mathbb{P}[X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n \mid Y_0, \cdots, Y_n]$. Il suffit pour celà de simuler une trajectoire $(X'_n, \cdots, X'_0)$ de la chaîne de Markov *rétrograde* caractérisée

- par la loi initiale exprimée à l'instant final n (vu comme instant initial pour la chaîne de Markov *rétrograde*),

$$\mathbb{P}[X'_n = i] = \bar{p}^i_n \qquad \text{pour tout } i \in E,$$

- et par la matrice de transition *rétrograde*

$$\mathbb{P}[X'_{k-1} = i \mid X'_k = j] = \frac{\bar{p}^i_{k-1}\, \pi_{i,j}}{\displaystyle\sum_{\ell \in E} \bar{p}^\ell_{k-1}\, \pi_{\ell,j}} \qquad \text{pour tout } i, j \in E,$$

  à tout instant k.

$\square$

Exercice 2

Borne de Cramér–Rao a posteriori et filtre de Kalman

On considère un système non–linéaire (mais avec des bruits gaussiens)

$$X_k \,=\, b_k(X_{k-1}) + W_k \ ,$$

$$Y_k \,=\, h_k(X_k) + V_k \ ,$$

avec les conditions habituelles

- l'état initial X_0 est un vecteur aléatoire gaussien de moyenne $\bar{X}_0$ et de matrice de covariance Q_0^X,
- la suite $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien (une suite de vecteurs aléatoires gaussiens indépendants et centrés) de matrice de covariance Q_k^W à l'instant k,
- la suite $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien (une suite de vecteurs aléatoires gaussiens indépendants et centrés) de matrice de covariance Q_k^V à l'instant k,
- l'état initial X_0 et les suites $\{W_k\}$ et $\{V_k\}$ sont mutuellement indépendants,
- les fonctions $x \mapsto b_k(x)$ et $x \mapsto h_k(x)$ sont dérivables.

On suppose en outre que

- la matrice de covariance Q_0^X est inversible,
- à tout instant k, les matrices de covariance Q_k^W et Q_k^V sont inversibles.

(i) Rappeler l'équation de récurrence vue en cours vérifiée par la matrice d'information de Fisher J_k, avec l'expression des matrices D_k^-, D_k et D_k^+. On ne demande pas l'expression générale, mais l'expression explicite à l'aide des matrices jacobiennes des fonctions $x \mapsto b_k(x)$ et $x \mapsto h_k(x)$.

Solution

On a vu en cours que la matrice d'information de Fisher vérifie l'équation récurrente

$$J_k = D_k^+ - D_k^* \, (D_k^- + J_{k-1})^{-1} \, D_k \ ,$$

avec

$$D_k^- = \mathbb{E}[\,(b_k'(X_{k-1}))^*\,(Q_k^W)^{-1}\,b_k'(X_{k-1})\,]\ ,$$

$$D_k = -\mathbb{E}[\,(b_k'(X_{k-1}))^*\,]\,(Q_k^W)^{-1}\ ,$$

$$D_k^+ = \mathbb{E}[\,(h_k'(X_k))^*\,(Q_k^V)^{-1}\,h_k'(X_k)\,] + (Q_k^W)^{-1}\ ,$$

et avec l'initialisation

$$J_0 = -\mathbb{E}[\,\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\log p_0(X_0,Y_0)\,]\ .$$

□

(ii) En utilisant le résultat vu en cours pour l'expression de la matrice d'information de Fisher dans le cas statique, donner l'expression explicite à l'aide de la matrice jacobienne de la fonction $x \mapsto h_0(x)$, de la condition initiale J_0 définie par

$$J_0 = -\mathbb{E}[\,\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\log p_0(X_0,Y_0)\,]\ .$$

Solution

On rappelle le résultat suivant vu en cours dans le cas statique : si $Y = h(X) + V$ où X et V sont deux vecteurs aléatoires gaussiens indépendants, de moyenne $\bar{X}$ et 0 et de matrice de covariance Q_X et Q_V respectivement, et si les matrices Q_X et Q_V sont inversibles, alors la matrice d'information de Fisher admet l'expression suivante

$$J = -\mathbb{E}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log p(X,Y)] = \mathbb{E}[(h'(X))^*\,Q_V^{-1}\,h'(X)] + Q_X^{-1}\ .$$

