Université de Rennes 1
Master recherche STI

Examen du cours UE 14
"Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés"
Jeudi 24 janvier 2008, 10:30 à 12:30

Problème

Le but de ce problème est d'établir les équations du lisseur de Kalman et de certaines moyennes conditionnelles à valeurs matricielles pour le système linéaire suivant :

$$X_k = F\, X_{k-1} + W_k \ ,$$

$$Y_k = H\, X_k + V_k \ ,$$

sous les hypothèses habituelles :

- X_0 *vecteur aléatoire gaussien, de moyenne* $\bar{X}_0$ *et de matrice de covariance* Σ_0*,*
- $\{W_k\}$ *bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance* Q*,*
- $\{V_k\}$ *bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance* R *inversible,*
- X_0*,* $\{W_k\}$ *et* $\{V_k\}$ *mutuellement indépendants.*

Soit n un instant final *fixé*, et soit $Y_{0:n} = (Y_0, \cdots, Y_n)$: on souhaite calculer les moyennes conditionnelles et les matrices de covariance

$$\widehat{W}_{k|n} = \mathbb{E}[W_k \mid Y_{0:n}] \qquad \text{et} \qquad Q_{k|n} = \mathbb{E}[(W_k - \widehat{W}_{k|n})\, (W_k - \widehat{W}_{k|n})^*] \ ,$$

pour tout instant $k = 1, \cdots, n$, et

$$\widehat{X}_{k|n} = \mathbb{E}[X_k \mid Y_{0:n}] \qquad \text{et} \qquad P_{k|n} = \mathbb{E}[(X_k - \widehat{X}_{k|n})\, (X_k - \widehat{X}_{k|n})^*] \ ,$$

pour tout instant $k = 0, 1, \cdots, n$, ainsi que les moyennes conditionnelles à valeurs matricielles :

$$\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} X_k\, X_k^* \mid Y_{0:n}] \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} X_{k+1}\, X_k^* \mid Y_{0:n}] \ .$$

On introduit le processus d'innovation $\{I_k\}$ défini par l'une ou l'autre des expressions équivalentes suivantes

$$I_k = Y_k - \mathbb{E}[Y_k \mid Y_{0:k-1}] = Y_k - H\,\widehat{X}_k^- = H\,(X_k - \widehat{X}_k^-) + V_k \ ,$$

où

$$\widehat{X}_k^- = \mathbb{E}[X_k \mid Y_{0:k-1}] \ ,$$

par définition, pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, et on rappelle les propriétés suivantes

- la suite $\{I_k\}$ est un bruit blanc gaussien centré, c'est–à–dire une suite de vecteurs aléatoires gaussiens indépendants centrés,
- en particulier I_k est un vecteur aléatoire gaussien indépendant de $Y_{0:k-1}$, de moyenne nulle et de matrice de covariance inversible

  $$\Xi_k = H\,P_k^-\,H^* + R \qquad \text{où} \qquad P_k^- = \mathbb{E}[(X_k - \widehat{X}_k^-)\,(X_k - \widehat{X}_k^-)^*] \ ,$$

  pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$,
- toute fonction des variables $(Y_0, \cdots, Y_{k-1}, Y_k)$ peut s'exprimer en fonction des variables $(Y_0, \cdots, Y_{k-1}, I_k)$, et réciproquement, de sorte que $(Y_{0:k-1}, I_k)$ contient exactement la même information que $Y_{0:k}$, et par récurrence $I_{0:k}$ contient exactement la même information que $Y_{0:k}$,

vues en cours. On définit aussi

$$\widehat{X}_k = \mathbb{E}[X_k \mid Y_{0:k}] \qquad \text{et} \qquad P_k = \mathbb{E}[(X_k - \widehat{X}_k)\,(X_k - \widehat{X}_k)^*] \ ,$$

pour tout $k = 0, \cdots, n$.

