# Université de Rennes 1
# DEA STIR
# Signal — Télécommunications — Images — Radar
# Option Signal

# Examen du cours
# "Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés"
# Mercredi 19 décembre 2001, 8:00 à 9:30

## Problème :

L'objectif de ce problème est de proposer un algorithme efficace pour calculer l'espérance conditionnelle d'une fonctionnelle additive dans le système linéaire gaussien suivant :

$$X_{k+1} = F_k \, X_k + G_k \, W_k \ ,$$

$$Y_k = H_k \, X_k + V_k \ ,$$

où on suppose que

- *Le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de covariance $Q_k^W$.*
- *La condition initiale $X_0$ est gaussienne, de moyenne $\bar{X}_0$ et de covariance $Q_0^X$.*
- *Le bruit d'observation $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de covariance $Q_k^V$.*
- *Les bruits $\{W_k\}$ et $\{V_k\}$, et la condition initiale $X_0$ sont mutuellement indépendants.*

Il s'agit de calculer la quantité suivante :

$$A_n = \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} C_k \, W_k \mid Y_0, \cdots, Y_n] \ .$$

On introduit le système linéaire gaussien :

$$\begin{pmatrix} X_{k+1} \\ \Xi_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ \Xi_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_k \\ C_k \end{pmatrix} W_k \ ,$$

$$Y_k = \begin{pmatrix} H_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ \Xi_k \end{pmatrix} + V_k \ ,$$

où en plus des hypothèses déjà faites, on suppose que

- *La condition initiale $\Xi_0$ est nulle, c'est–à–dire que la variable aléatoire $\begin{pmatrix} X_0 \\ \Xi_0 \end{pmatrix}$ est gaussienne, de moyenne $\begin{pmatrix} \bar{X}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de covariance $\begin{pmatrix} Q_0^X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

(i) **Montrer que**

$$\Xi_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \, W_k \ .$$

Pour tout instant $k$, on définit la moyenne et la matrice de covariance

$$\mathbb{E}[\begin{pmatrix} X_k \\ \Xi_k \end{pmatrix} \mid Y_0, \cdots, Y_k] = \begin{pmatrix} \widehat{X}_k \\ \widehat{\Xi}_k \end{pmatrix} \ ,$$

$$\mathbb{E}[\begin{pmatrix} \widehat{X}_k - X_k \\ \widehat{\Xi}_k - \Xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{X}_k - X_k \\ \widehat{\Xi}_k - \Xi_k \end{pmatrix}^* \mid Y_0, \cdots, Y_k] = \begin{pmatrix} P_k & S_k \\ S_k^* & \Sigma_k \end{pmatrix} \ ,$$

et on définit également la moyenne et la matrice de covariance

$$\mathbb{E}[\begin{pmatrix} X_k \\ \Xi_k \end{pmatrix} \mid Y_0, \cdots, Y_{k-1}] = \begin{pmatrix} \widehat{X}_k^- \\ \widehat{\Xi}_k^- \end{pmatrix} \ ,$$

$$\mathbb{E}[\begin{pmatrix} \widehat{X}_k^- - X_k \\ \widehat{\Xi}_k^- - \Xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{X}_k^- - X_k \\ \widehat{\Xi}_k^- - \Xi_k \end{pmatrix}^* \mid Y_0, \cdots, Y_{k-1}] = \begin{pmatrix} P_k^- & S_k^- \\ (S_k^-)^* & \Sigma_k^- \end{pmatrix} \ .$$

(ii) **Montrer que**

$$A_n = \mathbb{E}[\, \Xi_n \mid Y_0, \cdots, Y_n] = \widehat{\Xi}_n \ .$$

(iii) **Donner les équations du filtre de Kalman pour le vecteur d'état $\begin{pmatrix} X_k \\ \Xi_k \end{pmatrix}$.**

(iv) **En déduire que**

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} L_k \, [Y_k - H_k \, \widehat{X}_k^-] \ ,$$

**où on donnera l'expression de la matrice $L_k$ pour tout instant $k$.**