A l'instant 0, on a $Y_0 = h(X_0) + V_0$ où X_0 et V_0 sont deux vecteurs aléatoires gaussiens indépendants, de moyenne $\bar{X}_0$ et 0 et de matrice de covariance Q_0^X et Q_0^V respectivement. Les matrices Q_0^X et Q_0^V sont inversibles par hypothèse, de sorte que la matrice d'information de Fisher admet l'expression suivante

$$J_0 = -\mathbb{E}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log p(X_0,Y_0)] = \mathbb{E}[(h_0'(X_0))^*\,(Q_0^V)^{-1}\,h_0'(X_0)] + (Q_0^X)^{-1}\ .$$

□

A partir de maintenant, on considère le cas particulier d'un système linéaire gaussien

$$X_k = F_k\,X_{k-1} + W_k\ ,$$

$$Y_k = H_k\,X_k + V_k\ .$$

(iii) Donner l'expression des matrices D_k^-, D_k et D_k^+ dans ce cas particulier d'un système linéaire gaussien, où les fonctions $x \mapsto b_k(x)$ et $x \mapsto h_k(x)$ sont linéaires.

Ré–écrire l'équation de récurrence vérifiée par la matrice d'information de Fisher J_k, et donner l'expression de la condition initiale J_0, dans ce cas particulier.

Il pourra être utile de décomposer l'équation de récurrence vérifiée par la matrice d'information de Fisher J_k en deux étapes, en introduisant par exemple une matrice notée J_k^- à l'étape intermédiaire.

Solution

Dans le cas particulier d'un système linéaire gaussien avec $b_k(x) = F_k\, x$ et $h_k(x) = H_k\, x$, les matrices jacobiennes $b'_k(x) = F_k$ et $h'_k(x) = H_k$ ne dépendent pas de la variable x, de sorte que

$$D_k^- = \mathbb{E}[\, (b'_k(X_{k-1}))^*\, (Q_k^W)^{-1}\, b'_k(X_{k-1})\,] = F_k^*\, (Q_k^W)^{-1}\, F_k \ ,$$

$$D_k = -\mathbb{E}[\, (b'_k(X_{k-1}))^*\,]\, (Q_k^W)^{-1} = -F_k^*\, (Q_k^W)^{-1} \ ,$$

$$D_k^+ = \mathbb{E}[\, (h'_k(X_k))^*\, (Q_k^V)^{-1}\, h'_k(X_k)\,] + (Q_k^W)^{-1} = H_k^*\, (Q_k^V)^{-1}\, H_k + (Q_k^W)^{-1} \ ,$$

$$J_0 = \mathbb{E}[\, (h'_0(X_0))^*\, (Q_0^V)^{-1}\, h'_0(X_0)\,] + (Q_0^X)^{-1} = H_0^*\, (Q_0^V)^{-1}\, H_0 + (Q_0^X)^{-1} \ ,$$

et l'équation récurrente vérifiée par la matrice d'information de Fisher devient

$$J_k = H_k^*\, (Q_k^V)^{-1}\, H_k + (Q_k^W)^{-1} - (Q_k^W)^{-1}\, F_k\, (J_{k-1} + F_k^*\, (Q_k^W)^{-1}\, F_k)^{-1}\, F_k^*\, (Q_k^W)^{-1} \ ,$$

avec la condition initiale

$$J_0 = H_0^*\, (Q_0^V)^{-1}\, H_0 + (Q_0^X)^{-1} \ .$$

De manière équivalente, en introduisant une étape intermédiaire, on obtient

$$J_k^- = (Q_k^W)^{-1} - (Q_k^W)^{-1}\, F_k\, (F_k^*\, (Q_k^W)^{-1}\, F_k + J_{k-1})^{-1}\, F_k^*\, (Q_k^W)^{-1} \ ,$$

et

$$J_k = H_k^*\, (Q_k^V)^{-1}\, H_k + J_k^- \ ,$$

avec l'initialisation

$$J_0^- = (Q_0^X)^{-1} \qquad \text{et} \qquad J_0 = H_0^*\, (Q_0^V)^{-1}\, H_0 + J_0^- \ .$$

□

(iv) En procédant par récurrence et en utilisant le lemme d'inversion matricielle vu en cours, montrer que dans le cas particulier d'un système linéaire gaussien, l'inverse J_k^{-1} de la matrice d'information de Fisher J_k coïncide avec la matrice de covariance P_k de l'erreur d'estimation (donnée par les équations du filtre de Kalman).