(i) **Montrer que si le vecteur aléatoire $(Z, Y_{0:n})$ est gaussien, alors la moyenne conditionnelle $\mathbb{E}[Z \mid Y_{0:n}]$ se décompose comme**

$$\mathbb{E}[Z \mid Y_{0:n}] = \mathbb{E}[Z] + \sum_{p=0}^{n} \mathbb{E}[Z\,I_p^*]\,\Xi_p^{-1}\,I_p \ ,$$

sur une base de vecteurs aléatoires gaussiens indépendants centrés.

(ii) **En déduire que les moyennes conditionnelles $\widehat{W}_{k|n}$ et $\widehat{X}_{0|n}$ se décomposent comme**

$$\widehat{W}_{k|n} = \mathbb{E}[W_k \mid Y_{0:n}] = \sum_{p=k}^{n} \mathbb{E}[W_k\,I_p^*]\,\Xi_p^{-1}\,I_p \ ,$$

et

$$\widehat{X}_{0|n} = \mathbb{E}[X_0 \mid Y_{0:n}] = \bar{X}_0 + \sum_{p=0}^{n} \mathbb{E}[X_0\,I_p^*]\,\Xi_p^{-1}\,I_p \ ,$$

sur une base de vecteurs aléatoires gaussiens indépendants centrés.

La suite du problème consiste à trouver un système d'équations récurrentes pour calculer les moyennes à valeurs matricielles

$$\mathbb{E}[W_k\, I_p^*] \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[X_k\, I_p^*]\ ,$$

pour tout instant $p = k, \cdots, n$.

(iii) **Montrer que**

$$\mathbb{E}[W_k\, I_p^*] = \mathbb{E}[W_k\, (X_p - \widehat{X}_p^-)^*]\; H^* \qquad \textbf{et} \qquad \mathbb{E}[X_k\, I_p^*] = \mathbb{E}[X_k\, (X_p - \widehat{X}_p^-)^*]\; H^*\ ,$$

pour tout $p = k, \cdots, n$**.**

(iv) **En utilisant le modèle d'état et les équations du filtre de Kalman, exprimer** $(X_p - \widehat{X}_p^-)$ **en fonction de** $(X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-)$**,** W_p **et** V_{p-1}**.**

On pose

$$\Lambda_k = F\,(I - K_k\, H) \qquad \text{où} \qquad K_k = P_k^-\; H^*\; \Xi_k^{-1}\ ,$$

représente le gain de Kalman, et

$$\Delta_{k,p} = \Lambda_k^* \cdots \Lambda_{p-1}^*\ ,$$

pour tout $p = k, \cdots, n$, avec la convention $\Delta_{k,k} = I$.

(v) **Montrer que**

$$\mathbb{E}[W_k\, (X_k - \widehat{X}_k^-)^*] = Q\ ,$$

pour $p = k$**, et en utilisant la réponse à la question (iv) montrer que**

$$\mathbb{E}[W_k\, (X_p - \widehat{X}_p^-)^*] = \mathbb{E}[W_k\, (X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-)^*]\; \Lambda_{p-1}^*\ ,$$

pour tout $p = k+1, \cdots, n$**. En déduire par récurrence que**

$$\mathbb{E}[W_k\, (X_p - \widehat{X}_p^-)^*] = Q\; \Delta_{k,p}\ ,$$

pour tout $p = k, \cdots, n$**.**

(vi) **Montrer que**

$$\mathbb{E}[X_k\, (X_k - \widehat{X}_k^-)^*] = P_k^-\ ,$$

pour $p = k$**, et en utilisant la réponse à la question (iv) montrer que**

$$\mathbb{E}[X_k\, (X_p - \widehat{X}_p^-)^*] = \mathbb{E}[X_k\, (X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-)^*]\; \Lambda_{p-1}^*\ ,$$

pour tout $p = k+1, \cdots, n$**. En déduire par récurrence que**

$$\mathbb{E}[X_k\, (X_p - \widehat{X}_p^-)^*] = P_k^-\; \Delta_{k,p}\ ,$$

pour tout $p = k, \cdots, n$**.**

On définit

$$U_k = \sum_{p=k}^{n} \Delta_{k,p}\ H^*\ \Xi_p^{-1}\ I_p \qquad \text{et} \qquad C_k = \sum_{p=k}^{n} \Delta_{k,p}\ H^*\ \Xi_p^{-1}\ H\ \Delta_{k,p}^*\ ,$$

pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$.

(vii) **Montrer que**

$$U_n = H^*\ \Xi_n^{-1}\ I_n \qquad \textbf{et} \qquad C_n = H^*\ \Xi_n^{-1}\ H\ ,$$

pour $k = n$, et montrer les relations de récurrence rétrogrades

$$U_k = H^*\ \Xi_k^{-1}\ I_k + \Lambda_k^*\ U_{k+1} \qquad \textbf{et} \qquad C_k = H^*\ \Xi_k^{-1}\ H + \Lambda_k^*\ C_{k+1}\ \Lambda_k\ ,$$

pour tout $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

(viii) **Déduire des réponses aux questions (ii), (iii) et (v) que**

$$\widehat{W}_{k|n} = \mathbb{E}[W_k \mid Y_{0:n}] = Q\ \sum_{p=k}^{n} \Delta_{k,p}\ H^*\ \Xi_p^{-1}\ I_p = Q\ U_k\ ,$$

et

$$Q_{k|n} = \mathbb{E}[(W_k - \widehat{W}_{k|n})\ (W_k - \widehat{W}_{k|n})^*] = Q - Q\ C_k\ Q\ ,$$

pour tout $k = 1, \cdots, n$.

(ix) **Montrer que**

$$\mathbb{E}[(W_{k+1} - \widehat{W}_{k+1|n})\ (X_k - \widehat{X}_{k|n})^*] = -\mathbb{E}[\widehat{W}_{k+1|n}\ X_k^*]\ ,$$

et déduire des réponses aux questions (iii), (vi) et (viii) que

$$\mathbb{E}[\widehat{W}_{k+1|n}\ X_k^*] = Q\ C_{k+1}\ \Lambda_k\ P_k^- = Q\ C_{k+1}\ F\ P_k\ ,$$

pour tout $k = 0, \cdots, n-1$.

(x) **Déduire des réponses aux questions (ii), (iii) et (vi) que**

$$\widehat{X}_{0|n} = \mathbb{E}[X_0 \mid Y_{0:n}] = \bar{X}_0 + \Sigma_0\ U_0\ ,$$

et

$$P_{0|n} = \mathbb{E}[(X_0 - \widehat{X}_{0|n})\ (X_0 - \widehat{X}_{0|n})^*] = \Sigma_0 - \Sigma_0\ C_0\ \Sigma_0\ .$$

(xi) **Montrer que la suite $\{\widehat{X}_{k|n}\}$ vérifie la relation de récurrence**

$$\widehat{X}_{k|n} = F\ \widehat{X}_{k-1|n} + Q\ U_k\ ,$$

pour tout $k = 1, \cdots, n$, avec la condition initiale

$$\widehat{X}_{0|n} = \bar{X}_0 + \Sigma_0\ U_0\ ,$$

obtenue en réponse à la question (x).

(xii) **En déduire que la suite $\{P_{k|n}\}$ vérifie la relation de récurrence**

$$P_{k|n} = F\ P_{k-1|n}\ F^* + Q + Q\ C_k\ Q - Q\ C_k\ P_k^- - P_k^-\ C_k\ Q\ ,$$

pour tout $k = 1, \cdots, n$, avec la condition initiale

$$P_{0|n} = \Sigma_0 - \Sigma_0\ C_0\ \Sigma_0\ ,$$

obtenue en réponse à la question (x).

(xiii) **Montrer que**

$$\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} X_k\, X_k^* \mid Y_{0:n}] = \sum_{k=0}^{n-1} [P_{k|n} + \widehat{X}_{k|n}\ \widehat{X}_{k|n}^*]\ ,$$

et

$$\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} X_{k+1}\, X_k^* \mid Y_{0:n}] = \sum_{k=0}^{n-1} [F\ P_{k|n} + Q\ C_{k+1}\ F\ P_k + \widehat{X}_{k+1|n}\ \widehat{X}_{k|n}^*]\ .$$