Interpréter la borne de Cramér–Rao a posteriori ainsi obtenue.

Solution

On se propose de démontrer par récurrence que $(J_k^-)^{-1} = P_k^-$ et $J_k^{-1} = P_k$.

On rappelle le lemme d'inversion matricielle vu en cours : si Q et R sont deux matrices symétriques définies positives, donc inversibles, et si H une matrice possiblement rectangulaire de dimension compatible, alors

$$(H^* \, R^{-1} \, H + Q^{-1})^{-1} = Q - Q \, H^* \, (H \, Q \, H^* + R)^{-1} \, H \, Q \; .$$

Clairement $(J_0^-)^{-1} = Q_0^X$ de sorte que $(J_0^-)^{-1} = P_0^-$, et il résulte du lemme d'inversion matricielle que

$$\begin{aligned} J_0^{-1} &= (H_0^* \, (Q_0^V)^{-1} \, H_0 + J_0^-)^{-1} \\ &= (H_0^* \, (Q_0^V)^{-1} \, H_0 + (P_0^-)^{-1})^{-1} \\ &= P_0^- - P_0^- \, H_0^* \, (H_0 \, P_0^- \, H_0^* + Q_0^V)^{-1} \, H_0 \, P_0^- \; , \end{aligned}$$

de sorte que $J_0^{-1} = P_0$. En d'autres termes, l'hypothèse de récurrence est vérifiée à l'instant $k = 0$.

On suppose que l'hypothèse de récurrence est vérifiée à l'instant $(k-1)$, c'est–à–dire en particulier que $J_{k-1}^{-1} = P_{k-1}$. Il résulte du lemme d'inversion matricielle que

$$\begin{aligned} J_k^- &= (Q_k^W)^{-1} - (Q_k^W)^{-1} \, F_k \, (F_k^* \, (Q_k^W)^{-1} \, F_k + J_{k-1})^{-1} \, F_k^* \, (Q_k^W)^{-1} \\ &= (Q_k^W)^{-1} - (Q_k^W)^{-1} \, F_k \, (F_k^* \, (Q_k^W)^{-1} \, F_k + P_{k-1}^{-1})^{-1} \, F_k^* \, (Q_k^W)^{-1} \\ &= (F_k \, P_{k-1} \, F_k^* + Q_k^W)^{-1} \; , \end{aligned}$$

ou de manière équivalente

$$(J_k^-)^{-1} = F_k \, P_{k-1} \, F_k^* + Q_k^W \; ,$$

de sorte que $(J_k^-)^{-1} = P_k^-$. Enfin, il résulte du lemme d'inversion matricielle que

$$\begin{aligned} J_k^{-1} &= (H_k^* \, (Q_k^V)^{-1} \, H_k + J_k^-)^{-1} \\ &= (H_k^* \, (Q_k^V)^{-1} \, H_k + (P_k^-)^{-1})^{-1} \\ &= P_k^- - P_k^- \, H_k^* \, (H_k \, P_k^- \, H_k^* + Q_k^V)^{-1} \, H_k \, P_k^- \ , \end{aligned}$$

de sorte que $J_k^{-1} = P_k$. En d'autres termes, l'hypothèse de récurrence est vérifiée à l'instant k.

En particulier à l'instant n, on a $J_n^{-1} = P_n$. La borne de Cramér–Rao a posteriori

$$\mathbb{E}[\,(\psi(Y_{0:n}) - X_n)\,(\psi(Y_{0:n}) - X_n)^*\,] \geq J_n^{-1} \ ,$$

valable pour un estimateur quelconque, est atteinte pour le filtre de Kalman comme estimateur particulier, puisque

$$\mathbb{E}[\,(\widehat{X}_n - X_n)\,(\widehat{X}_n - X_n)^*\,] = P_n \ .$$

$\square$